

Malkus水轮混沌旋转的力学机理分析

梅鹏飞, 王贺元

沈阳师范大学数学与系统科学学院, 辽宁 沈阳

收稿日期: 2021年9月28日; 录用日期: 2021年10月13日; 发布日期: 2021年10月27日

摘要

Malkus混沌水轮是展示混沌现象的典型力学装置, 本文探讨了Malkus水轮混沌旋转的力学机理。把Malkus水轮混沌旋转的数学模型转换为Kolmogorov系统, 基于惯性力矩、内力矩、耗散力矩和外力矩的不同耦合模式, 利用理论分析和数值仿真相结合的方法, 分析探讨了Malkus水轮混沌旋转的主要影响因素和内在的力学机理。影响混沌旋转现象主要因素有内能、动能和哈密顿能量。通过分析仿真得知力矩缺失模式并不能产生混沌旋转现象, 全力矩模式才能产生混沌旋转现象, 四种力矩缺一不可, 与此同时只有耗散和外力相匹配时才能产生混沌。

关键词

混沌, Kolmogorov系统, 力学机理, Malkus水轮

Mechanical Mechanism Analysis of Chaotic Rotation of Malkus Water Wheel

Pengfei Mei, Heyuan Wang

School of Mathematics and Systems Science, Shenyang Normal University, Shenyang Liaoning

Received: Sep. 28th, 2021; accepted: Oct. 13th, 2021; published: Oct. 27th, 2021

Abstract

Malkus chaotic water wheel is a typical mechanical device to show chaotic phenomena. This paper discusses the mechanical mechanism of Malkus chaotic rotation. The mathematical model of Malkus wheel chaotic rotation is transformed into Kolmogorov system. Based on different coupling modes of inertia moment, internal moment, dissipative moment and external moment, the main influencing factors and internal mechanical mechanism of Malkus wheel chaotic rotation are analyzed and discussed by combining theoretical analysis with numerical simulation. The main factors affecting the chaotic rotation are internal energy, kinetic energy and Hamiltonian energy. Through the analysis and simulation, we know that the lack of torque mode cannot produce chaotic rotation phenomenon; the full torque mode can produce chaotic rotation phenomenon, and

four kinds of torque are indispensable, at the same time, only when the dissipation and external force match, it can produce chaos.

Keywords

Chaos, Kolmogorov System, Mechanical Mechanism, Malkus Water Wheel

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

混沌研究的历史最早可追溯到 Poincare 对三体问题的研究[1]。1963 年美国的气象学家 Lorenz 在研究局部区域小气候的数值实验时发现了混沌现象[2], 开启了混沌研究的先河, 受数值结果启发 Lorenz 设计了混沌水轮实验装置。Malkus 改进了 Lorenz 混沌水轮实验装置, 完成了通过实验演示 Lorenz 方程混沌行为这一挑战性工作[3], 引起了许多学者的广泛关注[4] [5] [6], 导致了分析和解释水轮混沌旋转现象一系列研究工作。但是水轮为什么混沌旋转? 发生混沌旋转的内在机理方面的研究, 目前还没有文献涉及, 本文将在这方面展开研究和探索。从力学的角度研究混沌系统已经有了良好的开端, 阿诺德[7]用 Kolmogorov 系统来描述具有哈密顿函数的不同强迫动力系统, 流体动力系统等。Pasini 和 Pelino [8]对 Lorenz 系统进行研究, 并给出了统一的 Kolmogorov 系统和 Lorenz 系统。王贺元探讨了同轴圆筒间旋转流体的力学机理[9]。基于这些研究工作, 本文探讨 Malkus 水轮混沌旋转的内在机理。将 Malkus 水轮系统转化为 Kolmogorov 系统, 分析了不同动力学模式下 Malkus 水轮旋转行为, 理论分析发现四种虚拟模式都不能产生混沌旋转行为, 全力矩模式才能产生混沌旋转行为, 进而解释了 Malkus 水轮混沌旋转的力学机理。

2. Malkus 水轮系统及其 Kolmogorov 系统

文献[4]利用质量守恒方程、动量矩方程结合傅里叶展开等数学方法推导出简化的 Malkus 水轮混沌旋转现象的数学模型为如下三维非线性微分方程组

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = \rho x - y - xz \\ \dot{z} = xy - z \end{cases} \quad (1)$$

其中 x 与角速度有关的物理量, y, z 是质心坐标[10], σ, ρ 是与注水率和漏水率有关的变量。当 $\sigma = 4$, $31.45 \leq \rho \leq 73.51$ 时, 系统(1)产生混沌行为。为分析解释 Malkus 水轮混沌旋转的力学机理和物理意义, 引入三维 Kolmogorov 系统

$$\dot{X} = \{X, H\} - \Lambda X + f \quad (2)$$

其中 $X = [x, y, z]^T$, 反括号 $\{\cdot, \cdot\}$ 表示哈密顿函数 H 动能部分的代数结构, 以及 cosymplectic 矩阵 J , 或 Lie-Poisson 结构[8]

$$\{F, G\} = J_{ik} \partial_i F \partial_k G \quad (3)$$

系统(2)是 Kolmogorov 描述具有哈密顿函数的不同强迫动力系统, 流体动力系统等引入的[7]。在欧拉方程(或力矩) $\{X, H\}$ 是惯性力(离心力)。系统(2)是具有耗散力和外力的广义欧拉方程[11]。

