

K Dodecahedron-Shi Connected Cycles Networks

Haizhong Shi, Zhicheng Zhang

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu
Email: haizhong.shi@163.com, zhangzhichengly@163.com

Received: Jun. 7th, 2018; accepted: Jun. 22nd, 2018; published: Jun. 29th, 2018

Abstract

An interconnection network is an important part of a supercomputer. On chip interconnection network is one of the hot topics in current research. A class of important interconnection network of the K dodecahedron-Shi connected cycle network is a new network model based on the regular graph connected cycle network model of the internet in 2010. It is obtained by replacing each vertex of a dodecahedron connected cycle network with triangle K times, and it is recorded as DSCC(k). It is a 3-regular and 3-connected plane graph, and has many good properties. In this paper, a series of conjectures about the network are proposed, such as the conjecture 1: K dodecahedron-Shi connected cycle network is a Hamilton graph, and the conjectures 1, 2, and 3 are proved strictly. The author also uses the Descartes product method of graphs to construct a new Descartes product interconnected DSCC(k) \times K₂ and DSCC(k) \times C_m, and study their properties.

Keywords

Interconnection Network, Dodecahedron Connected Cycle Network, Hamilton Graph, Cartesian Product Interconnection Network

k次十二面体 - 师连通圈网络

师海忠, 张治成

西北师范大学数学与统计学院, 甘肃 兰州
Email: haizhong.shi@163.com, zhangzhichengly@163.com

收稿日期: 2018年6月7日; 录用日期: 2018年6月22日; 发布日期: 2018年6月29日

摘要

互连网络是超级计算机的重要组成部分, 片上互连网络是当前研究的热点课题之一。k次十二面体 - 师

连通圈网络是一类重要的互连网络, 是在2010年师海忠提出互连网络的正则图连通圈网络模型的基础上设计的新网络模型。它是将十二面体连通圈网络的每个顶点用三角形代替 k 次得到的, 记为 $DSCC(k)$, 它是3正则3连通的平面图, 且有许多好的性质。文中提出了关于该网络的一系列猜想, 如猜想1: k 次十二面体-师连通圈网络是Hamilton图, 对猜想1、2、3作了严格的证明。作者还利用图的笛卡尔乘积方法构建了新的笛卡尔乘积互连网络 $DSCC(k) \times K_2$ 和 $DSCC(k) \times C_m$, 并对其性质进行了研究。

关键词

互连网络, 十二面体连通圈网络, Hamilton图, 笛卡尔乘积网络

Copyright © 2018 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

互连网络是超级计算机的重要组成部分, 它的性能在某种程度上决定着超级计算机的性能。片上互连网络是当前研究的热点课题之一, 互连网络通常被模型化为一个图, 图的结点对应处理机, 图的边对应处理机间的通信信道。各种已有的互连网络参见[1] [2] [3] [5]-[10]。2010年, 在中国运筹学大会上, 师海忠提出了互连网络的正则图连通圈网络模型, 设计出了多种互连网络, 并提出了一系列猜想[1]。在此基础上, 师海忠又进一步提出了 k 次十二面体-师连通圈网络 $DSCC(k)$ 和笛卡尔乘积网络 $DSCC(k) \times K_2$ 、 $DSCC(k) \times C_m$, 并提出如下猜想:

猜想 1: k 次十二面体-师连通圈网络是 Hamilton 图。

猜想 2: 任何一个 3 正则 3 连通的 Hamilton 图, 每个顶点用一个三角形代替后得到的图一定是 Hamilton 图。

猜想 3: 一个 3 正则 3 连通平面图的每个顶点用一个三角形来代替得到的图是 Hamilton 图, 则原图是 Hamilton 图。

猜想 4: $DSCC(k) \times K_2$ 是边不交的 2 个 Hamilton 圈的并。

猜想 5: $DSCC(k) \times C_m$ 是边不交的 2 个 Hamilton 圈和一个完美对集的并。

2. 基本概念

定义 1 [4]: 图 G 是一点边连续交替出现的序列, $w = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \cdots e_n v_n$ 称为图 G 的一个途径, 其中 v_0, v_n 分别称为途径的起点和终点, w 上其余顶点称为中途点, 图 G 中边不重复出现的途径称为迹。图 G 中起点和终点相同的途径称为闭途径, 边不重复出现的闭途径称为闭迹(也称为回路)。中途点不重复的闭途径称为圈。

定义 2 [4]: 包含图 G 的每个顶点的圈称为图 G 的 Hamilton 圈, 具有 Hamilton 圈的图称为 Hamilton 图。

定义 3 [4]: 图 G 中与一个顶点 v_i 相关联的边的数目叫做顶点 v_i 的度, 记作 $d(v_i)$ 或 $\deg(v_i)$, 图 G 中所有顶点中最小的度记作 $\delta(G) = \min\{d(v) | v \in V(G)\}$, 最大的度记作 $\Delta(G) = \max\{d(v) | v \in V(G)\}$ 。如果 $\delta(G) = \Delta(G) = k$, 则图 G 中所有顶点的度相等, 这时称图 G 是 k 正则的。

定义 4: 将十二面体连通圈网络中的每个顶点用一个三角形代替, 所得到的新网络叫做 1 次十二面

体-师连通圈网络, 记为 $DSCC(1)$; 然后再将 1 次十二面体-师连通圈网络中的每个顶点用一个三角形代替, 得到的新网络叫做 2 次十二面体-师连通圈网络, 记为 $DSCC(2)$; 依次代替 k 次, 得到的新网络叫做 k 次十二面体-师连通圈网络, 记为 $DSCC(k)$ 。

定义 5 [2]: 设 $G_1=(V_1, E_1)$ 和 $G_2=(V_2, E_2)$ 是两个无向图, G_1 和 G_2 的笛卡尔乘积是无向图, 记为 $G_1 \times G_2$ 。其中 $V(G_1 \times G_2) = V_1 \times V_2 = \{(v_1, v_2) | v_1 \in V_1 \text{ 且 } v_2 \in V_2\}$, 存在一条顶点 $x_1 x_2$ 与顶点 $y_1 y_2$ 之间的边(其中 $x_1, y_1 \in V(G_1), x_2, y_2 \in V(G_2)$) 当且仅当或者 $x_1 = y_1$ 且 $x_2 y_2 \in E(G_2)$, 或者 $x_2 = y_2$ 且 $x_1 y_1 \in E(G_1)$ 。类似, 可以定义笛卡尔乘积 $G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$ 。

定义 6: 将 k 次十二面体-师连通圈网络 $DSCC(k)$ 与 K_2 作笛卡尔乘积生成的新网络记为 $DSCC(k) \times K_2$ 。 k 次十二面体-师连通圈网络 $DSCC(k)$ 与一个长度为 m 的圈 C_m 作笛卡尔乘积生成的新网络, 我们记为 $DSCC(k) \times C_m$ ($k=0, 1, 2, \dots, m=3, 4, \dots$)。

