

基于改进的近似 l_0 范数的稀疏信号重构算法

张慧萍, 张连娜, 李荣鹏, 宋学力*

长安大学理学院, 陕西 西安
Email: *1776262460@qq.com

收稿日期: 2021年7月28日; 录用日期: 2021年8月24日; 发布日期: 2021年8月31日

摘要

稀疏信号重构算法是压缩感知的关键。基于近似 l_0 范数的稀疏信号重构可以通过选取一个光滑函数近似 l_0 范数, 从而将 l_0 范数最小化问题转化为光滑函数的优化问题。为了提高压缩感知中稀疏信号重构的精度, 本文提出了一种基于改进的近似 l_0 范数的稀疏信号重构算法。该算法首先利用一种改进的光滑函数来近似 l_0 范数; 其次利用外点罚函数法和共轭梯度法求解基于该光滑函数的优化问题的稀疏解; 最后进行了多项实验来验证所提出算法的有效性。实验结果表明: 相比于光滑 l_0 算法、基追踪算法和非凸复合稀疏基算法, 本文所提算法在重构误差、信噪比和恢复成功率等方面更具优越性。

关键词

压缩感知, 信号重构, 近似 l_0 范数, 共轭梯度法

A Sparse Signal Reconstruction Algorithm Based on Improved Approximate l_0 Norm

Huiping Zhang, Lianna Zhang, Rongpeng Li, Xueli Song*

School of Science, Chang'an University, Xi'an Shaanxi
Email: *1776262460@qq.com

Received: Jul. 28th, 2021; accepted: Aug. 24th, 2021; published: Aug. 31st, 2021

Abstract

The sparse signal reconstruction algorithm is the key to compressive sensing. The sparse signal reconstruction based on approximate l_0 norm can be achieved by choosing a smooth function to approximate l_0 norm, thus the minimization problem of l_0 norm is transformed into an optimization problem.

*通讯作者。

文章引用: 张慧萍, 张连娜, 李荣鹏, 宋学力. 基于改进的近似 l_0 范数的稀疏信号重构算法[J]. 计算机科学与应用, 2021, 11(8): 2179-2189. DOI: 10.12677/csa.2021.118223

tion problem of a smooth function. To improve the accuracy of the sparse signal reconstruction in compressive sensing, a sparse signal reconstruction algorithm based on an improved approximate l_0 norm is proposed in this paper. Firstly, a smooth function is proposed to approximate l_0 norm. Then, the sparse solution of this optimization problem that based on the smooth function is solved by exterior point penalty function method and conjugate gradient method. Finally, a number of experiments are carried out to verify the performance of the proposed algorithm. The experimental results show that the proposed algorithm is more superior in reconstruction error, signal-to-noise ratio and recovery success rate compared with smoothed l_0 algorithm, the basis pursuit algorithm and the non-convex composite sparse bases algorithm.

Keywords

Compressive Sensing, Signal Reconstruction, Approximate l_0 Norm, Conjugate Gradient Method

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

传统的数据采集需要满足奈奎斯特采样定理，即为了不失真的恢复信号，采样频率必须大于信号最高带宽的两倍。但在这一理论指导下所获得的信息是冗余的，极大的影响了信息领域的发展。压缩感知 (Compressive Sensing, CS) [1] 是一种新型的信号采集与重构理论，它可通过远低于奈奎斯特标准的方式进行数据采样，并仍能够精确地恢复稀疏信号。该理论提出后，在阵列信号处理[2]、医学影像[3]和雷达探测[4]等领域受到高度关注，展现出了巨大的应用价值。压缩感知理论主要包括三部分：信号的稀疏表示、测量矩阵的设计和稀疏信号重构。其中，稀疏信号重构是指从较少的测量值中精确地恢复原始信号，是 CS 理论中最重要的一部分。信号的重构精度主要取决于重构算法的性能，设计高效的重构算法是提高稀疏信号重构精度的关键。因此，稀疏信号重构算法具有重要的研究意义。

从数学的角度来看，通常使用以下最小化方法对稀疏信号重构问题进行建模[5]：

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \|x\|_0 \quad \text{s.t. } Ax = b \quad (1)$$

其中 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ($m < n$) 是感知矩阵， $b \in \mathbb{R}^m$ 是测量向量， $x \in \mathbb{R}^n$ 是未知的稀疏向量， $\|x\|_0$ 是实向量 x 的零范数。