经变量变换 $x \mapsto x, y \mapsto y, z \mapsto z + \sigma\rho + \rho$ 系统(1)化为

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y-x) \\ \dot{y} = -y-xz - \sigma\rho x \\ \dot{z} = xy - z - \rho(1+\sigma) \end{cases} \quad (4)$$

变换之后系统(4)依然存在混沌吸引子[12], 平衡点的个数与原系统(1)相同, 只是吸引子位置发生改变。

定义哈密顿能量 $H = K + U$, 其中动能 $K = \frac{1}{2}(x^2 + 2y^2 + 2z^2)$, 势能 $U = \sigma\rho z$ 。系统(4)的 Kolmogorov 系统如下

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} \sigma y \\ -xz - \sigma\rho x \\ xy \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sigma x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\rho(1+\sigma) \end{pmatrix} = \{X, H\} - \Lambda X + f \quad (5)$$

其中 $\Lambda = \text{diag}(\sigma, 1, 1)$, $f = (0, 0, -\rho(1+\sigma))^T$ 。这里 X 相当于角动量, 时间导数 \dot{X} 表示 Malkus 水轮转动力矩的变化率。 $\{X, H\}$ 是守恒项, 包含动能产生的惯性力矩和势能释放的内力矩。 ΛX 是耗散力矩, 即摩擦或粘滞力, f 是外力矩, 由注水产生的驱动力矩。

3. 系统动力学机制及其分析

各种类型的力矩对 Malkus 水轮旋转都具有不同程度的影响, 本节从力矩的不同耦合模式展开讨论, 从而阐释水轮混沌旋转的力学机理。

模式一: 系统只包含惯性力矩, 即系统仅包含动能

$$\dot{X} = \{X, K\} = \begin{pmatrix} 0 \\ -zx \\ xy \end{pmatrix} \quad (6)$$

动能函数的导数 $\dot{K} = x\dot{x} + 2y\dot{y} + 2z\dot{z} = 0$ 。

系统是保守系统, 所以其运动轨迹为闭合周期轨道如图 1 所示, 状态变量 z 的轨迹如图 2 所示, 能量演化如图 3 所示, 根据能量演化曲线可判断出运动过程中整个系统的能量成周期波动。事实上, 由于 x 是常量, 系统是线性系统, 此时 Malkus 水轮永不停息地做周期旋转运动。