3. 主要结果

3.1. k 次十二面体-师连通圈网络

引理 1 [4]: 十二面体 DH 是 Hamilton 图。

如图 1、图 2 所示。

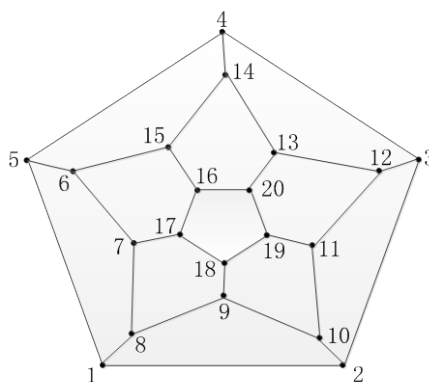


Figure 1. Dodecahedron DH

图 1. 十二面体 DH

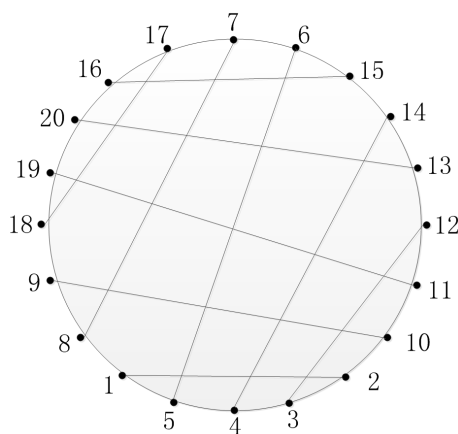


Figure 2. The ring representation of dodecahedron DH

图 2. 十二面体 DH 的圈表示

Hamilton 圈为: 1-8-9-18-19-20-16-17-7-6-15-14-13-12-11-10-2-3-4-5-1。

为了统一起见, 我们用 $DSCC(\mathbf{0})$ 表示十二面体 DH 。

定理 1 1 次十二面体 - 师连通圈网络 $DSCC(\mathbf{1})$ 是 Hamilton 图。

证明: 如图 3、图 4 所示。

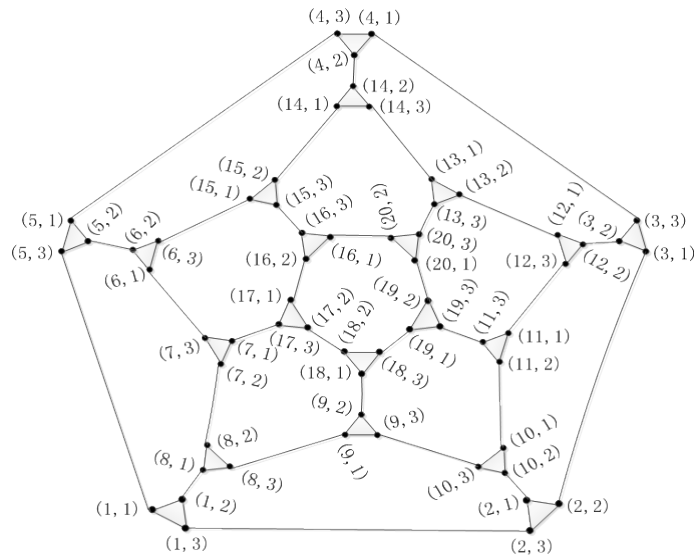


Figure 3. $DSCC(\mathbf{1})$

图 3. $DSCC(\mathbf{1})$

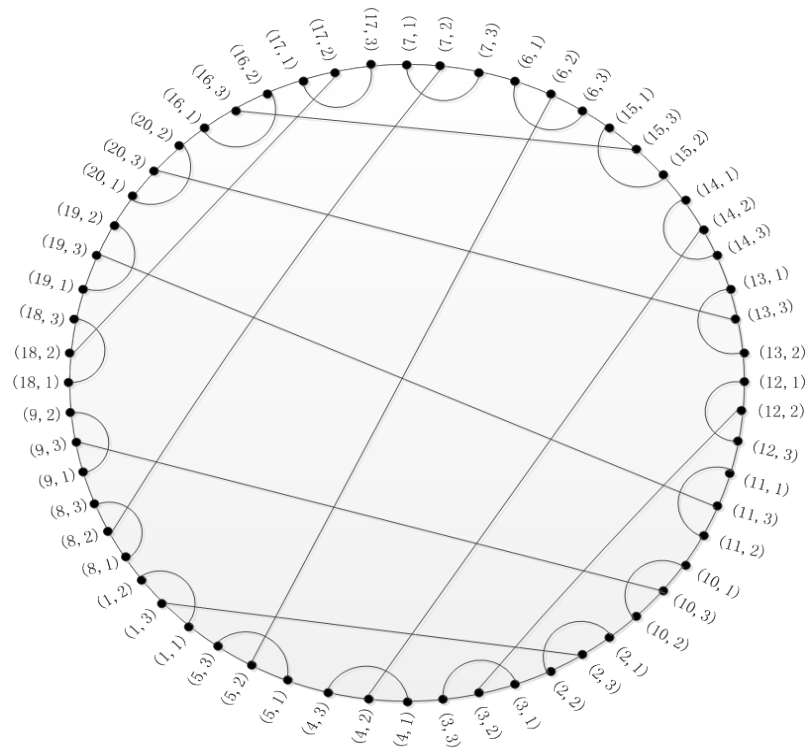


Figure 4. The ring representation of $DSCC(\mathbf{1})$

图 4. $DSCC(\mathbf{1})$ 的圈表示

由图 3、图 4 可知, Hamilton 圈为:

(1,1)-(1,3)-(1,2)-(8,1)-(8,2)-(8,3)-(9,1)-(9,3)-(9,2)-(18,1)-(18,2)-(18,3)-(19,1)-(19,3)-(19,2)-(20,1)-(20,3)-(20,2)-(16,1)-(16,3)-(16,2)-(17,1)-(17,2)-(17,3)-(7,1)-(7,2)-(7,3)-(6,1)-(6,2)-(6,3)-(15,1)-(15,3)-(15,2)-(14,1)-(14,2)-(14,3)-(13,1)-(13,3)-(13,2)-(12,1)-(12,2)-(12,3)-(11,1)-(11,3)-(11,2)-(10,1)-(10,3)-(10,2)-(2,1)-(2,3)-(2,2)-(3,1)-(3,2)-(3,3)-(4,1)-(4,2)-(4,3)-(5,1)-(5,2)-(5,3)-(1,1)。

由此可知, 1 次十二面体 - 师连通圈网络 $DSCC(1)$ 是 Hamilton 图。

定理 2: 2 次十二面体 - 师连通圈网络 $DSCC(2)$ 是 Hamilton 图。

证明: 如图 5、图 6 所示。

由图 5、图 6 可知, Hamilton 圈为:

