Dynamical Systems and Control 动力系统与控制, 2019, 8(2), 114-117
Published Online April 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/dsc
https://doi.org/10.12677/dsc.2019.82013

Hans汉斯

Chaos Synchronization of Discrete Fractional Logistic Maps

Xiujuan Wang[1,2], **Mingshu Peng**[1]

[1]College of Sciences, Beijing Jiaotong University, Beijing
[2]Weifang University, Weifang Shandong
Email: mshpeng@bjtu.edu.cn

Received: Mar. 9th, 2019; accepted: Mar. 20th, 2019; published: Apr. 2nd, 2019

Abstract

In this paper, we are to give a detailed study of synchronization in some generalized difference equations by means of nonlinear feedback control. Numerical simulation gives a solid confirmation of our analysis and the synchronized regions related to the control strengthen parameters are to be depicted in details.

Keywords

Fractal Difference Equations, Chaotic Maps, Nonlinear Feedback Control, Synchronization

离散分数阶Logistic差分方程的混沌同步

王秀娟[1,2]，**彭名书**[1]

[1]北京交通大学理学院，北京
[2]潍坊学院，山东 潍坊
Email: mshpeng@bjtu.edu.cn

收稿日期：2019年3月9日；录用日期：2019年3月20日；发布日期：2019年4月2日

摘 要

分数阶差分方程的混沌同步研究是近年来的热点问题，本文基于非线性控制方法建立了一类混沌映射同步的判别准则，给出数值模拟结果，验证了理论分析的准确性，并推广了已有文献结果。

关键词

分数阶差分方程，混沌，非线性控制，同步

文章引用: 王秀娟, 彭名书. 离散分数阶 Logistic 差分方程的混沌同步[J]. 动力系统与控制, 2019, 8(2): 114-117.
DOI: 10.12677/dsc.2019.82013

1. 引言

基于 Huber [1] 1989 年混沌控制及 Pecora and Carroll [2] 1990 年混沌同步的开创性工作，混沌控制与同步吸引了大量系统理论研究工作者的广泛兴趣和关注。控制问题重点研究混沌吸引子的稳定化(使之呈现周期运动或静止状态)，而同步可视为特殊的控制问题，当今研究核心在于跟踪特定的混沌运动，并使两类混沌系统达到运动的一致性。研究方法表现为线性控制技术与非线性控制技术[3]。本文运用非线性反馈方法研究了一类分数阶混沌差分方程的同步问题。

2. 系统模型

本文考虑如下差分方程

$$x(n)=x(0)+\frac{\mu}{\Gamma(v)}\sum_{j=1}^{n}\frac{\Gamma(n-j+v)}{\Gamma(n-j+1)}x(j-1)\big(1-x(j-1)\big). \tag{1}$$

当 $v\neq 1$ 时，系统有长时记忆，表现为演化过程中依赖于过去所以状态。而当 $v = 1$ 时，则为经典的 Logistic 模型。文献[4]讨论了如下的非线性控制问题

$$\begin{cases} x(n)=x(0)+\dfrac{\mu}{\Gamma(v)}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{\Gamma(n-j+v)}{\Gamma(n-j+1)}x(j-1)\big(1-x(j-1)\big), \\ y(n)=y(0)+\dfrac{\mu}{\Gamma(v)}\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{\Gamma(n-j+v)}{\Gamma(n-j+1)}\left[\begin{matrix} y(j-1)\big(1-y(j-1)\big)+K\big(x(j-1)-y(j-1)\big) \\ -P\big(x^2(j-1)-y^2(j-1)\big) \end{matrix}\right], \end{cases} \tag{2}$$

其中 K 与 P 为控制刚度，x 为主控制量而 y 为从控制量。但我们发现文[4]所给参数不能达到同步。

为此我们考虑了系统(2)主系统 $x(t)$ 与从系统 $y(t)$ 的同步问题，即

$$\lim_{t\to\infty}\left|x(t)-y(t)\right|=0.$$

3. 主要结果

引入误差变量

$$e(t)=x(t)-y(t).$$

误差系统变为

$$e(t+1)=e(0)+\frac{\mu}{\Gamma(v)}\sum_{j=1}^{n}\frac{\Gamma(n-j+v)}{\Gamma(n-j+1)}e(j-1)\Big(1-K-(1-P)\big(x(j-1)+y(j-1)\big)\Big). \tag{3}$$

而根据 Caputo-型差分[4] [5] [6]定义，系统(3)可写为

$$^{C}\Delta_a^v e(t)=\mu e(t+v-1)\big[1-K-(1-P)\big(x(t+v-1)+y(t+v-1)\big)\big], t\in\mathbb{N}_{a+1-v}, u(a)=c,$$

其中 $^{C}\Delta_a^v$ 为左 Caputo-型 delta 差分，$0<v\leq 1, \mathbb{N}_a$ 为离散时间尺度 $\mathbb{N}_a=\{a,a+1,a+2,\cdots\}$ ($a\in\mathbb{R}$，本文取 $a=0$)。