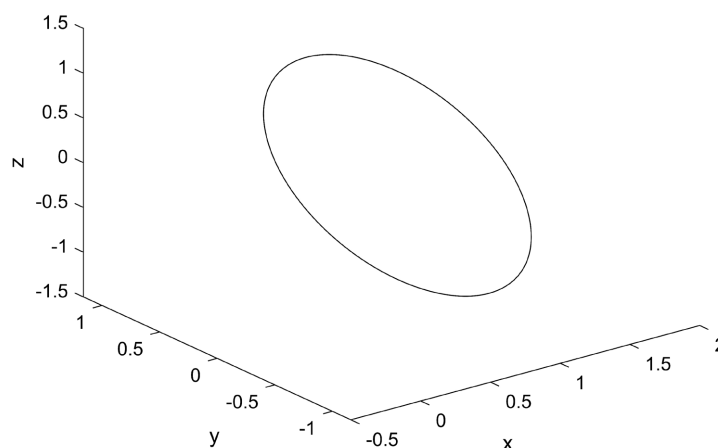


Figure 1. Three dimensional periodic orbits

图 1. 三维周期轨道

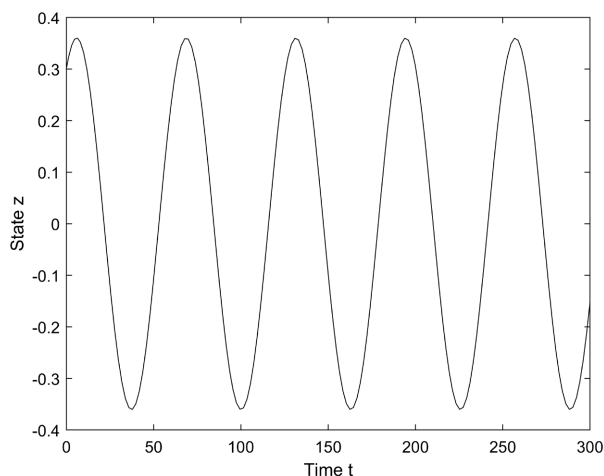


Figure 2. Trajectory of state variable z

图 2. 状态变量 z 的轨迹

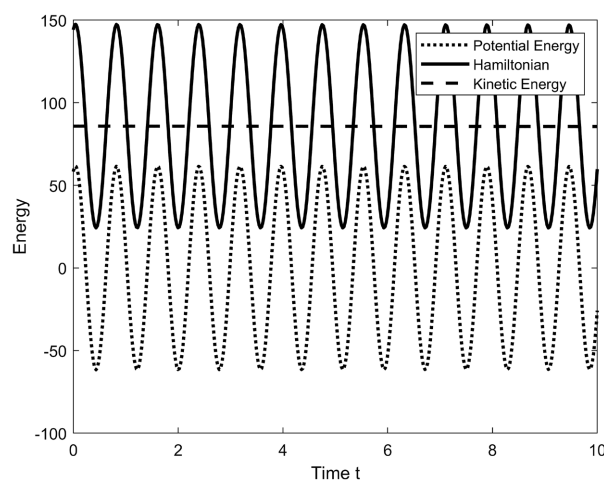


Figure 3. Energy evolution diagram

图 3. 能量演化图

模式二：系统包含哈密顿能量中的惯性力矩(由动能 K 产生的)和内力矩(由势能 U 释放产生)，对应的方程为

$$\dot{X} = \{X, H\} = \begin{pmatrix} \sigma y \\ -xz - \sigma \rho x \\ xy \end{pmatrix} \quad (7)$$

哈密顿函数的导数 $\dot{H} = x\dot{x} + 2y\dot{y} + 2z\dot{z} + \sigma\dot{z} = 2xy\rho(1 - \sigma)$ 。

由于没有耗散，系统也是保守系统，因此，如图 4 所示，产生一个闭合的周期轨道，状态变量 z 的轨迹如图 5 所示，哈密顿能量及能量演化如图 6、图 7 所示。根据能量演化曲线可以判断整个系统的哈密顿能量先是波动起伏比较大，并且动起伏逐渐变小，最后到达一个稳定值，整个系统的能量稳定。比较模式一和模式二，势能 U 的出现使其对应解上下震荡更加频繁，由于势能 $U > 0$ ，系统是非线性系统，并且因为势能 U 的加入使周期解出现的频率比模式一高很多，即内力矩是系统解的移动的速度比模式一快得多，频率的大小由参数 σ, ρ 决定，内力矩(由 U 释放)增强了轨道的拉伸和收缩，这对系统正常旋转到混沌旋转的产生也许是有有效的，但此时水轮并未产生混沌旋转，只是在做周期运动。