(1,1,1)-(1,1,2)-(1,1,3)-(1,3,1)-(1,3,3)-(1,3,2)-(1,2,1)-(1,2,2)-(1,2,3)-(8,1,1)-(8,1,3)-(8,1,2)-(8,2,1)-(8,2,2)-(8,2,3)-(8,3,1)-(8,3,3)-(8,3,2)-(9,1,1)-(9,1,2)-(9,1,3)-(9,3,1)-(9,3,3)-(9,3,2)-(9,2,1)-(9,2,2)-(9,2,3)-(18,1,1)-(18,1,3)-(18,1,2)-(18,2,1)-(18,2,2)-(18,2,3)-(18,3,1)-(18,3,3)-(18,3,2)-(19,1,1)-(19,1,2)-(19,1,3)-(19,3,1)-(19,3,3)-(19,3,2)-(19,2,1)-(19,2,2)-(19,2,3)-(20,1,1)-(20,1,2)-(20,1,3)-(20,3,1)-(20,3,3)-(20,3,2)-(20,2,1)-(20,2,2)-(20,2,3)-(16,1,1)-(16,1,2)-(16,1,3)-(16,3,1)-(16,3,3)-(16,3,2)-(16,2,1)-(16,2,2)-(16,2,3)-(17,1,1)-(17,1,3)-(17,1,2)-(17,2,1)-(17,2,2)-(17,2,3)-(17,3,1)-(17,3,3)-(17,3,2)-(7,1,1)-(7,1,3)-(7,1,2)-(7,2,1)-(7,2,2)-(7,2,3)-(7,3,1)-(7,3,3)-(7,3,2)-(6,1,1)-(6,1,3)-(6,1,2)-(6,2,1)-(6,2,2)-(6,2,3)-(6,3,1)-(6,3,3)-(6,3,2)-(15,1,1)-(15,1,2)-(15,1,3)-(15,3,1)-(15,3,3)-(15,3,2)-(15,2,1)-(15,2,2)-(15,2,3)-(14,1,1)-(14,1,3)-(14,1,2)-(14,2,1)-(14,2,2)-(14,2,3)-(14,3,1)-(14,3,3)-(14,3,2)-(13,1,1)-(13,1,2)-(13,1,3)-(13,3,1)-(13,3,3)-(13,3,2)-(13,2,1)-(13,2,2)-(13,2,3)-(12,1,1)-(12,1,3)-(12,1,2)-(12,2,1)-(12,2,2)-

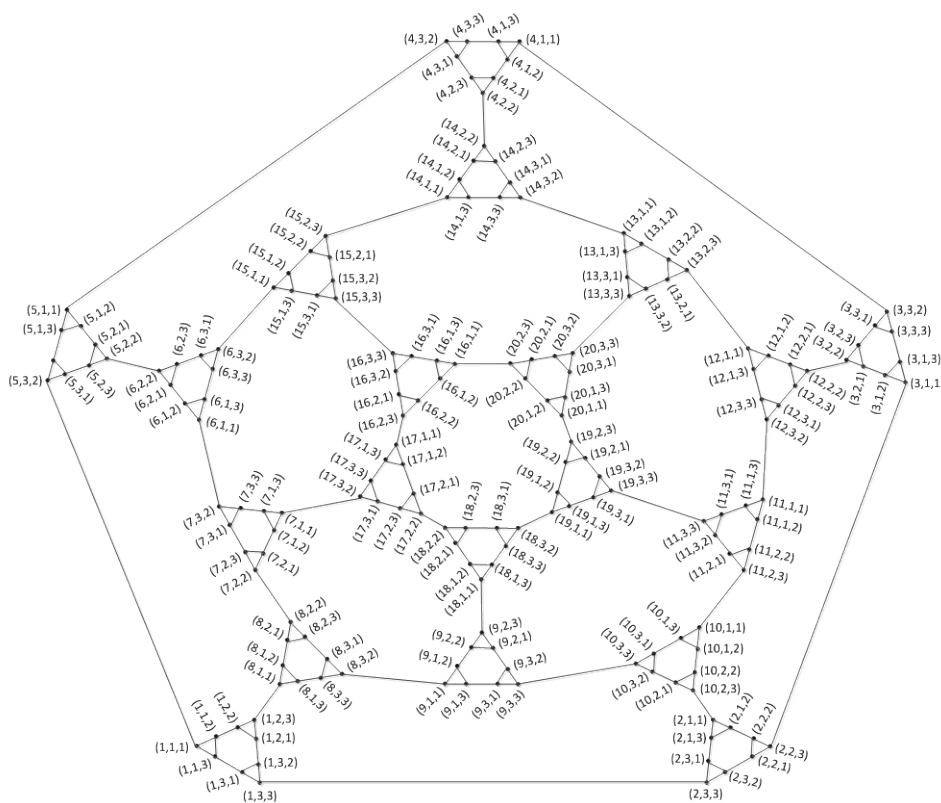


Figure 5. DSCC(2)
图 5. DSCC(2)

