

# Review on the Application of Frame Theory in Image and Signal Processing

Lianzi Wang, Xiaodong Zhuang\*

College of Electronic Information, Qingdao University, Qingdao Shandong  
Email: [xdzhuang@qdu.edu.cn](mailto:xdzhuang@qdu.edu.cn)

Received: Feb. 3<sup>rd</sup>, 2019; accepted: Feb. 13<sup>th</sup>, 2019; published: Feb. 20<sup>th</sup>, 2019

---

## Abstract

Wavelet analysis is a breakthrough in the history of Fourier development. Its basic theory involves digital signal processing, functional analysis, Fourier transform and other aspects. Frame theory is an important content of wavelet analysis. With the rapid development of wavelet analysis, frame theory has gradually become a heated topic. This paper classifies and summarizes the literature on the application of frame theory in signal and image processing in recent years, summarizes the concept of frame, basic properties, frame boundary, calculation and application of dual frame, and finally makes a summary.

## Keywords

Frame Theory, Image Processing, Tight Frame, Signal Reconstruction

---

# 框架理论在图像和信号处理中的应用综述

王莲子, 庄晓东\*

青岛大学电子信息学院, 山东 青岛  
Email: [xdzhuang@qdu.edu.cn](mailto:xdzhuang@qdu.edu.cn)

收稿日期: 2019年2月3日; 录用日期: 2019年2月13日; 发布日期: 2019年2月20日

---

## 摘要

小波分析是傅里叶变换发展史上的突破性的发展, 其基础理论涉及到数字信号处理、泛函分析、傅里叶变换等多个方面。框架理论是小波分析的一个重要内容, 随着小波分析的快速发展, 框架理论逐渐成为研究的热点。本文对近年来的框架理论在信号与图像处理中的应用的文献进行了分类与总结, 对框架概

\*通讯作者。

念、基本性质、框架边界、偶框架的计算以及应用进行了概述, 最后做出了总结。

## 关键词

框架理论, 图像处理, 紧框架, 信号重构

Copyright © 2019 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

小波分析已用于多个领域, 如信号处理, 图像分析等方面, 而框架理论是小波分析的一个重要工具。框架理论最初是由 Duffin 和 Schaffcf 在 1952 年研究非调和 Fourier 级数时提出来的, 在最开始提出的时候, 框架并没有广泛地引起其他学者的研究兴趣。直到 1986 年, Daubechies、Grossmann 和 Meyer 对框架理论有了突破性的研究, 至此框架理论才开始吸引了大批学者的关注。近些年来, 在框架理论的研究过程中, 用到了算子理论以及 Banach 空间理论。直到 D. R. I. Arson、Deguang Han 和 Xingde Dai 等人把算子代数理论运用到框架的研究中, 框架理论研究才更上了一个层次, 并从整体上把握和研究了框架和基的性质[1]。至此, 结合了算子理论的框架理论快速发展, 其性质以及应用得到更加广泛地研究与推广。

### 1.1. 框架与 Bessel 序列的关系

框架是一类特殊的 Bessel 序列, 以下是 Bessel 序列的定义[1]:

设  $H$  是一个复的可分 Hilbert 空间。  $\{\varphi_i\}_{i \in Z} \subseteq H$ ,  $\exists B \subseteq Z$ , 使得  $\forall f \subseteq H$  都有:

$$\sum_{j \in Z} |\langle f, \varphi_j \rangle|^2 \leq B \|f\|_H^2 \quad (1)$$

则称  $\{\varphi_i\}_{i \in Z}$  是  $H$  的一个 Bessel 序列, 将  $B$  称为  $\{\varphi_i\}_{i \in Z}$  的 Bessel 界。

若  $\{\varphi_i\}_{i \in Z} \subseteq H$ ,  $\exists B, A \subseteq Z$ ,  $\forall f \subseteq H$  都有

$$A \|f\|_H^2 \leq \sum_{j \in Z} |\langle f, \varphi_j \rangle|^2 \leq B \|f\|_H^2 \quad (2)$$

则称  $\{\varphi_i\}_{i \in Z}$  为  $H$  中的框架。其中  $A, B$  分别为框架的下界和上界。将最  $B$  小值和  $A$  最大值称为最优界。如果当  $A = B$  时,  $\{\varphi_i\}_{i \in Z}$  称之为紧框架。