然而，由于 l_0 范数的不连续性，使得基于 l_0 范数的重构模型的直接求解是 NP (Non-deterministic Polynomial) 难的[6]，其计算量会随稀疏向量维数的增加而增大，且模型的抗噪能力较差。为此学者们提出了很多方法对最小化 l_0 范数进行近似求解，如贪婪方法、凸松弛方法和非凸松弛方法等。贪婪算法通过选择与信号重构残差最匹配的原子进行信号重构，传统的贪婪算法有正交匹配追踪算法[7]、广义正交匹配追踪算法[8]和子空间追踪算法[9]等，这类算法重构理论简单、计算速度较快，但重构精度较低，需要更多观测值。凸松弛方法将最小化 l_0 范数转化为最小化 l_1 范数，其中典型的算法有基追踪算法[10]、迭代阈值算法[11]和梯度投影法[12]等，这类算法重构精度较高、所需测量值较少，但计算复杂度较高，不适合求解大规模问题。因此这两类算法应用范围有限。

近年来，利用非凸松弛方法近似求解 l_0 范数受到了广泛关注。常见的非凸松弛方法使用 l_p 范数、高斯类函数或分式类函数近似 l_0 范数，其中高斯类函数是一种最常见的近似函数。最早 Mohimani 等人提出

了光滑 l_0 (Smoothed l_0 norm, SL0)算法[13], 该算法利用标准高斯函数近似 l_0 范数, 并结合最速下降法寻求最优解; 随后林婉娟等人提出了利用双曲正切函数和修正牛顿法的牛顿光滑 l_0 (Newton Smoothed l_0 norm, NSLO)算法[14]; 张巍等人通过引入近似双曲正切函数和混合优化方法提出了近似阻尼牛顿光滑 l_0 (Almost-Hybrid Newton Smoothed l_0 norm, A-HNSLO)算法[15]; 2020年, 周洁容等人提出的非凸复合稀疏基(Non-convex Composite Sparse bases, NCCS)算法[16]中采用复合指数函数近似 l_0 范数, 并结合外点罚函数法和共轭梯度法求得最优解。这类方法对稀疏信号的恢复性能由所使用的函数对 l_0 范数的逼近程度以及对该函数的求解方法所决定。

SL0 算法具有重构速度快, 算法简单等优点, 但该算法采用的高斯函数的陡峭性不大, 不能更好地逼近 l_0 范数, 且利用最速下降法进行求解会产生“锯齿现象”, 不能求得全局最优解, 从而导致算法重构精度不高。针对以上不足, 本文利用一种陡峭性更强的非凸光滑函数逼近 l_0 范数, 并通过外点罚函数法和共轭梯度法求得稀疏解, 提出了一种改进的近似 l_0 范数的稀疏信号重构算法, 即 INCS (Improved non-convex sparse bases)算法。最后通过仿真实验验证了本文算法在重构误差、信噪比和恢复成功率等方面较于 SL0 算法、基追踪算法和 NCCS 算法的优越性。

2. SL0 算法

压缩感知中稀疏信号重构算法是求解最优化问题(1), 对任意的 $x \in \mathbb{R}^n$, $\|x\|_0$ 可表示为 $\|x\|_0 = \sum_{i=1}^n \delta(x_i)$,

$$\text{其中 } \delta(x_i) = \begin{cases} 0 & x_i = 0 \\ 1 & x_i \neq 0 \end{cases}.$$

由于 l_0 范数是不连续的, SL0 算法中 Mohimani 等人首次提出利用连续函数 $f_\sigma(x_i) = 1 - e^{-\frac{x_i^2}{2\sigma^2}}$ 来逼近 $\delta(x_i)$, 其中 $\sigma(0 < \sigma < 1)$ 为控制参数, 显然有:

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} f_\sigma(x_i) = \begin{cases} 0 & x_i = 0 \\ 1 & x_i \neq 0 \end{cases} \quad (2)$$

令 $F_\sigma(x) = \sum_{i=1}^n f_\sigma(x_i)$, 对任意的 $x \in \mathbb{R}^n$, 可得到 $\lim_{\sigma \rightarrow 0} F_\sigma(x) = \|x\|_0$ 。故最小化 l_0 范数问题(1)可转化为以下优化问题:

$$\min_x F_\sigma(x) \quad \text{s.t.} \quad Ax = b \quad (3)$$

SL0算法利用最速下降法和梯度投影原理求解该优化问题。该算法具有重构速度快, 算法简单等优点, 但采用的连续函数的陡峭性不大, 使得近似 l_0 范数的估计不准确; 且最速下降法会出现“锯齿现象”, 不能求得全局最优解, 从而导致算法的重构精度不高。

3. 基于改进的近似 l_0 范数的稀疏信号重构算法

3.1. 改进的近似 l_0 范数

为了提高近似函数对 l_0 范数的逼近程度, 本文采用一种改进的非凸光滑函数近似 l_0 范数:

$$f_\sigma(x) = 1 - e^{-\frac{c|x|}{\sigma^2}} \quad (4)$$

其中 c 为大于等于1的常数, $\sigma(0 < \sigma < 1)$ 为控制参数。

文献[13]和[16]中分别采用了以下两种函数来近似 l_0 范数:

$$p_\sigma(x) = 1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad h_\sigma(x) = 1 - e^{-\frac{|x|}{\sigma(|x|+\sigma)}}$$