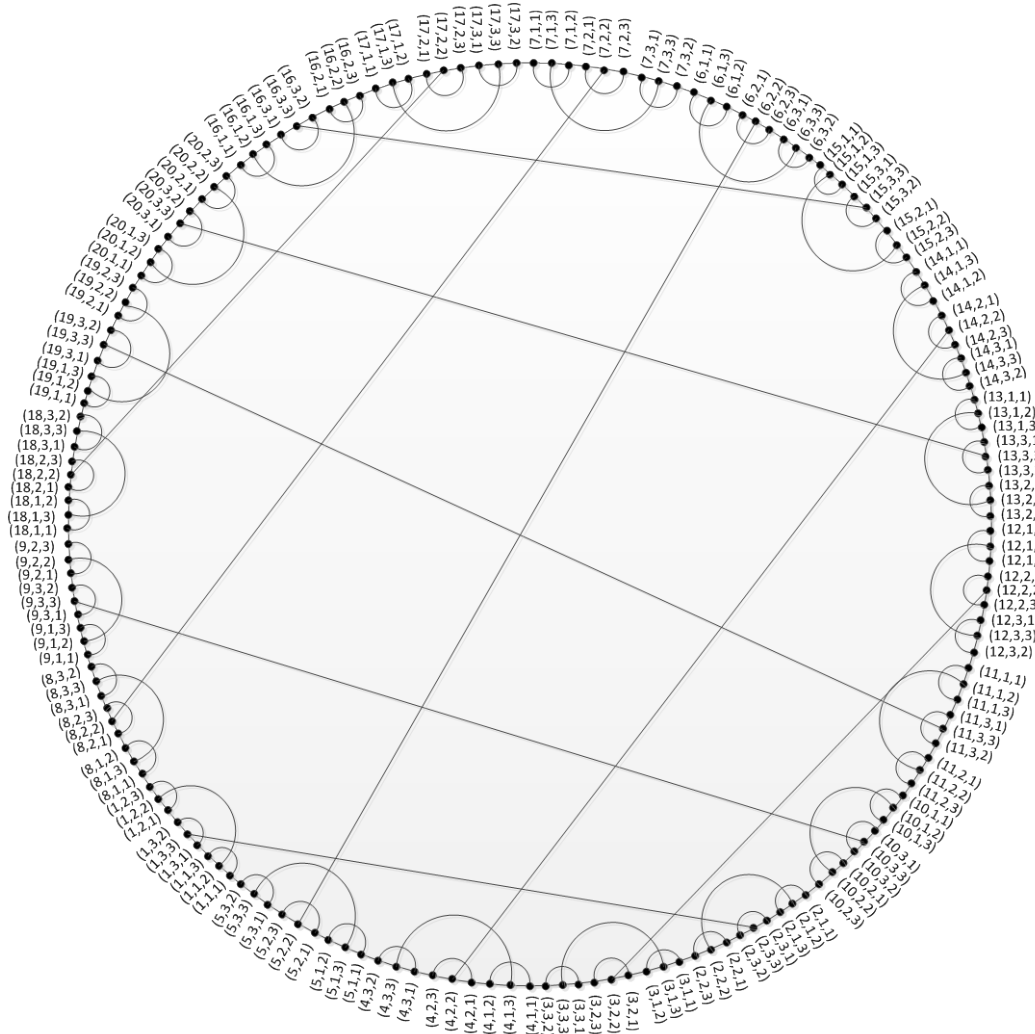


Figure 6. The ring representation of $DSCC(2)$
 图 6. $DSCC(2)$ 的圈表示

(12,2,3)-(12,3,1)-(12,3,3)-(12,3,2)-(11,1,1)-(11,1,2)-(11,1,3)-(11,3,1)-(11,3,3)-(11,3,2)-(11,2,1)-(11,2,2)-(11,2,3)-
 -(10,1,1)-(10,1,2)-(10,1,3)-(10,3,1)-(10,3,3)-(10,3,2)-(10,2,1)-(10,2,2)-(10,2,3)-(2,1,1)-(2,1,2)-(2,1,3)-(2,3,1)-(2,
 3,3)-(2,3,2)-(2,2,1)-(2,2,2)-(2,2,3)-(3,1,1)-(3,1,3)-(3,1,2)-(3,2,1)-(3,2,2)-(3,2,3)-(3,3,1)-(3,3,3)-(3,3,2)-(4,1,1)-(4,
 1,3)-(4,1,2)-(4,2,1)-(4,2,2)-(4,2,3)-(4,3,1)-(4,3,3)-(4,3,2)-(5,1,1)-(5,1,3)-(5,1,2)-(5,2,1)-(5,2,2)-(5,2,3)-(5,3,1)-(5,3,
 3)-(5,3,2)-(1,1,1)。

由此可知, 2 次十二面体 - 师连通圈网络 $DSCC(2)$ 是 Hamilton 图。

定理 3: k 次十二面体 - 师连通圈网络 $DSCC(k)$ 是 Hamilton 图。

证明: 当 $k=0, 1, 2$ 时, 由引理 1、定理 1、2 知, 是 Hamilton 图。

假设 $k-1$ 次十二面体 - 师连通圈网络 $DSCC(k-1)$ 是 Hamilton 图, 即存在 Hamilton 圈 H_{k-1} 。

设 v_0 是 $k-1$ 次十二面体 - 师连通圈网络 $DSCC(k-1)$ 中的任意一个顶点, v_1, v_2, v_3 是与 v_0 相邻的三个顶点, 则 Hamilton 圈 H_{k-1} 中必含有边 v_0v_1, v_0v_2, v_0v_3 中的两条边。假设 Hamilton 圈 H_{k-1} 中含有边 v_0v_1, v_0v_2 (其它情况证明类似), 如图 7 所示。

当用一个小三角形分别代替 $k-1$ 次十二面体 - 师连通圈网络 $DSCC(k-1)$ 中的每个顶点时, 我们假

设用三角形 $\Delta_{v_{(i,1)}v_{(i,2)}v_{(i,3)}}$ 代替顶点 $v_i (i=0,1,2,3)$, 则 v_0, v_1, v_2, v_3 四点处变化后的图 $DSCC(k)$ 如图 8 所示。用路 $P_k = v_{(1,1)}v_{(0,1)}v_{(0,3)}v_{(0,2)}v_{(2,1)}$ 代替 Hamilton 圈 H_{k-1} 中的路 $P_{k-1} = v_1v_0v_2$ 后, 得到的圈 H_k 即为 k 次十二面体 - 师连通圈网络 $DSCC(k)$ 中的 Hamilton 圈。

综上所述, 由数学归纳法知 k 次十二面体 - 师连通圈网络 $DSCC(k)$ 是 Hamilton 图。

定理 4: k 次十二面体 - 师连通圈网络 $DSCC(k)$ 的性质:

- 1) k 次十二面体 - 师连通圈网络 $DSCC(k)$ 有 20×3^k 个顶点, 有 30×3^k 条边;
- 2) k 次十二面体 - 师连通圈网络 $DSCC(k)$ 是 3 正则 3 连通的;
- 3) k 次十二面体 - 师连通圈网络 $DSCC(k)$ 是平面图;
- 4) k 次十二面体 - 师连通圈网络是 Hamilton 图。

定理 5: 任何一个 3 正则 3 连通的平面 Hamilton 图 $(3,3)-HG$, 每个顶点用一个三角形代替后得到的图 $(3,3)-HGCC(1)$ 一定是 3 正则 3 连通的平面 Hamilton 图。