### 1.2. 框架与基的关系

设  $\{f_j\}_{j \in Z}$  是 Hilbert 空间的一组列元素,  $\exists \{c_j\}_{j \in Z} \in l^2(Z)$ , 且  $\{c_j\}_{j \in Z}$  唯一, 使得

$$f = \sum_{j \in Z} c_j f_j, \forall f \in H \quad (3)$$

称  $\{f_j\}_{j \in Z}$  是  $H$  的一组基, 若  $\|f_j\| = 1$ , 且

$$\begin{cases} \langle f_i, f_k \rangle = 1, i = k \\ \langle f_i, f_k \rangle = 0, i \neq k \end{cases} \quad (4)$$

称  $\{f_j\}_{j \in Z}$  是  $H$  的一组正规正交基。

当  $A = B = 1$  时, 即  $\forall j \in Z, \exists \|\varphi_j\| = 1$ ,  $\{\varphi_j\}_{j \in Z}$  构成了一组规范正交基。

若  $A = B > 0$ ,  $\forall j \in Z, \exists \|\varphi_j\| = \sqrt{A}$ ,  $\left\{\frac{\varphi_j}{\sqrt{A}}\right\}_{j \in Z}$  构成一组规范正交基。

所以说规范正交基是一种特殊的紧框架, 而框架不一定是规范正交基。

### 1.3. 框架的冗余性

框架具有一个极其重要的特性, 就是冗余性。在复的可分的 Hilbert 空间中, 正交基是一定存在的, 它可以用来表示在 Hilbert 中的任意一个信号, 且表示方法是唯一的。由于正交基是一组线性无关的数据, 正交基是不具有冗余性。用正交基来传输信号, 假使在传输的过程中, 正交基受到随机噪声的影响或其他原因丢失了其中的几组数据, 那么在这种情况下, 信号就无法恢复出来。因为框架是一组线性相关的向量, 它具有冗余性, 在数据丢失的情况下, 就有可能将信号恢复出来。

设  $\{\varphi_j\}_{j \in Z}$  是  $H$  中的一个框架, 则  $\{\varphi_j\}_{j \in Z}$  是冗余框架的充要条件是: 存在  $k_0 \in Z$ , 使得  $\varphi_{k_0} = \sum_{j \in Z, j \neq k_0} \lambda_j \varphi_j$ , 其中  $\lambda_j \in C$ 。而重构信号  $f \approx \sum_{j \in Z} \langle f, \varphi_j \rangle \tilde{\varphi}_j$ ,  $\tilde{\varphi}_j$  为  $\varphi_j$  的对偶框架。

### 1.4. 对偶框架

框架算子  $S$  定义[2]:

$$Sf = \frac{2}{A+B} \sum_{j \in Z} \langle f, \varphi_j \rangle \varphi_j \quad (5)$$

设  $\{\varphi_j\}_{j \in Z} \in F$  且以  $A, B$  为界, 将算子  $S^{-1} = (U^*U)^{-1}$  作用于  $\{\varphi_j\}_{j \in Z}$ , 称  $\{S^{-1}\varphi_j\}_{j \in Z}$  为  $\{\varphi_j\}_{j \in Z}$  的典则对偶框架[1]。

设  $\{f_j\}_{j \in Z}, \{g_j\}_{j \in Z}$  是  $H$  的两个框架, 若  $\forall f \in H$ , 都有  $f = \sum_{j \in Z} \langle f, f_j \rangle g_j$ , 则也必有  $f = \sum_{j \in Z} \langle f, g_j \rangle f_j$ ,  $\forall f \in H$ 。

称两个框架  $\{f_j\}_{j \in Z}, \{g_j\}_{j \in Z}$  互为交替对偶框架。

框架的结构灵活性, 冗余性以及重建稳定性, 使得框架被应用到许多工程中, 像图像处理, 信号重构, 压缩感知, 语音编码以及其他方面。目前对偶框架则主要应用于信号处理, 尤其在信号重构方面。

## 2. 框架在图像处理中的应用

### 2.1. 图像去噪

噪声是影响图像质量的一个重要因素, 在数据传输以及接受的过程中, 噪声极易对数据产生影响, 导致图像的某些特征细节无法识别, 信噪比降低, 因此图像去噪是图像处理中的一个重要问题。

2006年 Lixin Shen、Manos Papadakis 等人提出了一种构造提升框架的方法, 即通过对原有的滤波器进行修改, 构造了新结构的 Parseval 框架滤波器, 应用数学理论从分段线性样条紧框架的张量乘积中设计出不可分离的 Parseval 框架。新构成的框架系统包含了加权平均算子、Sobel 算子和相位为  $k45^\circ, k \in Z$  的 Laplacian 算子。基于新的 Parseval 框架的系统特性, 提出了一种新的图像去噪算法。并通过实验演示了新算法在一组不同的图像上的性能, 实验证明, 基于 Parseval 框架上的图像去噪方法去噪效果更好, 相比与一般去噪方法, 具有较少的振铃伪影和更好的 PSNR [3]。