下面从几何图像和理论分析上说明本文提出的函数 $f_\sigma(x)$ 比函数 $p_\sigma(x)$ 和 $h_\sigma(x)$ 更逼近 l_0 范数。

1) 几何图像分析

函数 $f_\sigma(x)$ 、 $p_\sigma(x)$ 和 $h_\sigma(x)$ 的几何图像如图 1 所示，可以看出，函数 $f_\sigma(x)$ 的图像曲线相比于其他两种函数更陡峭，即函数 $f_\sigma(x)$ 对 l_0 范数的逼近效果更好。

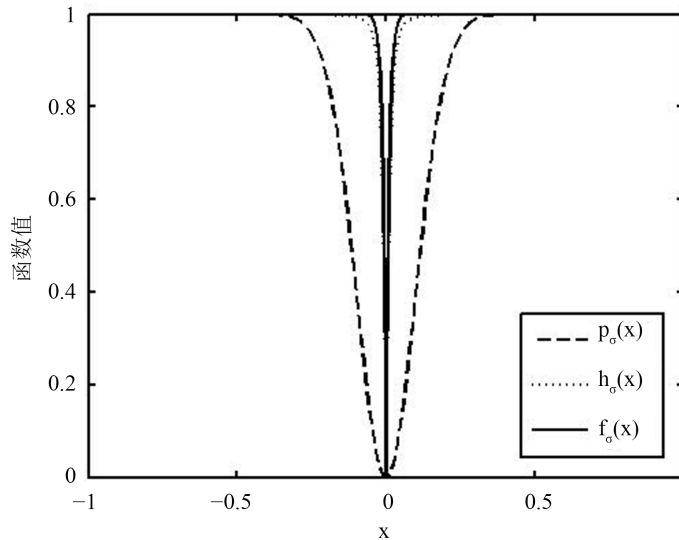


Figure 1. Comparison chart of the three functions at $\sigma = 0.1, c = 1$

图 1. $\sigma = 0.1, c = 1$ 时三种函数的对比图

2) 理论分析

假定 $x \geq 0$ ，则对区间内任意 $\sigma (\sigma \neq 0)$ 有 $p_\sigma(x) = 1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ 、 $h_\sigma(x) = 1 - e^{-\frac{x}{\sigma(x+\sigma)}}$ 、 $f_\sigma(x) = 1 - e^{-\frac{cx}{\sigma^2}}$ ，
因为

$$h_\sigma(x) - p_\sigma(x) = e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} - e^{-\frac{x}{\sigma(x+\sigma)}} \tag{5}$$

所以比较函数 $p_\sigma(x)$ 和 $h_\sigma(x)$ 的大小只需要比较他们的指数大小，易得：

$$-\frac{x^2}{2\sigma^2} - \left(-\frac{x}{\sigma(x+\sigma)} \right) = \frac{x}{\sigma} \left(\frac{1}{x+\sigma} - \frac{x}{2\sigma} \right) \geq 0 \tag{6}$$

因此 $h_\sigma(x) \geq p_\sigma(x)$ ；

同理

$$f_\sigma(x) - h_\sigma(x) = e^{-\frac{x}{\sigma(x+\sigma)}} - e^{-\frac{cx}{\sigma^2}} \tag{7}$$

因为

$$-\frac{x}{\sigma(x+\sigma)} - \left(-\frac{cx}{\sigma^2} \right) = \frac{x}{\sigma} \left(\frac{c}{\sigma} - \frac{1}{x+\sigma} \right) \geq 0 \tag{8}$$

所以 $f_\sigma(x) \geq h_\sigma(x)$ 。

利用函数对称性, $x < 0$ 时也可类似讨论。因此可以得到 $p_\sigma(x) \leq h_\sigma(x) \leq f_\sigma(x)$, 即当 $x \neq 0$ 时, 函数 $f_\sigma(x)$ 对应的函数值比其他两种函数对应的函数值更加接近于 1, 这意味着函数 $f_\sigma(x)$ 比其他两种函数更逼近 l_0 范数。

3.2. 算法实现

下面基于所改进的函数 $f_\sigma(x)$ 对(3)式进行求解。令 $x = u - v$, 其中 $u, v \in \mathbb{R}^n$, u 为 x 中所有的正元, 其余元素为零; v 为 x 中所有负元的绝对值, 其余元素也为零, 利用 $z = [u^T, v^T]^T \in \mathbb{R}^{2n}$ 表示拼接向量。经过替换, 可得:

$$F_\sigma(z) = F_\sigma(x) = \sum_{i=1}^{2n} \left(1 - e^{-\frac{c z_i}{\sigma^2}} \right) \quad (9)$$