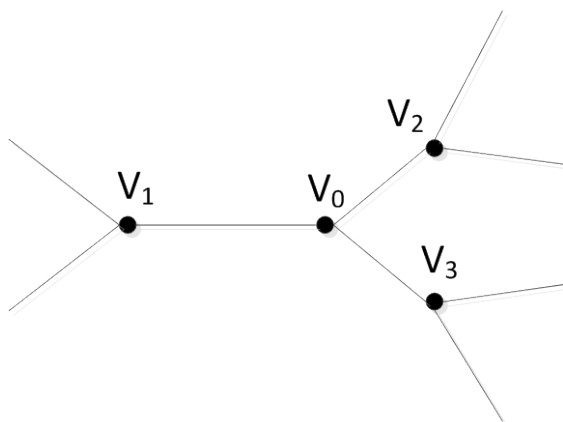


Figure 7. Local graphical representation of DSCC(k-1)
图 7. DSCC(k-1)的局部图示

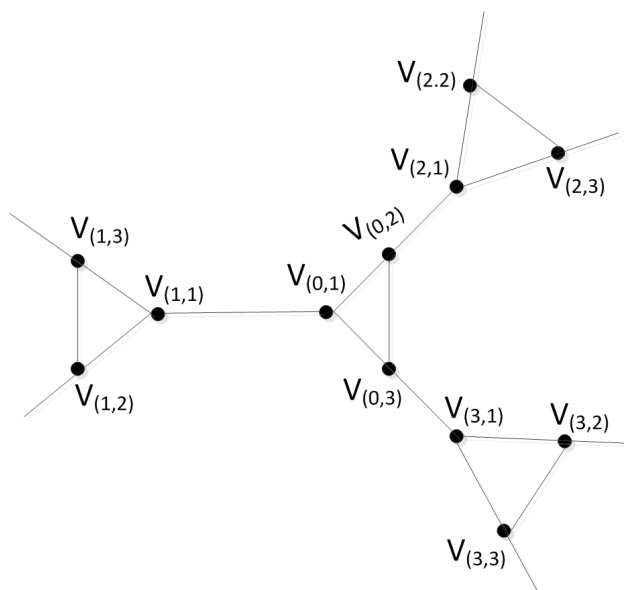


Figure 8. Local graphical representation of DSCC(k)
图 8. DSCC(k)的局部图示

证明: 设 H_0 是任意 3 正则 3 连通平面 Hamilton 图 $(3,3)-HG$ 的一个 Hamilton 圈, v_1 是 $(3,3)-HG$ 中的任意一个顶点, v_2, v_3, v_4 是与 v_1 相邻的三个顶点. 则 Hamilton 圈 H_0 中必含有边 v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4 中的两条边, 假设 Hamilton 圈 H_0 中含有边 v_1v_2, v_1v_3 (其它情况同理可证), 如图 9 所示.

当用小三角形分别代替 3 正则 3 连通平面 Hamilton 图 $(3,3)-HG$ 中的每个顶点时, 我们假设用三角形 $\Delta_{v_{(i,1)}v_{(i,2)}v_{(i,3)}}$ 代替顶点 $v_i (i=1,2,3,\dots)$, 则 v_1, v_2, v_3, v_4 四点处变化后的平面图 $(3,3)-HGCC(1)$ 如图 10 所示. 在 H_0 中, 用路 $P_1 = v_{(2,1)}v_{(1,1)}v_{(1,3)}v_{(1,2)}v_{(3,1)}$ 代替 Hamilton 圈 H_0 中的路 $P_0 = v_2v_1v_3$ 后, 得到的圈 H_1 是一个 Hamilton 圈. 所以, 任何一个 3 正则 3 连通的平面 Hamilton 图 $(3,3)-HG$ 的每个顶点用一个三角形代替后, 得到的图 $(3,3)-HGCC(1)$ 是 3 正则 3 连通的平面 Hamilton 图.

定理 6: 一个 3 正则 3 连通平面图 $(3,3)-HGP$ 的每个顶点用一个三角形来代替得到的图 $(3,3)-HGPC(1)$ 是 Hamilton 图, 则:

- 1) 图 $(3,3)-HGPC(1)$ 是 3 正则 3 连通的平面图;
- 2) 原图 $(3,3)-HGP$ 是 Hamilton 图.

证明: 1) 结论显然成立.

2) 设 Hamilton 图 $(3,3)-HGPC(1)$ 中的一个 Hamilton 圈为

$H_1 = v_{(1,1)}v_{(1,2)}v_{(1,3)}v_{(2,1)}v_{(2,2)}v_{(2,3)} \cdots v_{(n,1)}v_{(n,2)}v_{(n,3)}v_{(1,1)}$, 其中 $v_{(i,1)}, v_{(i,2)}, v_{(i,3)}$ 是代替顶点 $v_i (i=1,2,\dots,n)$ 的三角形的三个顶点, 如图 11 所示.

当用一个点去代替一个三角形时(可以看作是把这个三角形缩小为一个顶点), 我们假设用点 $v_i (i=1,2,\dots,n)$ 代替顶点为 $v_{(i,1)}, v_{(i,2)}, v_{(i,3)}$ 的三角形, 则代替后得到的图正是原图 $(3,3)-HGP$, 如图 12 所示. 在 H_1 中, 用顶点 $v_i (i=1,2,\dots,n)$ 代替 H_1 中的路 $P_1 = v_{(i,1)}v_{(i,2)}v_{(i,3)}$ 后, 得到图 $(3,3)-HGP$ 中的圈 $H_1 = v_1v_2 \cdots v_{n-1}v_nv_1$ 是一个 Hamilton 圈. 所以, 原图 $(3,3)-HGP$ 是 Hamilton 图.

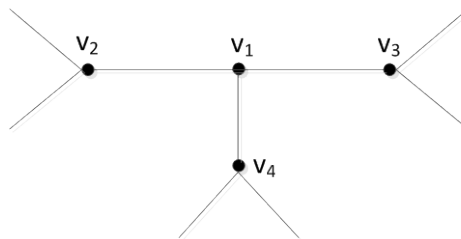


Figure 9. Local graphical representation of $(3,3)-HG$
图 9. $(3,3)-HG$ 的局部图示

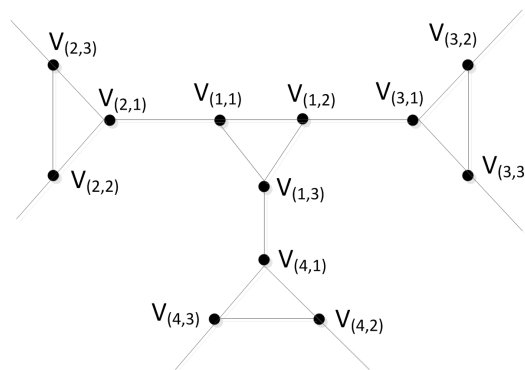


Figure 10. Local graphical representation of $(3,3)-HGCC(1)$
图 10. $(3,3)-HGCC(1)$ 的局部图示

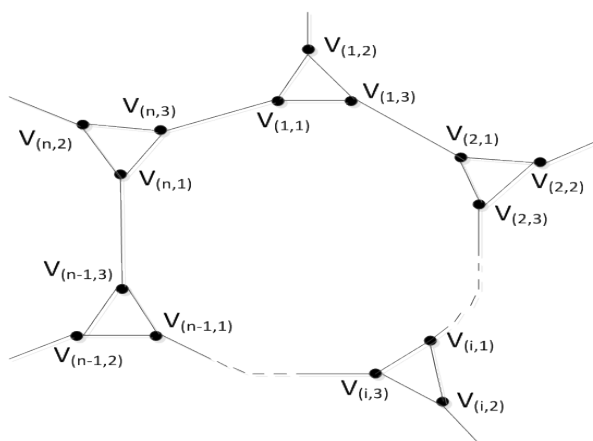


Figure 11. Local graphical representation of (3,3)-HGPPC(1)
图 11. (3,3)-HGPPC(1)的局部图示