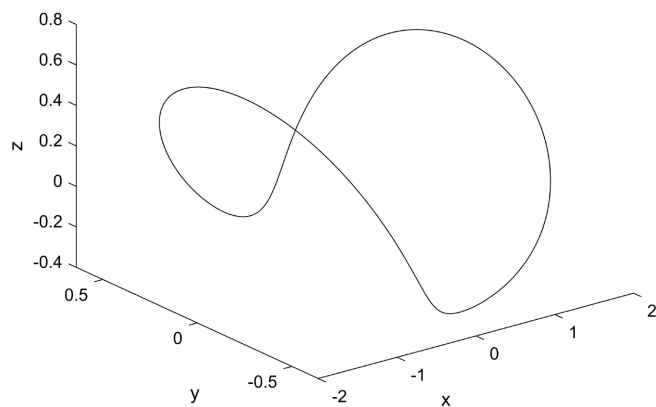


Figure 4. Three dimensional periodic trajectory
图 4. 三维周期轨迹

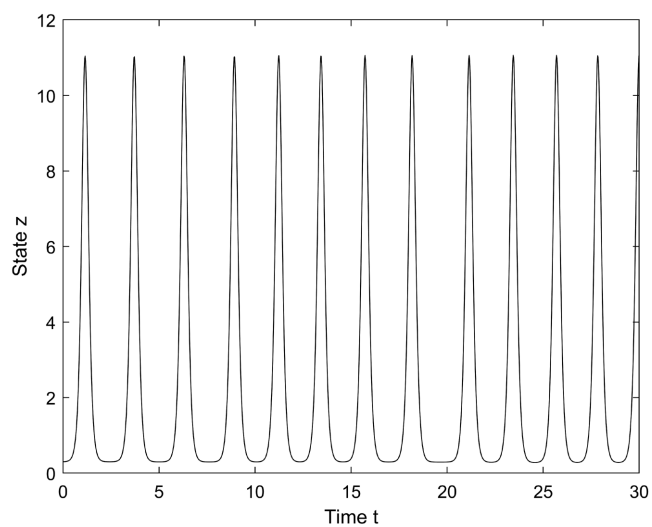


Figure 5. The periodic trajectory of z
图 5. z 的周期轨迹

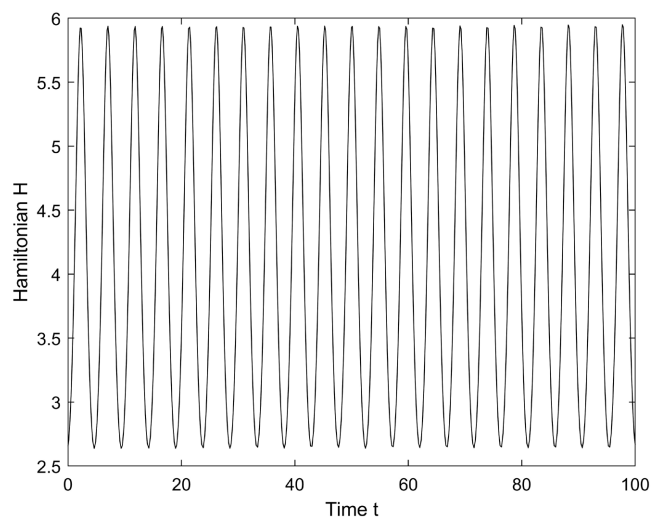


Figure 6. Hamiltonian energy evolution diagram
图 6. 哈密顿能量演化图

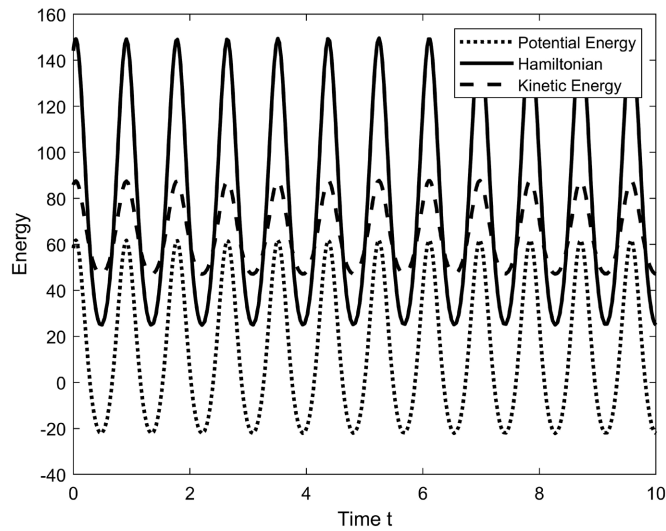


Figure 7. Energy evolution diagram
图 7. 能量演化图

模式三: 系统包含惯性力矩, 内力矩和耗散力矩, 即系统包含内能和耗散因素, 但不包含驱动因素, 相应的方程

$$\dot{X} = \{X, K + U\} - \Lambda X = \begin{pmatrix} \sigma y \\ -xz - \sigma \rho x \\ xy \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sigma x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (8)$$

对于 $\sigma = 3.34$, 可得

$$Div(V) = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} = -\sigma - 2 < 0$$

其中 V 是系统相空间的体积。因此, 此模式下系统是耗散的, 即相空间的体积在流量下以指数形式收缩 [13], 哈密顿能量变化率是

$$\dot{H} = x\dot{x} + 2y\dot{y} + 2z\dot{z} + c\dot{z} = -\sigma x^2 - 2y^2 - 2z^2 + 2\sigma xy - 2\sigma y - \sigma z$$

不同于文献 [14] [15] [16] [17] 中讨论 Kolmogorov 系统, 我们在讨论 Kolomogorov 系统, 不仅仅由哈密顿函数的导数与零的关系就确定系统是耗散的。图 8 绘制出了哈密顿能量 H 随时间的变化的图像, 显然是耗散系统, 所以体积 V 耗散进而能量减少如图 9 所示。并且最终减小到零, 整个系统没有能量参与, 此时为 Malkus 水轮旋转的某一时刻, 将其中的外力矩突然撤销(停止注水), 由于能量在某一时刻会消耗为零, 水轮将静止下来。

模式四: 系统在惯性力矩, 内力矩和外力矩下, 即系统包含内能和驱动因素, 但不包含耗散因素, 对应的方程为

$$\dot{X} = \{X, U\} + f = \begin{pmatrix} \sigma y \\ -xy - \sigma \rho x \\ xy \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\rho(1 + \sigma) \end{pmatrix} \quad (9)$$

由于存在外力矩 f , 总的角动量在外力矩的方向发展, 实际上由于水的注入, 系统的动能和势能都会增加, 随着时间的增长, 导致了能量的增加, 如图 10、图 11 所示。这意味着轨道不仅存在周期加倍移动, 而且还被外力矩拉伸以产生螺旋状曲线, 如图 12 所示。图 13 显示状态变量 y 的振荡频率随时间增长的轨迹图。