此时约束条件 $Ax = b$ 转化为 $[A, -A]z = b$, 所以(3)式转化为:

$$\min_z F_\sigma(z) \quad \text{s.t.} \quad [A, -A]z = b, z \geq 0 \quad (10)$$

为了方便求解(10)式, 利用非凸函数 $F_\sigma(z)$ 的一阶判别条件及优化最小化(Majorize-Minorize, MM)方法[17]对目标函数 $F_\sigma(z)$ 进行放缩, 可得:

$$F_\sigma(z) \leq F_\sigma(\tilde{z}) + \langle z - \tilde{z}, \nabla F_\sigma(\tilde{z}) \rangle \leq F_\sigma(\tilde{z}) + \langle z - \tilde{z}, \nabla F_\sigma(\tilde{z}) \rangle + \lambda (\|z - \tilde{z}\|_2^2 + \|z - \tilde{z}\|_1) \quad (11)$$

记

$$H_\sigma(z, \tilde{z}) = F_\sigma(\tilde{z}) + \langle z - \tilde{z}, \nabla F_\sigma(\tilde{z}) \rangle + \lambda (\|z - \tilde{z}\|_2^2 + \|z - \tilde{z}\|_1) \quad (12)$$

其中 z, \tilde{z} 为可行域中的点, $\lambda (\lambda > 1/\sigma^2)$ 为常值, 则 $H_\sigma(z, \tilde{z})$ 为 $F_\sigma(z)$ 的一个上界函数。

忽略常值后, 则(10)式的解由下式迭代求得:

$$z_{k+1}^\sigma = \arg \min_z \left\{ \langle \nabla F_\sigma(z_k^\sigma), z \rangle + \lambda (\|z - z_k^\sigma\|_2^2 + \|z - z_k^\sigma\|_1) \right\} [A, -A]z = b, z \geq 0 \quad (13)$$

其中 $z_k^\sigma (k = 1, 2, 3, \dots)$ 为可行域中的点, 取值与 σ 有关。

令

$$\begin{cases} \langle \nabla F_\sigma(z^\sigma), z \rangle + \lambda (\|z - \tilde{z}\|_2^2 + \|z - \tilde{z}\|_1) = G(z) \\ [A, -A]z - b = H(z) = (h_1(z), \dots, h_m(z))^T \\ z = W(z) = (w_1(z), \dots, w_{2n}(z))^T \end{cases}$$

则(13)可简记为:

$$\min_z G(z) \quad \text{s.t.} \quad H(z) = 0, W(z) \geq 0 \quad (14)$$

因此, (3)式的优化问题转化为(14)式的优化问题。

本文利用外点罚函数法[18]和共轭梯度法迭代求解(14)式, 具体步骤如下:

利用外点罚函数法引入正数 M , 本文取 $M = 1$, 放大倍数为 5, 将(14)式转化为以下无约束问题:

$$z_{k+1}^\sigma = \arg \min_z L_{z_k^\sigma}(z, M) \quad (15)$$

其中

$$L_{z_k^\sigma}(z, M) = \langle \nabla F_\sigma(z_k^\sigma), z \rangle + \lambda \left(\|z - z_k^\sigma\|_2^2 + \|z - z_k^\sigma\|_1 \right) + M \left(I^T \cdot U(z) + I^T \cdot H(z) \right) \quad (16)$$

式中 I 为 $2n \times 1$ 的单位向量, $U(z) = (\min(0, z_1^2), \dots, \min(0, z_{2n}^2))^T$, $H(z) = \text{diag}([A, -A]z - b) \cdot ([A, -A]z - b)$, 则函数 $L_{z_k^\sigma}(z, M)$ 有关 z 的一阶、二阶次梯度[19]分别为:

$$\nabla L_{z_k^\sigma}(z, M) = \nabla F_\sigma(z_k^\sigma) + \lambda \left(2(z - z_k^\sigma) + \text{sgn}(z - z_k^\sigma) \right) + 2M \left\{ V(z) + [A, -A]^T \cdot ([A, -A]z - b) \right\} \quad (17)$$

$$\nabla^2 L_{z_k^\sigma}(z, M) = 2\lambda I + 2M \cdot [A, -A]^T [A, -A] I \quad (18)$$

其中 $V(z) = (\min(0, z_1), \dots, \min(0, z_{2n}))^T$ 。

再利用共轭梯度法迭代求解(15)式的 z_{k+1}^σ , 其迭代更新格式为:

$$z_{t+1} = z_t + \alpha_t \cdot p_t \quad (19)$$

其中步长因子为:

$$\alpha_t = \frac{\left\| \nabla L_{z_k^\sigma}(z_t, M) \right\|_2^2}{p_t^T \cdot \nabla^2 L_{z_k^\sigma}(z_t, M) \cdot p_t} \quad (20)$$