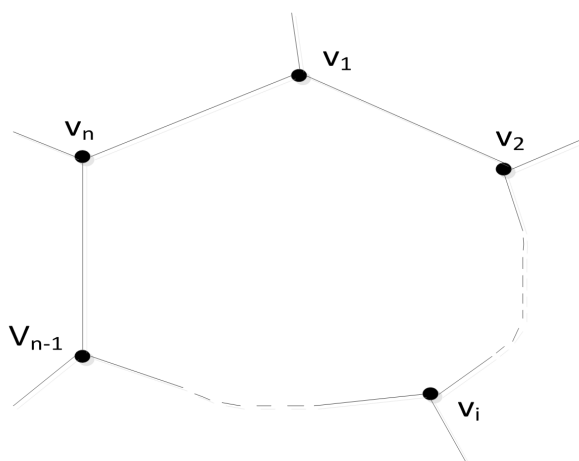


Figure 12. Local graphical representation of (3,3)-HGP
图 12. (3,3)-HGP 的局部图示

3.2. 十二面体连通圈网络的 3 维变体

在笛卡尔乘积图中, 为了方便统一起见, 我们用 $DSCC(\mathbf{0})$ 表示十二面体 DH 。

猜想 4: $DSCC(k) \times K_2$ 是边不交的 2 个 Hamilton 圈的并。

在猜想 4 中, 当 $k=0$ 时, 笛卡尔乘积图为 $DSCC(k) \times K_2$, 我们得到如下结论。

定理 7: $DSCC(\mathbf{0}) \times K_2$ 是边不交的 1 个 Hamilton 圈和 2 个完美对集的并。

证明: $DSCC(\mathbf{0}) \times K_2$ 如图 13、图 14 所示, 我们能够找到

Hamilton 圈 H_1 为:

01-08-09-018-019-020-016-017-07-06-015-014-013-012-011-010-02-03-04-05-15-14-13-12-110-111-112-113-114-115-16-17-117-116-120-119-118-19-18-11-01。

完美对集 M_1 为: 01-02, 03-012, 04-014, 05-06, 07-08, 09-010, 011-019, 013-020, 015-016, 017-018, 11-12, 13-112, 14-114, 15-16, 17-18, 19-110, 111-119, 113-120, 115-116, 117-118。

完美对集 M_2 为: 01-05, 11-15, 02-12, 03-13, 04-14, 05-15, 06-16, 07-17, 08-18, 09-19, 010-110, 011-111, 012-112, 013-113, 014-114, 015-115, 016-116, 017-117, 018-118, 019-119, 020-120。

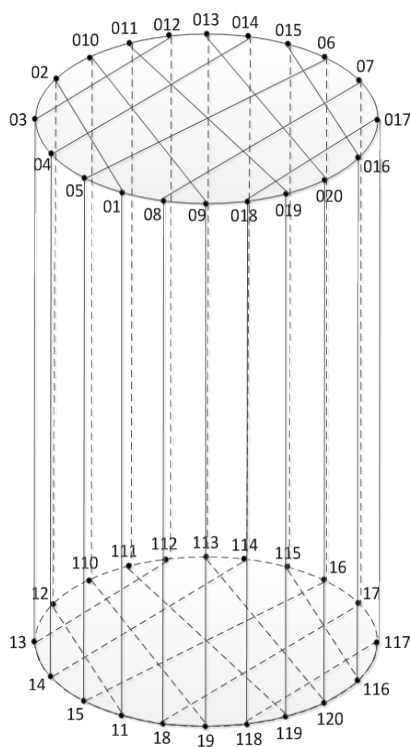


Figure 13. $DSCC(0) \times K_2$ after $DSCC(0)$ ring representation
 图 13. $DSCC(0)$ 圈表示后的 $DSCC(0) \times K_2$

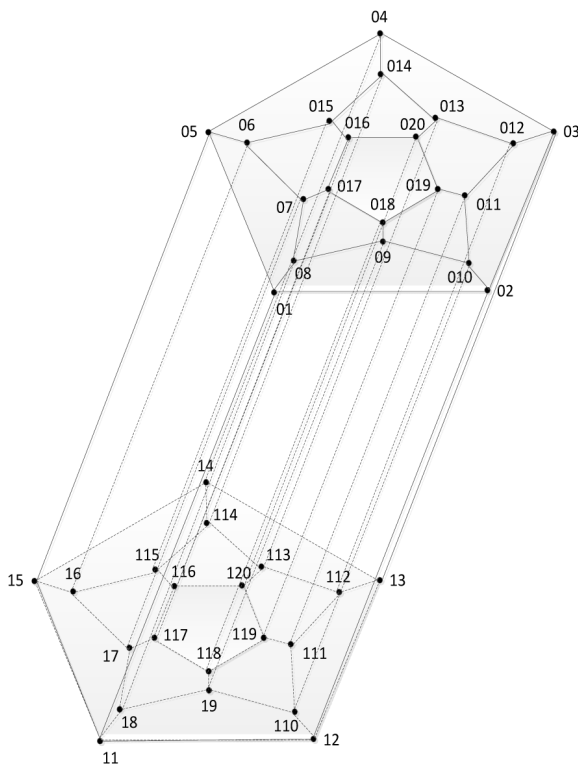


Figure 14. $DSCC(0) \times K_2$
 图 14. $DSCC(0) \times K_2$

定理得证。

引理 2 [2]: 设 $G_i (i=1, 2, \dots, n)$ 是连通图, 则

$$d(G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n) = d(G_1) + d(G_2) + \dots + d(G_n),$$

这里 $d(G)$ 表示图 G 的直径。

引理 3 [2]: 如果 $k(G_i) = \delta(G_i) > 0, i=1, 2, \dots, n$, 那么

$$k(G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n) = k(G_1) + k(G_2) + \dots + k(G_n),$$

这里 $k(G)$ 表示图 G 的连通度, $\delta(G)$ 表示图 G 的最小度。

引理 4 [2]: 如果对每个 $i=1, 2, \dots, n$, 均有 $k(G_i) > 0, \lambda(G_i) > 0$, 那么

$$k(G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n) \geq k(G_1) + k(G_2) + \dots + k(G_n);$$

$$\lambda(G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n) \geq \lambda(G_1) + \lambda(G_2) + \dots + \lambda(G_n);$$