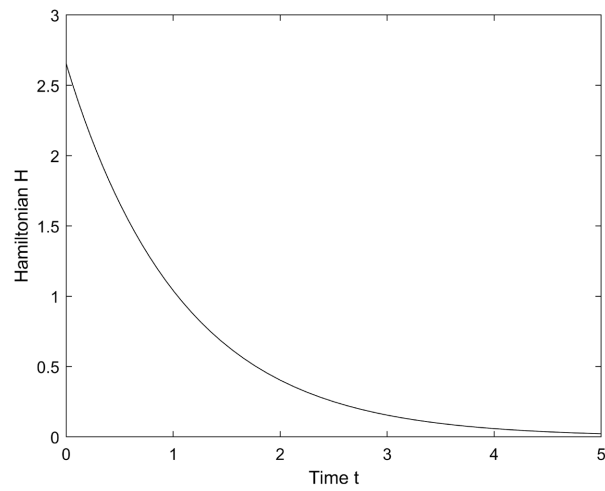


Figure 8. Hamiltonian energy evolution diagram
图 8. 哈密顿能量演化图

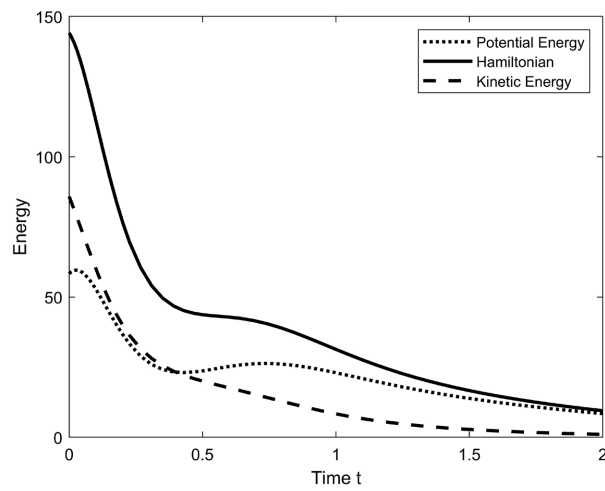


Figure 9. Energy evolution diagram
图 9. 能量演化图

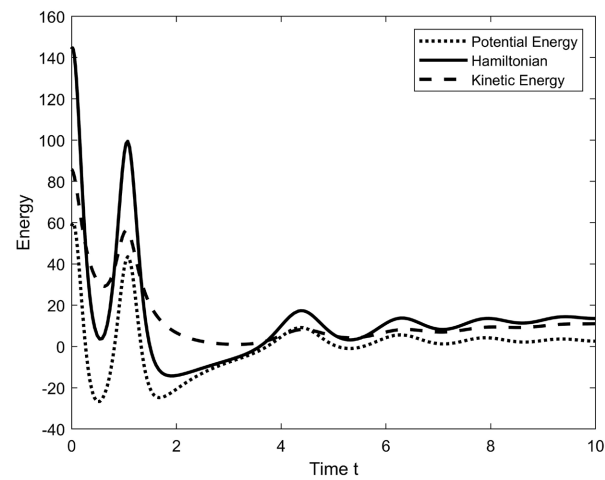


Figure 10. Energy evolution diagram
图 10. 能量演化图

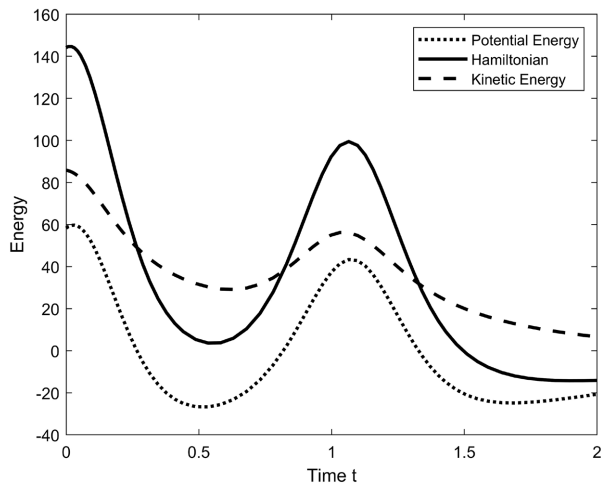


Figure 11. Hamiltonian energy evolution diagram

图 11. 哈密顿能量演化图

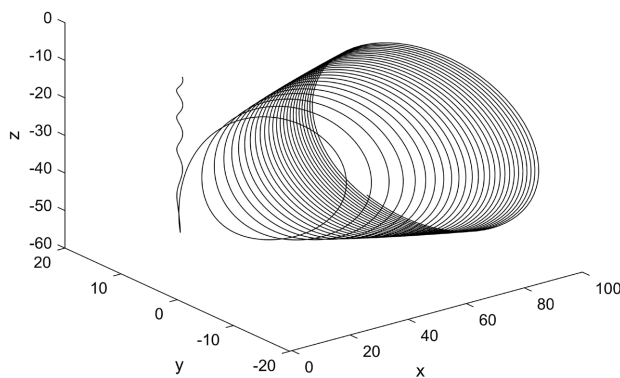


Figure 12. Three dimensional spiral orbit

图 12. 三维螺旋轨道

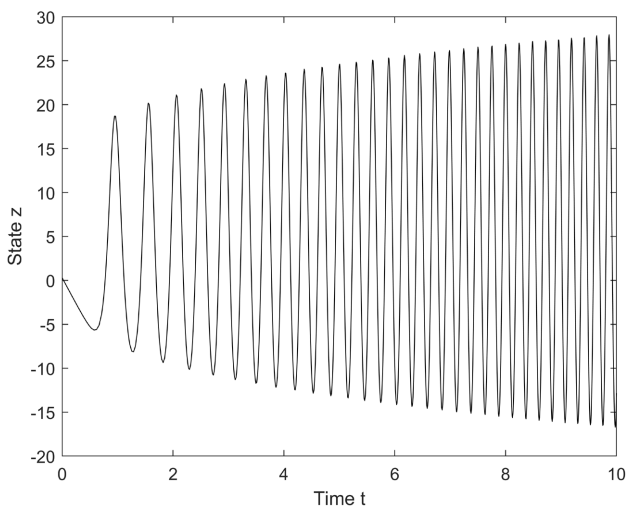


Figure 13. Trajectory of state variable y

图 13. 状态变量 y 的轨迹

为了分析比较各种力矩对实际 Malkus 水轮系统的转动的影响以及作用, 上面四种模式均为虚拟的理

想状态, 下面模式五才是真实存在的模式。

模式五: 系统包含全部力矩, 即系统包含内能, 同时包含耗散因素和驱动因素, 对应的方程为