目前研究的对图像产生污染的噪声大多都是高斯白噪声, 但通过天文成像、计算 x 射线成像(cR)、荧光共焦显微成像等获取到的图像一般会受到量子噪声的污染, 而量子噪声往往服从泊松分布。而其中针对服从泊松噪声的处理, 都是应用于灰色图像, 在彩色图像去噪方面, 还很少有人研究。

2017年高涛, 何秀丽提出了一种基于小波紧框架的彩色图像泊松去噪模型。该模型实质上是由保真项和正则项构成的最小凸问题。泊松噪声基于泊松噪声的概率密度函数特征, 将赋权的二范数项作为保真项, 在正则项中引入小波紧框架, 从而获得更好的图像边缘细节处理效果。针对泊松去噪模型的重新赋权问题, 又提出 split Bregman 算法, 并通过实验表明, 使用 split Bregman 算法在彩色图像去噪方面的具有一定的实用性[4]。

## 2.2. 图像恢复

图像恢复是图像处理和分析领域的一个重要领域, 其目的在于提高图像采集中带噪声图像的质量, 以恢复原始图像的关键细节。在图像恢复的过程中, 假设在一定的系统中, 底层图像都具有良好的稀疏逼近。而小波紧框架系统已经被证明了是一种有效的稀疏逼近分段光滑图像的系统。因此, 小波紧框架变换在图像恢复问题中应用十分广泛。然而, 需要处理的图像是多种多样的, 并没有一个静态的小波紧框架系统能够很好地处理恢复它们。

在许多图像恢复任务中, 寻找给定图像的稀疏逼近具有重要的意义。小波紧框架可以利用小波紧框架下的稀疏性来成功地恢复图像。

此外, 在图像传输以及处理的过程中, 脉冲噪声和高斯白噪声是比较常见的噪声类型, 而传统的图像恢复模型具有很强的随机性, 不能有效地去除脉冲噪声。因此, 现阶段的去噪图像的脉冲噪声模型还需要有很大的改进。

2008年 Jing Fang Cai 提到图像通常在由过采样离散余弦或傅里叶变换导出的紧框架系统中具有稀疏近似性。并根据这种稀疏近似性提出了一种紧框架域的图像去模糊方法, 其实质上是系数为矩阵形式的线性方程组的稀疏解。数值算例表明, 该方法实现简单, 对噪声有较强的鲁棒性, 对图像有着较好的去模糊效果[5]。

2010年 Javier Portilla 提出了一种基于  $l_0$ -analysis 的稀疏性反褶积方法, 对模型参数具有较强的鲁棒性, 并将其转化成了一个用于图像处理的有效算法。目前基于稀疏优化的反褶积方法中大多数采用  $l_1$ -SBS 方法, 只有少数是  $l_0$ -SBS, 而 ABS 方法更是多被用于其他图像处理任务如: 修复、超分辨率或图像形态分解, 从未应用于图像反褶积。但是在一般框架表示的情况下  $l_0$ -ABS 方法却表明了分析系数具有可压缩性。因此将分析系数建模为一个严格的稀疏向量加上一个高斯修正项, 在处理含噪图像时, 图像密度并没有发生退化, 同时提出了一种  $l_0$ -SbS 方法, 实验表明该方法的图像处理性能十分优越[6]。

2011年 Jian Feng Cai 分析了一类基于框架的随机样本数据恢复方法的误差, 并且估计了底层原始数据与近似解之间的误差。从部分样本中恢复缺失数据不仅是一个基本的数学问题, 同时也在图像和信号处理中有着广泛的应用。近年来发展了许多研究数据恢复的算法, 但很少有关于估计它们的误差方法。提出的误差估计方法实现了根据噪声水平对给定的数据进行插值(或与误差界近似), 一般来说, 给定的数据都具有规范框架系数的最小  $l_1$  范数[7]。

2012年 Nelly Pustelnik、Jean Christophe Pesquet 等人提出一种求解涉及框架表示的图像反褶积问题的凸向优化方法。针对目前大多数基于框架的变分方法都具有 Lipschitz 可微性或紧表示性的此种情况, 使用一种特定类别的框架来松弛紧框架, 放宽条件, 有利于广泛的图像恢复问题的解决。提出的算法可以同时解决不同噪声分布下的框架分析和框架综合问题, 并应用(非紧)离散对偶树小波表示对泊松噪声破坏的数据进行恢复, 证实了此算法的有效性[8]。