下降方向为:

$$p_t = -\nabla L_{z_k^\sigma}(z_t, M) + p_{t-1} \cdot \rho_{t-1} \quad (21)$$

其中令 $z_k^\sigma = z_0$, $p_0 = -\nabla L_{z_k^\sigma}(z_0, M)$, $\rho_{t-1} = \frac{\left\| \nabla L_{z_k^\sigma}(z_t, M) \right\|_2^2}{\left\| \nabla L_{z_k^\sigma}(z_{t-1}, M) \right\|_2^2}$ 。

综上所述, 本文所提出的INCS算法的流程如下:

Step 1 输入: 矩阵 A 、测量向量 b , $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 > 0$;

Step 2 初始化:

1) 设置递减序列 σ , $\sigma_{k+1} = \beta \sigma_k$, 其中 $0 < \beta < 1$, β 为 σ 的递减因子, 本文设置 $\beta = 0.5$, $\sigma_0 = 2 \max(|x_0|)$;

2) 设置初始值: $x_0 = \arg \min_x \{ \|x\|_1 \mid Ax = b \}$, $z_0 = \left[(x_0^+)^T, (x_0^-)^T \right]^T$;

Step 3 算法迭代:

1) $k = 0$, $\sigma = \sigma_0$;

2) while $d_1 > \varepsilon_1$ do

1: $\{\hat{z}_0 = z_k, l = 0, k = k + 1,$

2: while $d_2 > \varepsilon_2$ do

3: $\{l = l + 1,$

$$4: \hat{z}_l = \arg \min_z \{G_{l-1}(z) \mid [A, -A]z = b, z \geq 0\},$$

$$5: d_2 = \frac{\|\hat{z}_l - \hat{z}_{l-1}\|_2}{\|\hat{z}_{l-1}\|_2},$$

$$6: z_k = \hat{z}_l,$$

$$7: d_1 = \frac{\|\hat{z}_k - \hat{z}_{k-1}\|_2}{\|\hat{z}_{k-1}\|_2},$$

$$8: \sigma = \beta\sigma \},$$

$$9: x_k = z_k(1:n) - z_k(n+1:end),$$

$$10: W = \frac{1}{|x_{k-1}| + \varepsilon_3},$$

$$11: x_k = \arg \min_x \{\|Wx\|_1 \mid Ax = b\};$$

Step 4 输出稀疏向量: $x = x_k$ 。

其中Step 3由内、外两部分循环构成。外循环由步骤1~2及6~8组成,通过参数 σ 实现函数 $f_\sigma(x)$ 对 l_0 范数的逐次逼近;内循环为步骤3~5,利用外点罚函数法和共轭梯度法迭代求解步骤4;并将求得的解利用加权 l_1 范数最小化[20]进行稀疏化处理。 d_1 和 d_2 分别表示外、内循环连续迭代的解之间的相对误差,并用于判断循环是否停止。

4. 仿真实验与结果分析

为验证本文所提出的INCS算法在重构性能上的优越性,本节设计了几组有关SLO算法、基追踪(Basis Pursuit, BP)算法、NCCS算法和INCS算法的对比实验。对于每个实验,我们重复进行100次测试,给出平均结果,并取 $c = 10$ 。仿真实验结果是在MatlabR2014a的条件下获得的。

在仿真实验中,矩阵 A 的大小为 128×256 ,其中矩阵元素服从零均值、单位方差的高斯分布,矩阵的列具有单位 l_2 范数;稀疏原信号 x 的维数为256,非零项服从正态分布;信号稀疏度 k 取值区间为 $[10, 80]$ 。

实验中所涉及到的性能指标包括:

1) 重构误差(mean squared error):

$$MSE = \|\tilde{x} - \hat{x}\|_2^2$$

2) 信噪比(signal noise ratio):

$$SNR = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{\|\tilde{x}\|_2^2}{\|\tilde{x} - \hat{x}\|_2^2} \right)$$

3) 算法运行时间

4) 恢复成功率(recovery success rate): 当 $\tilde{x}_i \neq 0$ 时, $|\tilde{x} - \hat{x}| \leq 10^{-4}$ 说明算法在该点处重构成功,

$$RSS = \frac{\hat{x} \text{ 重构成功的点个数}}{\tilde{x} \text{ 中非零点个数}}$$

其中 \tilde{x} 表示稀疏原信号, \hat{x} 表示算法的恢复信号;

图2为各算法的重构误差MSE和稀疏度的变化关系,实验结果如图2及表1所示。由图2和表1可见,BP算法、NCCS算法和INCS算法都存在随着稀疏度的增加重构误差增大的趋势。在同一稀疏度下,相比于其他三种算法,INCS算法的重构误差略小。