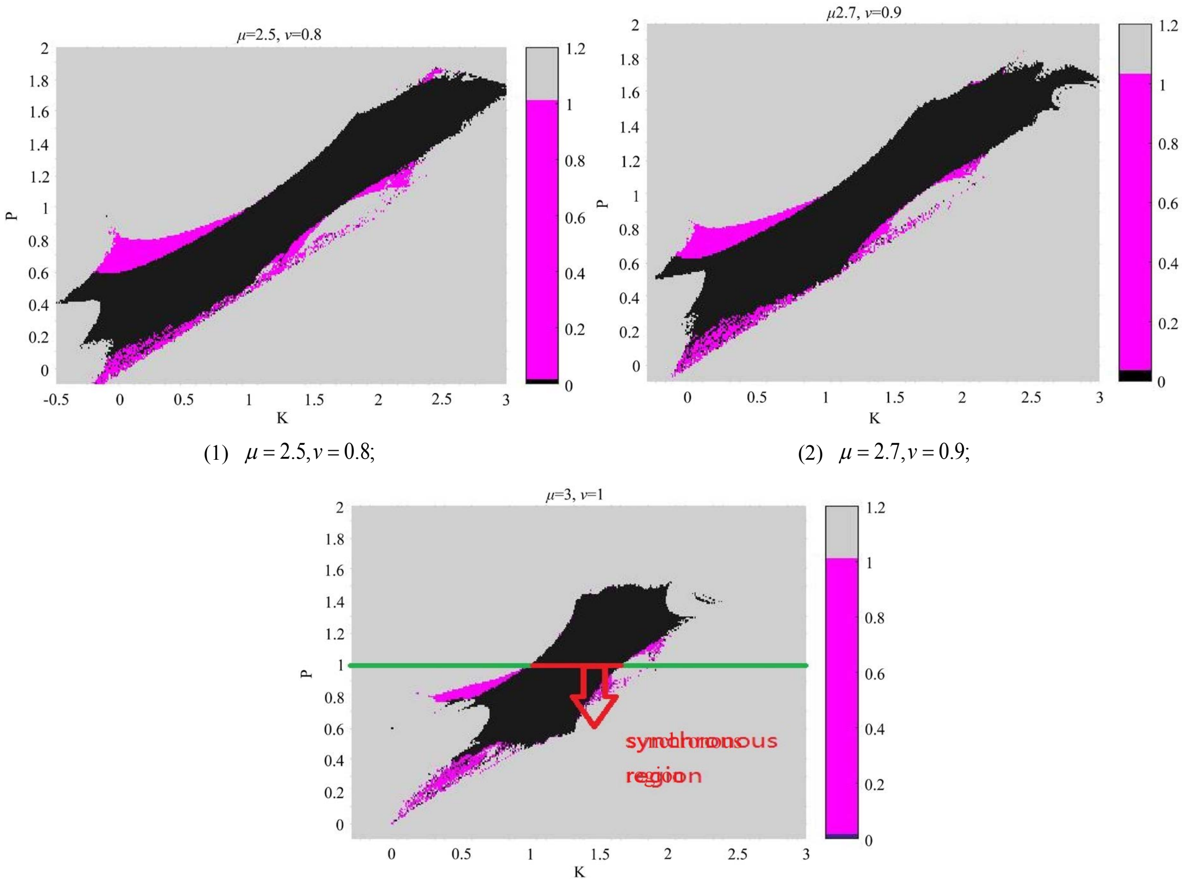
显然同步状态依赖于控制刚度 K,P 及控制目标 x。此外若 $P=1$，则可根据文[6]定理 38 可得如下结论。

定理 1：假定 $P=1$，$0<v\le 1,\mu>0$。若方程

$$1-(1-K)\mu\frac{1}{z}\left(\frac{z}{z-1}\right)^{v}=0 \tag{4}$$

的根全部落在单位圆内。则系统(2)中主系统 $x(n)$ 与从系统 $y(n)$ 达到同步，即，$\lim\limits_{n\to\infty}\left|x(n)-y(n)\right|=0$。

进一步我们运用 Matlab 软件包给出如下数值结果。图一中黑色区域表示为同步区域(其中 $|x-y|<0.01$)，灰色区域为非同步区域(其中误差 $|x-y|\ge 1$)，而有色区域为过渡状态。在图 1 (3)中，我们用一条有色的线画出了当 $P=1$ 且 $v=1$ 时同步区域。与定理 1 对应结论($1<K<1+2/3$)吻合。说明我们数值结果的准确性。



(1) $\mu=2.5,v=0.8$; (2) $\mu=2.7,v=0.9$; (3) $\mu=3,v=1$.

Figure 1. Nonlinear feedback chaotic synchronization for fractional-order Logistic difference equation with initial conditions $x(0)=0.2$, $y(0)=0.3$ and parameters

图 1. 分数阶 Logistic 差分方程的非线性反馈混沌同步研究，其中初始条件 $x(0)=0.2$，$y(0)=0.3$ 及参数

4. 结论

本文运用非线性反馈方法研究了一类分数阶混沌差分方程的同步问题，建立了一类混沌映射同步的判别准则，给出数值模拟结果，验证了理论分析的准确性，并推广了已有文献结果。

基金项目

山东省自然科学基金资助(ZR2015AL004)。

参考文献

[1] Hubler, A.W. (1989) Adaptive Control of Chaotic System. *Helvetica Physica Acta*, **62**, 343-346.

[2] Pecora, L.M. and Carroll, T.L. (1990) Synchronization in Chaotic Systems. *Physical Review Letters*, **64**, 821-823. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.64.821

[3] Yassen, M.T. (2003) Adaptive Control and Synchronization of a Modified Chua's Circuit System. *Applied Mathematics and Computation*, **135**, 113-128. https://doi.org/10.1016/S0096-3003(01)00318-6

[4] Wu, G.C. and Baleanu, D. (2014) Chaos Synchronization of the Discrete Fractional Logistic Map. *Signal Processing*, **102**, 96-99. https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2014.02.022

[5] 程金发. 分数阶差分方程理论[M]. 厦门: 厦门大学出版社, 2011.

[6] Mozyrska, D. and Wyrwas, M. (2015) The Z-Transform Method and Delta Type Fractional Difference Operators. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, **2015**, Article ID: 52734. https://doi.org/10.1155/2015/852734