2014年 Jian Feng Cai 提出了一种迭代数值格式来构造适合于给定图像的离散紧框架的方法。与现有的大多数方法不同, 在每一次迭代过程中, 构建的字典始终是一个严密的框架。因此, 所提出的方法计算效率很高。此外, 所构造的紧框架比过完备的字典更适用于许多图像处理的应用, 其重建效果较好。在此基础上, 推导出的自适应紧框架去噪方法与传统的小波阈值法相比, 具有明显的优越性。之后, 还将进一步研究如何利用其他因素, 如模糊化等, 来构造自适应紧框架[9]。

2015年 Jin Wang 在文中提出了一种从输入多通道图像构造数据驱动紧框架的方法, 为每个信道构造了一个离散的紧框架系统, 并假定它们的稀疏系数具有联合稀疏性。将多通道数据驱动的紧框架构造方案应用于彩色和深度图像的联合重建。实验结果表明, 该方法比目前最先进的彩色和深度图像重建方法具有更好的性能[10]。

2017年杜淋, 王聪在基于数据驱动紧框架的图像恢复提出了一种基于数据驱动紧框架的变分模型, 用于含有高斯脉冲混合噪声的图像恢复。该模型由包含  $l_1-l_2$  范数的拟合项和包含  $l_1$  范数的光滑项构成, 并使用了增广拉格朗日法-加速近端梯度 ALM-APG 算法用于解该模型。实验所表明文中所提出的模型与算法能够有效地进行图像恢复并且具有一定的实用性[11]。

2018年 Wen Liang Hwang、Ping Tzan Huang 等人探究了一种对偶框架的设计, 其中通过信号分解得到的稀疏向量也是使用了重构框架的信号的稀疏解。尽管最终的研究结果表明, 对于过完全的框架来说, 这种对偶框架并不存在, 但用典则对偶框架的分析系数可以得到稀疏合成解的最佳逼近。之后又利用了从框架的角度分析和综合信号表示的观点, 针对与图像恢复有关的问题提出了优化公式, 然后对使用不同的框架边界的解的性能进行比较。结果显示了恢复图像与字典的框架界之间的相关性, 从而说明了在不同的应用中使用不同字典的重要性[12]。

2018年 Dongmei Ma 等人提出了一种基于数据驱动紧框架的变分模型, 在高斯噪声和脉冲噪声混合的情况下, 从观测图像中恢复原始图像。先将数据驱动的紧框架作为微分算子嵌入变分模型中。其次, 采用增广拉格朗日法-加速近端梯度(ALM-APG)算法得到了变分模型的精确解。结果表明 ALM-APG 算法具有计算复杂度低、收敛速度快等优点。基于数据驱动紧帧的变分模型能够有效地去除图像中的混合高斯噪声和脉冲噪声, 比其他图像恢复模型具有更好的图像恢复效果, PSNR 提高了至少 10%, 且算法的峰值信噪比值也较高[13]。

2018年董卫东、彭宏京提出了一种基于紧框架域的全广义变分图像修复模型, 这种模型与传统的小波修复相比, 其紧凑的框架系统具有冗余性、时移不变性和线性相位等优点, 非常适用于图像处理。新模型通过引入了多级紧框架分解系数的低阶和高阶导数, 获取图像不同尺度多方向上的特征信息来对图像进行约束。模型的数值实现采用了分裂技术和原始对偶算法(PDSBA)相结合的优化算法, 通过交替迭代解决了两个简单子问题。新模型不仅可以减少阶梯效应, 产生图像边缘, 而且可以恢复细节和纹理信息丰富的图像。实验结果表明, 新模型的峰值信噪比(PSNR)、均方误差(MAE)和结构相似性指数(SSIM)的三项恢复性能均有显著改善[14]。

### 3. 框架在信号重构中的应用

#### 3.1. 压缩感知

由于传统的信号处理方法一般基于香农采样定理, 主要从提高采样频率或限制信号带宽这两个方面来进行信号研究。在处理过程中, 需先将信号进行高速采样然后再压缩进行储存, 这个采样再压缩的过程浪费了大量的采样资源[15]。在一般情况下的多维数据集是高度冗余的, 并且在低维流形或子空间上存在。基于这一理论, 新的信号处理方法得到快速发展, 并在管理传感、成像、存储等方面均取得了相当大的进展。收集到的高维数据可以用适当的有限框架来稀疏表示。针对香农采样定理存在的资源浪费问