$$\dot{X} = \{X, H\} - \Lambda X + f = \begin{pmatrix} \sigma y \\ -xz - \sigma \rho x \\ xy \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sigma x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\rho(1+\sigma) \end{pmatrix} \quad (10)$$

固定 $\sigma = 4$, 当 $\rho = 68$ 时, 系统的庞加莱截面图和混沌吸引子图如图 14、图 15 所示。其中的运动轨迹十分复杂, 又有混沌吸引子出现。

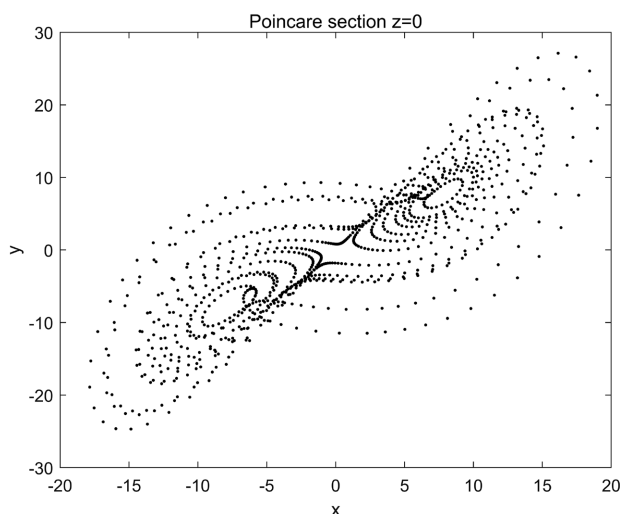


Figure 14. Poincaré interface diagram for $\rho = 68$

图 14. $\rho = 68$ 时的庞加莱截面图

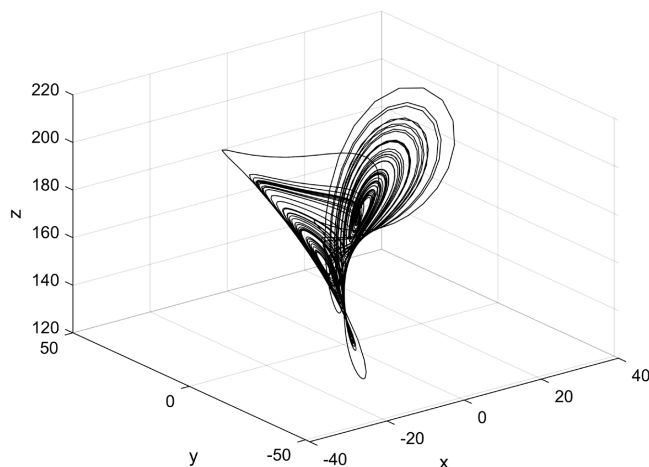


Figure 15. The attractor graph when $\sigma = 4, \rho = 68$

图 15. $\sigma = 4, \rho = 68$ 时的吸引子图

取 $\sigma = 4$, 模型的动力学行为将随着 ρ 的大小变化而变化。如图 16 为当 $0 < \rho < 300$ 时的分叉图, 图 17 为对应的最大 Lyapunov 指数图。当 $\rho = 1.065386$ 时, 模型开始出现分叉, $\rho > 35.54$, 开始发生混沌, 混沌区中在 $75.688 < \rho < 110$ 时出现一个明显的周期窗口。图 18、图 19 为系统的功率谱图和返回映射图。