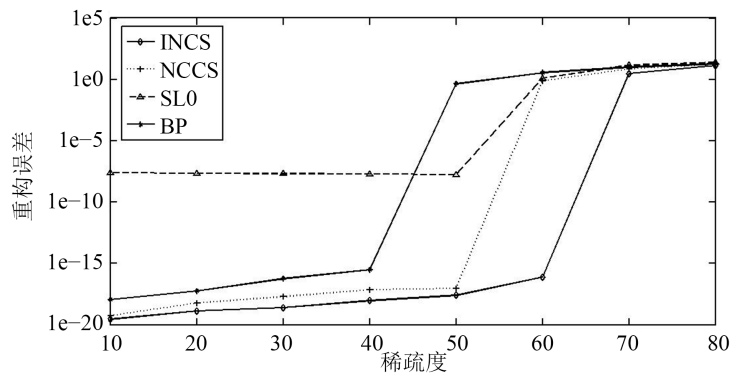


Figure 2. The relationship between the reconstruction error and sparsity of the SL0 algorithm, BP algorithm, NCCS algorithm and INCS algorithm
图2. SL0算法、BP算法、NCCS算法、INCS算法的重构误差和稀疏度的变化关系

Table 1. The numerical record of the reconstruction error of each algorithm changing with the sparsity k
表1. 各算法的重构误差随着稀疏度 k 变化的数值记录

算法	$k=10$	$k=20$	$k=30$	$k=40$	$k=50$	$k=60$	$k=70$	$k=80$
BP	1.12E-18	5.48E-18	5.81E-17	3.06E-16	0.45357	3.57556	10.01417	18.29708
SL0	2.47E-08	2.29E-08	2.09E-08	1.94E-08	1.70E-08	1.24461	14.78881	23.99578
NCCS	5.54E-20	5.79E-19	1.93E-18	7.17E-18	9.38E-18	0.79264	7.34229	17.68958
INCS	2.83E-20	1.31E-19	2.45E-19	9.53E-19	2.45E-18	7.60E-17	3.04638	14.10025

图3为各算法的重构信噪比 SNR 和稀疏度的变化关系，实验结果如图3及表2所示。可以看出，在稀疏度区间 $[10,50]$ 上，INCS算法和NCCS算法的信噪比变化不大且相差很小，但明显高于SL0算法和BP算法的信噪比；在稀疏度区间 $[50,80]$ 上，各算法的信噪比随着稀疏度的增加而减小，但INCS算法的信噪比仍高于其他三种算法。

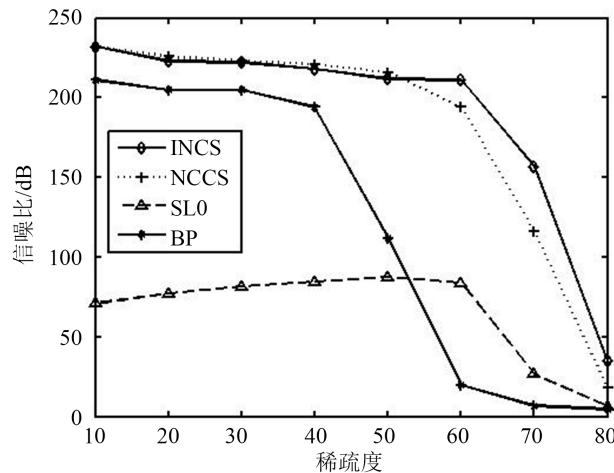


Figure 3. The relationship between the signal-to-noise ratio and sparsity of the SL0 algorithm, BP algorithm, NCCS algorithm and INCS algorithm
图3. SL0算法、BP算法、NCCS算法、INCS算法的重构信噪比和稀疏度的变化关系

Table 2. The numerical record of the signal-to-noise ratio of each algorithm changing with the sparsity k
表2. 各算法的重构信噪比随着稀疏度 k 变化的数值记录

算法	$k = 10$	$k = 20$	$k = 30$	$k = 40$	$k = 50$	$k = 60$	$k = 70$	$k = 80$
BP	2.11E+02	2.05E+02	2.05E+02	1.94E+02	1.12E+02	19.71136	6.68644	4.47774
SL0	70.98122	77.35896	81.58295	84.80094	87.50702	83.92584	26.56156	6.28709
NCCS	2.32E+02	2.26E+02	2.23E+02	2.21E+02	2.16E+02	1.94E+02	1.16E+02	18.32044
INCS	2.32E+02	2.23E+02	2.22E+02	2.18E+02	2.12E+02	2.11E+02	1.57E+02	35.03469

图4为各算法的运行时间和稀疏度的变化关系,实验结果如图4及表3所示。可以看出,SL0算法和BP算法的运行时间较短并能够保持在0.5秒以内。在稀疏度区间 $[10,50]$ 上,INCS算法和NCCS算法的运行时间能保持在1秒以内,在稀疏度区间 $[50,80]$ 上这两种算法的运行时间都有所增加,但对比NCCS算法,INCS算法的运行时间始终略短。