题, 以及有限框架稀疏表示, 提出并推动了压缩感知理论的发展, 这表明高维度数据集通常可以通过少量的测量数据以高保真度的方式重建[16]。

2006年 D. L. Donoho 提出了压缩感知的概念。假设信号在某个变换域是稀疏的, 那么仅需对信号进行少量采样, 即可通过求解一个优化问题而高概率重建原始信号[17]。信号重构是压缩感知理论的核心问题之一, 贪婪算法是压缩感知信号处理中的重要工具之一。

稀疏框架的压缩感知比正交基的压缩感知具有更加广阔的压缩范围。在有稀疏框架的压缩感知的情况下, 所使用的重构信号的方法叫做  $l_1$ -analysis。

2012年 Yulong Liu 等人分析了在较弱的恢复条件下  $l_1$ -analysis 这种重构方法的性能。同时将  $l_1$ -analysis 分析方法推广到更为一般的情形, 即将任意的矩阵对偶框架作为分析算子, 称为基于  $l_1$ -analysis 的一般对偶框架。还提出了一种迭代算法, 适当选择参数, 便具有计算速度快, 易于编码的特点, 用于求解基于  $l_1$ -analysis 的最优对偶框架。实验表明在信号稀疏的情况下, 基于  $l_1$ -analysis 的最优对偶框架比一般对偶框架具有更好恢复信号的性能[18]。

2012年 Wei Chen 等人用规范紧框架来改善压缩感知应用中平均均方误差的性能。通过仿真结果表明, 在基于 BPDN、Dantzig 选择器和 OMP 的稀疏恢复的情况下, 以规范紧框架为基础的感知矩阵的 MSE 优于其他标准的感知矩阵设计的 MSE。从优化的方面看, 在压缩感知应用中使用规范紧框架改善了其最小均方误差的性能, 当规范紧框架与标准稀疏恢复算法结合使用时, MCE 将会得到显著改善[19]。

2013年 Xiaoya Zhang、Song Li 分析了在基于  $l_1$ -analysis 模型上建立的对偶框架对于信号重构的作用。并通过对傅里叶的一些引理的推广, 以及借助了对偶框架的参数化表示, 验证得出了具有最优观测值的 weibull 随机矩阵, 这种矩阵可以确保高概率信号的准确恢复, 但其所有的验证结果都是在一般框架下, 信号都具有可压缩性的这种情况下进行讨论[20]。

2014年杨家红, 刘元元等人针对之前采用的贪婪算法计算复杂度高, 重建精度低这个问题, 提出了一种新的融合框架, 并在此融合框架下将 OMP 算法和 CoSaMP 算法进行融合, 进而提出了一种新的算法, 称之为 FMP 算法。在实验中分别采用 FMP、OMP 及 CoSaMP 算法对图像进行处理, 并从可视化结果、信噪比和误差率三个角度来对比三种算法对图像的处理效果。最终证明, 在融合框架下的 FMP 算法的在仿真过程中的峰值信噪比最高, 误差最低, 重构效果最好。在采样率低的时候, 基于此融合框架 FMP 算法处理效果比较好, 但在采样率比较高时, FMP 算法的优势并不明显[15]。

2013年 Waheed U. Bajwa, Ali Pezeshk 提出有限框架在信号稀疏表示和压缩感知方法的设计和分析中起着核心作用。并在压缩感知情况下, 从估计、恢复、检测支持、回归和稀疏信号检测这几个方面强调了有限框架的重要性。并提出具有小谱范数和、较小的最坏情况相干性、平均相干、和相干的框架是非常适合于稀疏信号的测量[16]。

2016年 Yunsong Liu、Zhifang Zhan 等人提出了一种投影迭代软阈值算法, 并产生一种加速该算法的 pFISTA 方法, 解决了压缩传感磁共振成像中的稀疏图像重建问题。实验的数值结果表明, 对综合稀疏模型, pFISTA 方法相比于 pISTA 实现了更好的信号重构。对近似分析稀疏模型, pFISA 收敛速度更快或可与最先进的 SFISTA 相媲美。pFISTA 的重建误差对附加的算法参数不敏感, 使得其在 MRI 图像重建中可以广泛使用不同的紧框架。之后还会进一步分析一般框架下 pFISTA 的收敛性, 并且还应该在尽可能多的 CS-MRI 应用中测试其他稀疏表示系统[21]。