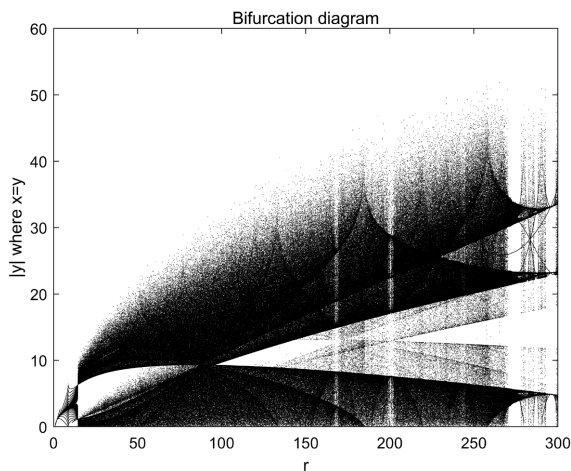


Figure 16. Bifurcation graph of state variable y when $\sigma = 4$
图 16. $\sigma = 4$ 时状态变量 y 的分叉图

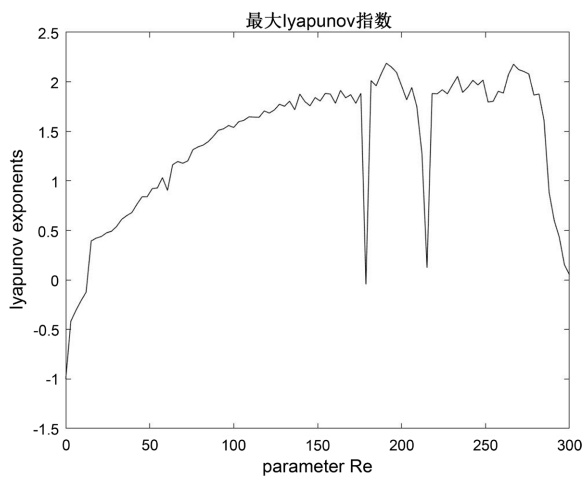


Figure 17. The largest Lyapunov exponent when $\sigma = 4$
图 17. $\sigma = 4$ 时的最大 Lyapunov 指数

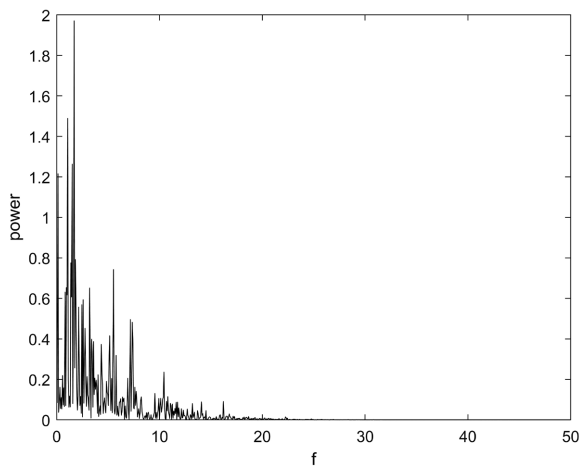


Figure 18. Power spectrum at $\sigma = 4, \rho = 68$
图 18. $\sigma = 4, \rho = 68$ 时的功率谱

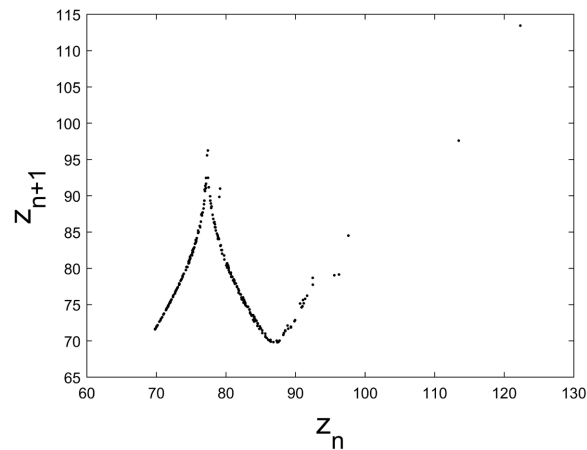


Figure 19. Return mappings at $\sigma = 4, \rho = 68$

图 19. $\sigma = 4, \rho = 68$ 时的返回映射

根据以上混沌指标图可判断, 系统(10)出现混沌吸引子, 此状态下的 Malkus 水轮处于混沌旋转状态。模式三中没有外力矩, 系统解趋于一个平衡点, Malkus 水轮将在某一时刻静止下来。模式四系统解在没有耗散的基础上无限增长, Malkus 水轮将永不停息地旋转运动。因此外力和耗散耦合是 Malkus 水轮系统产生混沌吸引子的必要条件, 此时水轮装置发生混沌旋转。然而当外力和耗散不匹配时, 耗散并不能保证水轮系统能量衰减, 也就是说二者虽然是产生混沌地基本因素, 但外力和耗散简单耦合并不总是使系统产生混沌。只有当 $35.6 < \rho < 75.7$ 时, 水轮系统(10)才产生混沌行为, Malkus 水轮出现混沌旋转。