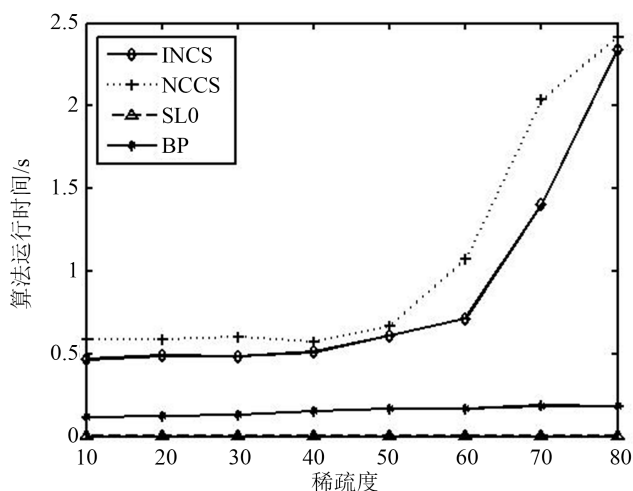


Figure 4. The relationship between the running time and sparsity of the SL0 algorithm, BP algorithm, NCCS algorithm and INCS algorithm

图4. SL0算法、BP算法、NCCS算法、INCS算法的运行时间和稀疏度的变化关系

Table 3. The numerical record of the running time of each algorithm changing with the sparsity k
表3. 各算法的运行时间随着稀疏度 k 变化的数值记录

算法	$k = 10$	$k = 20$	$k = 30$	$k = 40$	$k = 50$	$k = 60$	$k = 70$	$k = 80$
BP	0.11539	0.12327	0.13205	0.15259	0.16604	0.16831	0.18520	0.18352
SL0	0.00010	0.00009	0.00011	0.00009	0.00012	0.00012	0.00010	0.00009
NCCS	0.58932	0.58826	0.60202	0.57496	0.66814	1.07208	2.03705	2.41634
INCS	0.46711	0.48871	0.48493	0.50970	0.60926	0.71415	1.40504	2.34221

图5为各算法的恢复成功率RSS和稀疏度的变化关系,实验结果如图5及表4所示。可以看出,当稀疏度增加到一定程度时这四种算法的恢复成功率均开始降低。INCS算法的恢复成功率在稀疏度区间 $[10,60]$ 上都能保持为1,也就是说在这个区间内该算法都能够实现信号的完全恢复。在稀疏度区间 $[60,80]$ 上,INCS算法的恢复成功率始终略高于其他三种算法,所以利用INCS算法恢复信号时精确度有一定的提高。

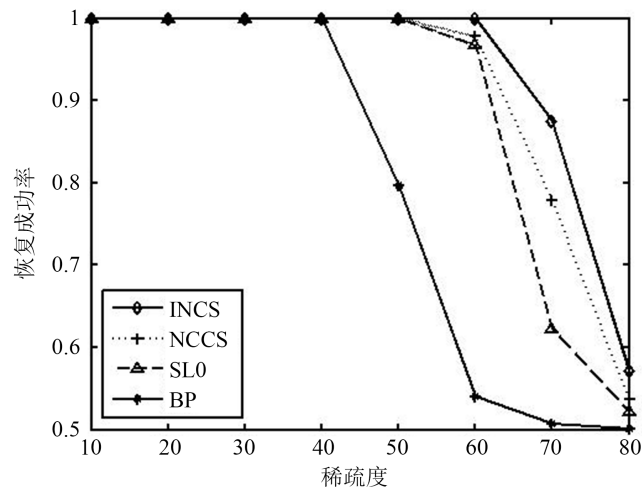


Figure 5. The relationship between the recovery success rate and sparsity of the SL0 algorithm, BP algorithm, NCCS algorithm and INCS algorithm

图5. SL0算法、BP算法、NCCS算法、INCS算法的恢复成功率和稀疏度的变化关系

Table 4. The numerical record of the recovery success rate of each algorithm changing with the sparsity k
表4. 各算法的恢复成功率随着稀疏度 k 变化的数值记录

算法	$k = 10$	$k = 20$	$k = 30$	$k = 40$	$k = 50$	$k = 60$	$k = 70$	$k = 80$
BP	1	1	1	1	0.79640	0.54050	0.50729	0.50075
SL0	1	1	1	1	1	0.96700	0.62271	0.52200
NCCS	1	1	1	1	1	0.97750	0.77829	0.53650
INCS	1	1	1	1	1	1	0.87512	0.57163

综上所述，本文提出的INCS算法的综合重构性能优于实验中的对比算法，说明利用该算法能够更好的恢复稀疏信号。

5. 结论

本文提出了一种基于改进的近似 l_0 范数的稀疏信号重构算法，即 INCS 算法。该算法利用一种逼近性能更优的非凸光滑函数实现对 l_0 范数的逼近，并通过外点罚函数法和共轭梯度法求解基于该函数的稀疏解。实验结果表明：对比 SL0 算法、BP 算法和 NCCS 算法，INCS 算法在重构误差、信噪比和恢复成功率等方面表现出更优越的重构性能。