基于全变差最小化的压缩感知图像的恢复方法, 往往会出现纹理和细节信息的丢失, 以及阶梯伪影的污染的问题。2018年张晶提出了一种基于紧框架小波的协同稀疏性和全变分的新算法, 并构造了包含紧框架小波的  $l_0$  范数和总变差的  $l_1$  范数的非光滑能量函数, 用来刻画图像的先验性。通过构造辅助函数以及运用增广拉格朗日的方法, 将约束的能量泛函数优化问题转化为无约束混合函数最小检验问题。并采

用阈值收缩法和最陡下降法交替求出由目标函数导出的三个子问题的解。实验证明, 与其他压缩感知图像复原算法的仿真实验相比, 基于紧框架小波的协同稀疏性和全变分的算法显示了其图像恢复性能的优越性, 能够很好的保留纹理, 结构, 细节, 以及边缘等图像的重要信息。因此, 新算法的提出有助于基于压缩感知的图像复原技术的进一步研究[22]。

### 3.2. 信号重构

香农采样定理可以重建均匀采样的信号, 但要是信号的采样区间分布不均匀, 重构情况就复杂很多。2002年刘立翔等人讨论了框架在  $H$  空间中的重要特征, 利用框架理论对信号进行重建, 提出了一种迭代算法, 并将此迭代算法用于非均匀采样信号的重建问题。仿真的实验结果表明, 对一正弦复合信号进行处理, 通过对它的非均匀采样重构, 此算法对非均匀采样信号的重构是有效的。但是还有一些误差, 其主要误差是出现在信号的极点附近, 这主要是因为非均匀采样的原因[2]。

2013年 Markus Haltmeier 提到可以基于  $l_1$ -analysis 最小化方法来实现在合适框架或者字典下的无噪信号分析系数的稀疏性。但是基于  $l_1$ -analysis 最小化的处理方法, 信号稳定恢复的条件是所用到的框架是一个正交的基。但这恰恰与实际相互不符, 因为在实际应用中, 冗余框架的性能通常比正交基强。针对上述存在的问题, 又提出以非紧框架为基础的  $l_1$ -analysis 最小化方法, 通过实验证明, 其信号恢复结果较为稳定[23]。

在信号的传输过程中, 一些编码数据的系数会不可避免地会丢失。如何提高通信系统对数据丢失的鲁棒性是当前研究的一个重要课题。随着框架理论不断发展, 在现代通信系统中, 框架的冗余扩展得到了广泛的应用。因此可以选择更好的框架来进行解码, 以尽量减少因数据丢失而产生的误差。然而, 由于应用程序中的一些物理因素限制, 进行编码的框架一般是不规则的。

2016年 Qianping Guo、Jingsong Leng 等人采用最优对偶框架来处理信号, 当框架系数在传输的过程中发生丢失时, 可以减少信号重建过程中产生的误差。同时也提出了一种基于 MOD 算法可以自适应地搜索最优对偶框架的算法, 以及当框架系数发生丢失时重构信号的方法。通过实验表明, 新提出的方法比现有的随机信号处理方法具有更好的性能[24]。

2017年 Souhir Bouselmi、Kais Ouni 主要研究了紧框架包变换 TFPT 在失真意义下的语音信号重建稳定性, 并且与经典小波变换对信号的重建稳定作比较。将从 TIMIT 语音库中提取到的语音信号, 在 8 kHz 频率下进行二次采样, 并将其划分为 256 个样本块进行仿真传输, 分别采用经典小波变换以及紧框架包变换在其失真的情况下进行信号重建, 并同时采用归一化均方根误差、峰值信噪比、分段信噪比、频率加权分段信噪比对信号的失真进行评估。实验结果表明, 新型紧框架包变换比小波包变换具有更好的重构稳定性, 而且这种新的紧框架包变换非常适用于低比特的语音编码[25]。

## 4. 框架在语音编码中的应用

小波框架是小波分析理论的一个推广, 而近年来小波分析在信号处理和应用数学方面应用十分广泛。与小波基相比, 小波框架有着更好的时频定位, 重构的平稳性, 短支撑和对称性。

2011年 Souhir Bouselmi、Kais Ouni 等人主要讨论了小波紧框架在语音编码中的应用以及其性能的评估。并从归一化均方根误差 NRMSE, 频率加权分段信号与噪声的比率, 分段信号与噪声的比率, 峰值信号与噪声的比率这几个方面进行性能评估。最终通过实验结果证明, 在语音编码中使用小波紧框架显著地提升了信号编码的质量[26]。