这里 $k(G)$ 表示图 G 的连通度, $\lambda(G)$ 表示图 G 的边连通度。

引理 5 [2]: 设 G_1 和 G_2 是无向图, $G_1 \times G_2$ 是 Hamilton 图当且仅当 G_1 和 G_2 之一是 Hamilton 图, 而另一个含 Hamilton 路。

定理 8: 十二面体 - 师连通圈网络 $DSCC(k)$ 与 K_2 的笛卡尔乘积网络 $DSCC(k) \times K_2$ 的基本性质:

- 1) $DSCC(k) \times K_2$ 有 40×3^k 个顶点, 有 80×3^k 条边;
- 2) $DSCC(k) \times K_2$ 是 4 正则 4 连通的;
- 3) $DSCC(k) \times K_2$ 的连通度 $k(DSCC(k) \times K_2) = 4$, 边连通度 $\lambda(DSCC(k) \times K_2) = 6$;
- 4) 当 $k=0$ 时, $DSCC(k) \times K_2$ 是 Hamilton 图。

对于猜想 4: 当 $k=0, 1, 2, \dots$ 时, $DSCC(k) \times K_2$ 是边不交的 2 个 Hamilton 圈的并。这个结论在此处并没有得到证明, 它的正确性有待我们进一步探索。

猜想 5: $DSCC(k) \times C_m (m \geq 3)$ 是边不交的 2 个 Hamilton 圈和一个完美对集的并。

当 $k=0, m=3$ 时, 笛卡尔乘积网络 $DSCC(0) \times C_3$ 如图 15 所示。

注: 图中内部对应点之间的部分连线未画出。

定理 9: $DSCC(0) \times C_3$ 是 Hamilton 图。

证明: 由图 15 可知, Hamilton 圈为:

01-08-09-018-019-020-016-017-07-06-015-014-013-012-011-010-02-03-04-05-15-16-17-18-19-110-111-112-113-120-119-118-117-116-115-114-14-13-23-24-25-21-28-27-26-215-214-213-212-211-219-220-216-217-218-29-210-22-12-11-01。

因此, $DSCC(0) \times C_3$ 是 Hamilton 图。

当 $k=0, m=4$ 时, 笛卡尔乘积网络 $DSCC(0) \times C_4$ 如图 16 所示。

注: 图中内部对应点之间的部分连线未画出。

定理 10: $DSCC(0) \times C_4$ 是 Hamilton 图。

证明: 由图 16 可知, Hamilton 圈为:

01-08-09-018-019-020-016-017-07-06-015-014-013-012-011-010-02-03-04-05-15-14-13-12-110-111-112-113-114-115-16-17-117-116-120-119-118-19-18-12-11-21-28-29-218-219-220-216-217-27-26-215-214-213-212-211-210-22-23-24-25-35-34-33-32-310-311-312-313-314-315-36-37-317-316-320-319-318-39-38-31-01。

因此, $DSCC(0) \times C_4$ 是 Hamilton 图。

我们可以得到笛卡尔乘积网络 $DSCC(k) \times C_m (m \geq 3)$ 的一些性质如下:

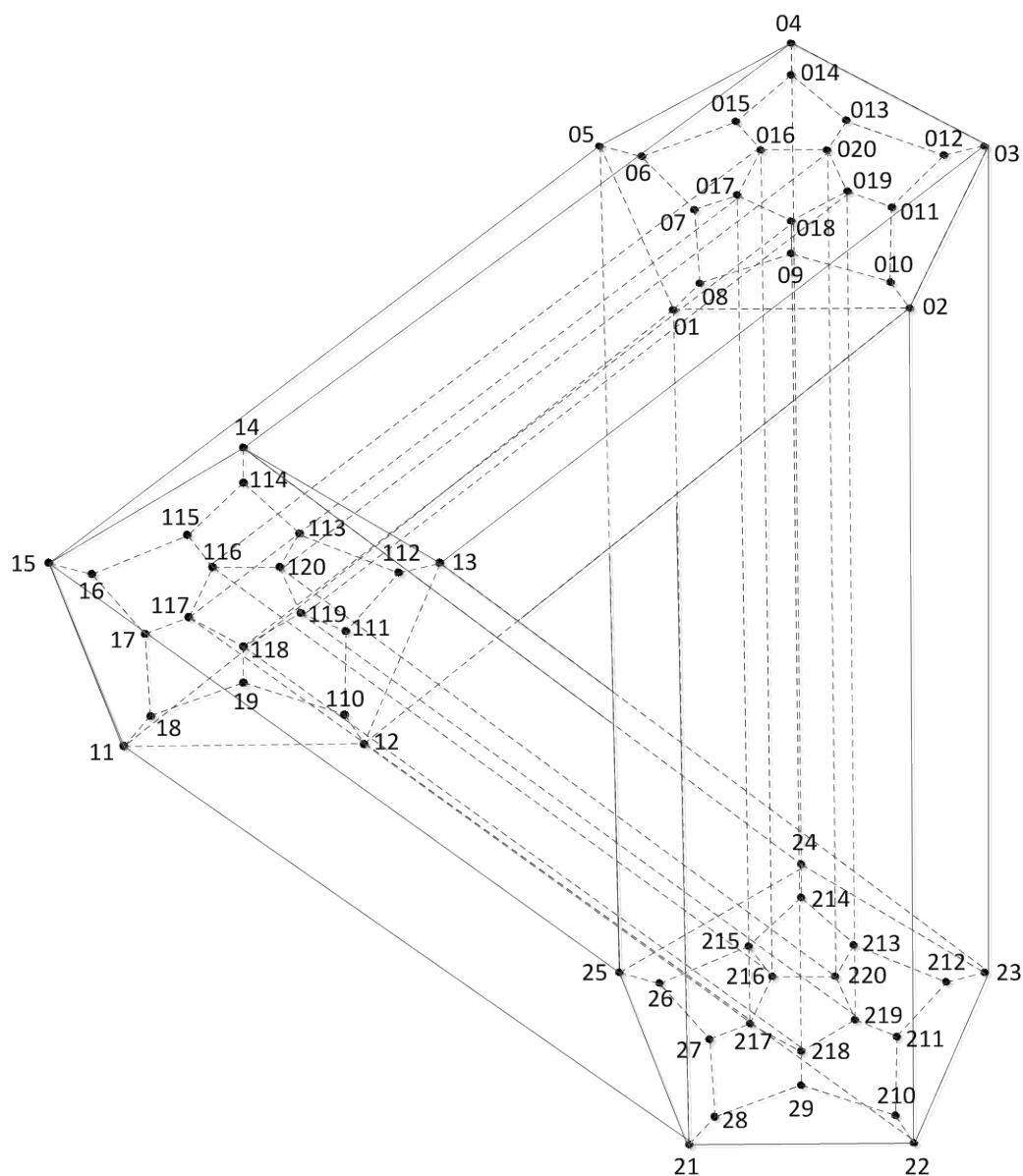


Figure 15. $DSCC(0) \times C_3$

图 15. $DSCC(0) \times C_3$

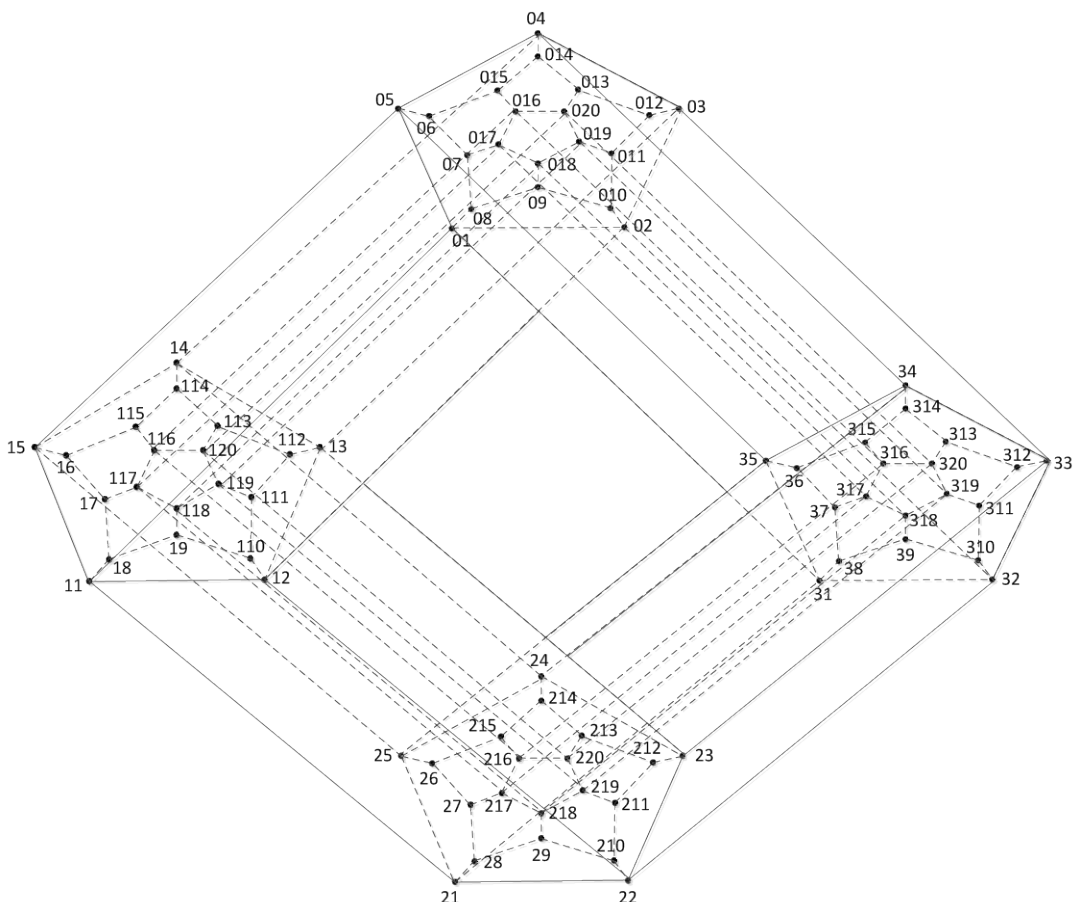
定理 11: 十二面体 - 师连通圈网络 $DSCC(k)$ 与环网络 C_m 的笛卡尔乘积网络 $DSCC(k) \times C_m$ 的基本性质:

- 1) $DSCC(k) \times C_m$ 有 $20m \times 3^k$ 个顶点, 有 $50m \times 3^k$ 条边;
- 2) $DSCC(k) \times C_m$ 是 5 正则 5 连通的;
- 3) $DSCC(k) \times C_m$ 的连通度 $k(DSCC(k) \times C_m) = 5$, 边连通度 $\lambda(DSCC(k) \times C_m) = 8$;
- 4) 当 $k = 0, m = 3, 4$ 时, $DSCC(k) \times C_m$ 是 Hamilton 图。

猜想 5 的结论是否正确, 我们在以后的研究中有待进一步探索。

4. 结束语

本文给出了 $DSCC(k)$ 的定义以及一些重要的性质, 证明了 $DSCC(k)$ 是 Hamilton 图, 并对进一步提

Figure 16. $DSCC(0)XC_4$ 图 16. $DSCC(0)XC_4$

出的猜想 2 和猜想 3 做了证明。构建了笛卡尔乘积网络 $DSCC(k) \times K_2$ 和 $DSCC(k) \times C_m$, 给出了它们的一些性质, 但对猜想 4 和猜想 5 的结论有待进一步研究。

致 谢

衷心感谢堵丁柱教授在 1996 年把我们带进超级计算机互连网络研究领域。

参考文献

- [1] 师海忠. 正则图连通圈: 多种互连网络的统一模型[C]//中国运筹学会. 中国运筹学会第十届学术交流会论文集: 2010 年卷. Hong Kong: Global-Link Informatics Limited, 2010: 202-208.
- [2] 徐俊明. 组合网络理论[M]. 北京: 科学出版社, 2007.
- [3] Xu, J.M. (2013) Combinatorial Theory in Networks. Science Press, Beijing.
- [4] Bondy, J.A. and Murty, U.S.R. (1976) Graph Theory with Applications. Macmillan Press Ltd., London.
- [5] 高随祥. 图论与网络流理论[M]. 北京: 高等教育出版社, 2009.
- [6] 张欣, 师海忠. 交叉立方体连通圈网络的 Hamilton 分解[J]. 软件, 2015, 36(8): 92-98.
- [7] 师海忠. 几类新的笛卡尔乘积互连网络[J]. 计算机科学, 2013, 40(6A): 265-270.
- [8] Shi, H. and Shi, Y. (2015) A New Model for Interconnection Network: K-Hierarchical Ring and R-Layer Graph Network. <http://vdisk.weibo.com/s/dlizjyferZ-Zl>

- [9] Shi, H. and Shi, Y. (2015) A Hierarchical Ring Group-Theoretic Model for Interconnection Networks.
<http://vdisk.weibo.com/s/dlizJyfeBX-2J>
- [10] Shi, H. and Shi, Y. (2015) Cell-Breeding Graph Model for Interconnection Networks.
<http://vdisk.weibo.com/s/dlizJyfesb05y>

知网检索的两种方式:

1. 打开知网页面 <http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD>
下拉列表框选择: [ISSN], 输入期刊 ISSN: 2161-8801, 即可查询
2. 打开知网首页 <http://cnki.net/>
左侧“国际文献总库”进入, 输入文章标题, 即可查询

投稿请点击: <http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱: csa@hanspub.org