4. 结语

本文研究了 Malkus 水轮系统的动力学机理和能量转换, 通过理论分析和数值仿真结果阐释了 Malkus 水轮混沌旋转的力学机理和物理意义。探讨了 Malkus 水轮系统作为 Kolmogorov 系统的力学和物理意义。通过虚拟四种模式, 对四种类型的力矩进行逐个分析、解释其不能产生混沌的内在机理。模式五一全力矩力矩耦合模式, 即真实物理场景, 从理论分析 Malkus 水轮产生混沌旋转的力学机理, 发现内能、耗散因素和驱动因素并存是产生混沌旋转的必要因素, 此时 Malkus 水轮发生混沌旋转。

参考文献

- [1] Poincare, H. (1893) Les Methodes Nouvelles de la Mecanique Celeste. Gauthier-villar, Paris, 23-30.
- [2] Lorenz, E.N. (1963) Deterministic Nonperiodic Flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, **20**, 130-141. [https://doi.org/10.1175/1520-0469\(1963\)020<0130:DNF>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0469(1963)020<0130:DNF>2.0.CO;2)
- [3] Malkus, W.V.R. (1972) Non-Periodic Convection at High and Low Prandtl Number. *Memoires de la Societe Royale des Sciences de Liege*, **4**, 125-128.
- [4] Miroslav, K. and Godfrey, G. (1992) Theory for the Experimental Observation of Chaos in a Rotating Water Wheel. *Physical Review A*, **45**, 626-637. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.45.626>
- [5] Leslie, E.M. (2007) The Malkus-Lorenz Water Wheel Revisited. *American Journal of Physics*, **75**, 1114-1122. <https://doi.org/10.1119/1.2785209>
- [6] Ashish, B. and Van Gorder, R.A. (2018) Chaos in a Non-Autonomous Nonlinear System Describing Asymmetric Water Wheels. *Nonlinear Dynamics*, **93**, 1977-1988. <https://doi.org/10.1007/s11071-018-4301-3>
- [7] Arnold, V. (1991) Kolmogorov's Hydrodynamic Attractors. *Proceedings of the Royal Society of London, Series A*, **434**, 19-22. <https://doi.org/10.1098/rspa.1991.0077>
- [8] Pasini, A. and Pelino, V. (2000) A Unified View of Kolmogorov and Lorenz Systems. *Physics Letters A*, **275**, 435-446. [https://doi.org/10.1016/S0375-9601\(00\)00620-4](https://doi.org/10.1016/S0375-9601(00)00620-4)

- [9] 王贺元. Couette-Taylor 流的力学机理与能量转换[J]. 数学物理学报, 2020, 40(1): 243-256.
- [10] 成乃涵, 程敏熙, 李春兰, 林莫迪, 杨上照. 利用洛伦兹水车研究混沌现象[J]. 大学物理, 2020, 39(1): 66-70.
- [11] Marsden, J. and Ratiu, T. (2002) Introduction to Mechanics and Symmetry: A Basic Exposition of Classical Mechanical Systems. Springer, Berlin.
- [12] Boldrighini, C. and Franceschini, V.A. (1979) Five-Dimensional Truncation of the Plane Incompressible Navier-Stokes Equations. *Communications in Mathematical Physics*, **64**, 159-170. <https://doi.org/10.1007/BF01197511>
- [13] Strogatz, S.H. (1994) Nonlinear Dynamics and Chaos. Perseus Books, Reading.
- [14] Liang, X.Y. and Qi, G.Y. (2017) Mechanical Analysis and Energy Conversion of Chen Chaotic System. *General and Applied Physics*, **47**, 288-294. <https://doi.org/10.1007/s13538-017-0495-y>
- [15] Liang, X.Y. and Qi, G.Y. (2017) mechanical Analysis of Chen Chaotic System. *Chaos, Solitons and Fractals*, **98**, 173-177. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2017.03.021>
- [16] Qi, G. and Ling, X. (2016) Mechanical Analysis of Qi Four-Wing Chaotic System. *Nonlinear Dynamics*, **86**, 1095-1106. <https://doi.org/10.1007/s11071-016-2949-0>
- [17] Pelino, V., Maimone, F. and Pasini, A. (2014) Energy Cycle for the Lorenz Attractor. *Chaos, Solitons and Fractals*, **64**, 67-77. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2013.09.005>