## 5. 框架在医学和通信中的应用

分割一个是在图像中识别物体轮廓的过程, 现如今有很多有效的分割算法, 如基于模型的分割方法、

模式识别技术、等基于跟踪的方法, 基于人工智能的方法, 基于紧框架的分割算法应用十分广泛。

2011年 XiaoHao Cai 提出将紧框架方法应用于医学成像中的管状结构的自动识别, 并初步应用于磁共振血管成像的血管分割, 提出的方法迭代地细化了一个覆盖了容器的潜在边界的区域。在每一次迭代中, 采用紧框架算法对势边界进行去噪和平滑, 并对区域进行锐化。该方法每次迭代的成本与图像中的像素数成正比, 并证明了迭代在有限的步骤内收敛到一幅二值图像。因此可以直接对血管进行分割, 对合成和真实二维/三维图像的数值表明, 与一些有代表性的分割方法相比, 基于紧框架的方法具有更高的分割精度[27]。

2018年 A. Thompson 构造了一种极稀疏的、近等角的紧框架, 稀疏近等角框架应用于自组织无线网络中的全双工通信。实验表明它们优于同样数量的专栏和稀疏的 Steiner ETF, 即它们相关联的矩阵向量积可以作为快速变换来实现[28]。

## 6. 结论

本文对框架, 紧框架, 对偶框架以及框架的边界作了简单的概括。并分别对框架在图像处理, 信号重构, 语音编码, 无线通信网络, 医学成像这几个方面进行了介绍, 并对他们的应用方面进行了总结。并讨论了他们提出的新的框架方法在其应用领域方面的改善以及不足之处。

近些年来, 框架理论的应用越来越广泛。小波框架的快速发展, 使得框架理论成为研究的热点。通过总结归纳近年来关于框架理论应用的文献, 不难发现, 框架更多用于信号重构以及图像处理等方面。因为框架本身所具有的重要特性, 即框架具有冗余性, 使得框架在修复图像, 重构信号等方面的效果格外明显。目前框架理论还处于一个新兴阶段, 大多框架理论都是应用于图像处理方面, 用于语音处理方面的就相对较少, 因此框架理论还有很大的潜力值得去发掘。

## 基金项目

国家自然科学基金青年项目(41804110)。

## 参考文献

- [1] 郭晓璇. 框架及其在信号处理中的应用[D]: [硕士学位论文]. 西安: 陕西师范大学, 2007.
- [2] 刘立祥, 谢剑英, 王明中. 利用框架理论对信号进行重建[J]. 通信技术, 2002(4): 1-2.
- [3] Lixin, S., Papadakis, M., Kakadiaris, I., et al. (2006) Image Denoising Using a Tight Frame. *IEEE Transactions on Image Processing*, **15**, 1263. <https://doi.org/10.1109/TIP.2005.864240>
- [4] 高涛, 何秀丽. 小波框架方法的彩色图像泊松去噪[J]. 信息技术, 2017(5): 162-165.
- [5] Cai, J.F., Osher, S. and Shen Z. (2008) Linearized Bregman Iterations for Frame-Based Image Deblurring. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, **2**, 226-252. <https://doi.org/10.1137/080733371>
- [6] Portilla. (2010) Image Restoration through l0 Analysis-Based Sparse Optimization in Tight Frames. *16th IEEE International Conference on Image Processing*, Cairo, 7-10 November 2009.
- [7] Cai, J.F., Shen, Z. and Ye, G.B. (2011) Approximation of Frame Based Missing Data Recovery. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, **31**, 185-204. <https://doi.org/10.1016/j.acha.2010.11.007>
- [8] Pustelnik, N., Pesquet, J.C. and Chaux, C. (2012) Proximal Methods for Image Restoration Using a Class of Non-Tight Frame Representations. *18th European Signal Processing Conference*, Aalborg, 23-27 August 2010.
- [9] Cai, J.F., Ji, H., Shen, Z. and Ye, G.B. (2014) Data-Driven Tight Frame Construction and Image Denoising. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, **37**, 89-105. <https://doi.org/10.1016/j.acha.2013.10.001>
- [10] Wang, J. and Cai, J. (2015) Data-Driven Tight Frame for Multi-Channel Images and Its Application to Joint Color-Depth Image Reconstruction. *Journal of the Operations Research Society of China*, **3**, 99-115. <https://doi.org/10.1007/s40305-015-0074-2>
- [11] 杜淋, 王聪. 基于数据驱动紧框架的图像恢复[J]. 电子设计工程, 2017(22): 184-187, 191.