基金项目

长安大学中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(编号：310812163504)。

参考文献

- [1] Donoho, D.L. (2006) Compressed Sensing. *IEEE Transactions on Information Theory*, **52**, 1289-1306. <https://doi.org/10.1109/TIT.2006.871582>
- [2] Salari, S., Chan, F., Chan, Y.T. and Guay, R. (2020) DOA Estimation Using Compressive Sampling-Based Sensors in the Presence of Interference. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, **56**, 4395-4405. <https://doi.org/10.1109/TAES.2020.2990818>

- [3] 张国平, 牟忠德. 基于压缩感知的医学图像重建方法[J]. 生物医学工程学进展, 2019, 40(4): 187-195.
- [4] Herman, M.A. and Strohmer, T. (2009) High-Resolution Radar via Compressed Sensing. *IEEE Transactions on Signal Processing*, **57**, 2275-2284. <https://doi.org/10.1109/TSP.2009.2014277>
- [5] Li, H., Zhang, Q., Cui, A. and Peng, J. (2020) Minimization of Fraction Function Penalty in Compressed Sensing. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, **31**, 1626-1637. <https://doi.org/10.1109/TNNLS.2019.2921404>
- [6] Peng, J., Yue, S. and Li, H. (2015) NP/CMP Equivalence: A Phenomenon Hidden among Sparsity Models l_0 Minimization and l_p Minimization for Information Processing. *IEEE Transactions on Information Theory*, **61**, 4028-4033. <https://doi.org/10.1109/TIT.2015.2429611>
- [7] Tropp, J.A. and Gilbert, A.C. (2007) Signal Recovery from Random Measurements via Orthogonal Matching Pursuit. *IEEE Transactions on Information Theory*, **53**, 4655-4666. <https://doi.org/10.1109/TIT.2007.909108>
- [8] Wang, J., Kwon, S. and Shim, B. (2012) Generalized Orthogonal Matching Pursuit. *IEEE Transactions on Signal Processing*, **60**, 6202-6216. <https://doi.org/10.1109/TSP.2012.2218810>
- [9] Dai, W. and Milenkovic, O. (2009) Subspace Pursuit for Compressive Sensing Signal Reconstruction. *IEEE Transactions on Information Theory*, **55**, 2230-2249. <https://doi.org/10.1109/TIT.2009.2016006>
- [10] Chen, S.S., Donoho, D.L. and Saunders, M.A. (2001) Atomic Decomposition by Basis Pursuit. *Siam Review*, **43**, 129-159. <https://doi.org/10.1137/S003614450037906X>
- [11] Bayram, I. (2016) On the Convergence of the Iterative Shrinkage/Thresholding Algorithm with a Weakly Convex Penalty. *IEEE Transactions on Signal Processing*, **64**, 1597-1608. <https://doi.org/10.1109/TSP.2015.2502551>
- [12] Figueiredo, M., Nowak, R.D. and Wright, S.J. (2007) Gradient Projection for Sparse Reconstruction: Application to Compressed Sensing and Other Inverse Problems. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, **1**, 586-597. <https://doi.org/10.1109/JSTSP.2007.910281>
- [13] Mohimani, H., Babaie-Zadeh, M. and Jutten, C. (2009) A Fast Approach for Overcomplete Sparse Decomposition Based on Smoothed l_0 Norm. *IEEE Transactions on Signal Processing*, **57**, 289-301. <https://doi.org/10.1109/TSP.2008.2007606>
- [14] 林婉娟, 赵瑞珍, 李浩. 用于压缩感知信号重建的 NSL0 算法[J]. 新型工业化, 2011(17): 78-84.
- [15] 张巍, 朱正为, 汪亮, 王学渊. 一种 A-HNSL0 压缩感知 SAR 图像重建方法[J]. 电光与控制, 2020, 27(8): 28-32.
- [16] 周洁容, 李海洋, 凌军, 等. 基于非凸复合函数的稀疏信号恢复算法[J]. 自动化学报, 2021, 47(x): 1-12.
- [17] Hunter, D.R. and Lange, K. (2004) A Tutorial on MM algorithms. *The American Statistician*, **58**, 30-37. <https://doi.org/10.1198/0003130042836>
- [18] 袁亚湘, 孙文瑜. 最优化理论与方法[M]. 北京: 科学出版社, 1997: 455-482.
- [19] Clarke, F. (1983) Optimization and Non-Smooth Analysis. Society for Industrial and Applied Mathematics, New York, 37-187. <https://doi.org/10.1137/1.9781611971309>
- [20] Candes, E.J., Wakin, M.B. and Boyd, S.P. (2008) Enhancing Sparsity by Reweighted l_1 Minimization. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, **14**, 877-905. <https://doi.org/10.1007/s00041-008-9045-x>