- [12] Hwang, W.L., Huang, P.T. and Jong, T.L. (2018) Frame-Based Sparse Analysis and Synthesis Signal Representations and Parseval K-SVD. arXiv:1801.01959 [eess.SP]
- [13] Dongmei, M. and Cong, W. (2018) Removal of Mixed Gaussian and Impulse Noise Using Data-driven Tight Frames. *Journal of Engineering Science and Technology Review*, **11**, 26-31. <https://doi.org/10.25103/jestr.112.05>
- [14] 董卫东, 彭宏京. 基于紧框架的二阶总广义变分图像修复模型[J]. 计算机工程与应用, 2018, 54(11): 178.
- [15] 杨家红, 刘元元, 单晋婷, 等. 应用融合框架的压缩感知信号重构方法[J]. 小型微型计算机系统, 2014, 35(8): 1885-1890.
- [16] Bajwa, W.U. and Pezeshki, A. (2013) Finite Frames for Sparse Signal Processing. Finite Frames. Birkhäuser, Boston. [https://doi.org/10.1007/978-0-8176-8373-3\\_9](https://doi.org/10.1007/978-0-8176-8373-3_9)
- [17] Donoho, D.L. (2006) Compressed Sensing. *IEEE Transactions on Information Theory*, **52**, 1289-1306. <https://doi.org/10.1109/TIT.2006.871582>
- [18] Liu, Y., Mi, T. and Li, S. (2012) Compressed Sensing with General Frames via Optimal-Dual-Based-Analysis. *IEEE Transactions on Information Theory*, **58**, 4201-4214. <https://doi.org/10.1109/TIT.2012.2191612>
- [19] Chen, W., Rodrigues, M.R.D. and Wassell, I.J. (2012) On the Use of Unit-Norm Tight Frames to Improve the Average MSE Performance in Compressive Sensing Applications. *IEEE Signal Processing Letters*, **19**, 8-11. <https://doi.org/10.1109/LSP.2011.2173675>
- [20] Zhang, X. and Song, L. (2013) Compressed Sensing via Dual Frame Based-Analysis with Weibull Matrices. *IEEE Signal Processing Letters*, **20**, 265-268. <https://doi.org/10.1109/LSP.2013.2242060>
- [21] Liu, Y., Zhan, Z., Cai, J., et al. (2016) Projected Iterative Soft-Thresholding Algorithm for Tight Frames in Compressed Sensing Magnetic Resonance Imaging. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, **35**, 2130-2140. <https://doi.org/10.1109/TMI.2016.2550080>
- [22] 张晶, 马瑾, 邵晨, 桂志国, 张权, 杨婕. 紧框架小波与全变分协同稀疏的压缩感知图像复原[J]. 山西大学学报(自然科学版), 2018, 41(3): 499-510.
- [23] Haltmeier, M. (2013) Stable Signal Reconstruction via  $l^1$ -Minimization in Redundant, Non-Tight Frames. *IEEE Transactions on Signal Processing*, **61**, 420-426. <https://doi.org/10.1109/TSP.2012.2222396>
- [24] Guo, Q., Leng, J., Han, D., et al. (2016) Adaptive Optimal Dual Frames for Signal Reconstruction with Erasures. *IEEE Access*, **4**, 7577-7584. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2016.2613549>
- [25] Souhir, B. and Kais, O. (2017) Study on Speech Reconstruction Stability Using Tight Framelet Packet Transform. *14th International Multi-Conference on Systems, Signals & Devices*, Marrakech, Morocco, 601-605.
- [26] Bousselmi, S. and Ouni, K. (2011) Performance Evaluation of the Symmetric Tight Wavelet Frame in Speech Coding. *8th International Multi-conference on Systems, Signals & Devices*, Sousse, Tunisia, 1-5.
- [27] Cai, X., Chan, R., Morigi, S. and Sgallari, F. (2011) Vessel Segmentation in Medical Imaging Using a Tight-Frame-Based Algorithm. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, **6**, 464-486. <https://doi.org/10.1137/110843472>
- [28] Thompson, A. and Calderbank, R. (2018) Sparse Near-Equiangular Tight Frames with Applications in Full Duplex Wireless Communication. *IEEE Global Conference on Signal and Information Processing*, Montreal, 14-16 November 2017, 868-872.

知网检索的两种方式:

1. 打开知网页面 <http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD>  
下拉列表框选择: [ISSN], 输入期刊 ISSN: 2161-8801, 即可查询
2. 打开知网首页 <http://cnki.net/>  
左侧“国际文献总库”进入, 输入文章标题, 即可查询

投稿请点击: <http://www.hanspub.org/Submission.aspx>  
期刊邮箱: [csa@hanspub.org](mailto:csa@hanspub.org)