Finance 金融, 2020, 10(6), 560-567
Published Online November 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/fin
https://doi.org/10.12677/fin.2020.106058

可信性测度下基于均值–方差–VaR–偏度–正弦熵的模糊投资组合分析

于　轩

上海对外经贸大学，统计与信息学院，上海
Email: yuxuan_18@163.com

收稿日期：2020年11月2日；录用日期：2020年11月17日；发布日期：2020年11月24日

摘　要

本文在可信性理论的基础上，将资产收益率视为模糊变量，建立了均值–方差–VaR–偏度–正弦熵的多目标模糊投资组合模型，利用遗传算法求解最优投资策略。研究表明：模糊VaR的引入及新模型的构建，有助于更好地刻画资产收益率的风险特征，从而发现更优的投资组合策略。

关键词

可信性测度，模糊VaR，模糊投资组合模型，模糊夏普比率

Fuzzy Portfolio Analysis Based on Mean-Variance-VaR-Skewness-Sine Entropy under Credibility Measure

Xuan Yu

School of Statistics and Information, Shanghai University of International Business and Economics, Shanghai
Email: yuxuan_18@163.com

Received: Nov. 2nd, 2020; accepted: Nov. 17th, 2020; published: Nov. 24th, 2020

Abstract

In this paper, a new fuzzy multi-objective mean-variance-VaR-skewness-sine entropy portfolio model is proposed by assuming the rate of return on the risky asset is a fuzzy variable, based on the credibility theory. In order to solve the proposed model, we design a genetic algorithm. Then,

文章引用: 于轩. 可信性测度下基于均值–方差–VaR–偏度–正弦熵的模糊投资组合分析[J]. 金融, 2020, 10(6): 560-567. DOI: 10.12677/fin.2020.106058

numerical examples show that the extension of the model and the introduction of fuzzy VaR are helpful to characterize the risk characteristics of asset returns and make a contribution to the investment portfolio strategies.

Keywords

Credibility Measure, Fuzzy VaR, Fuzzy Portfolio Model, Fuzzy Sharpe Ratio

1. 引言

现代投资组合理论的研究核心问题是投资者如何在不确定的环境下将资产进行合理有效的配置。自1952 年 Markowitz [1]提出均值－方差投资组合模型以来，投资组合理论作为一种有效的资产配置工具得到广泛关注。投资者所面临的市场是复杂多变的，不仅具有随机不确定性，还具有模糊不确定性。传统的投资组合研究大多数是建立在随机不确定环境上，近年来随着对金融市场的不确定性深入研究，模糊不确定性得到越来越多的关注。

Zadeh (1965) [2]首先提出了模糊集合理论，Tanaka (2000) [3]提出上下可能性分布，在此基础上提出可能性均值、可能性方差和可能性协方差(Carlsson 和 Fuller (2001) [4]，Zhang 和 Nie (2003) [5]，Zhang 和 Nie (2004) [6])，并基于模糊可能性理论研究构建投资组合问题(Wang 和 Zhu (2002) [7]，Zhang 和 Wang 等(2007) [8]，Tsaur (2013) [9]，Zhang (2013) [10])。

可能性测度可以刻画模糊不确定环境下投资组合的收益和风险，但是它不满足自对偶性。为了改善这个缺陷，Liu (2002) [11]在模糊事件的可能性测度和必要性测度基础上，定义了满足自对偶性的可信性测度，并给出了基于可信性测度的模糊变量的均值和方差等相关定义。Huang (2008) [12]在可信性测度的基础上提出了均值－半方差模糊投资组合模型和带模糊参数的均值－方差－偏度投资组合模型。Huang (2008) [13]在可信性测度的基础上定义了熵，以熵代替方差作为风险度量，建立了均值－熵模糊投资组合模型。王灿杰和邓雪(2019) [14]在可信性理论基础上建立了带融资约束条件的均值－熵－偏度三目标模糊投资组合模型，通过对约束条件处理方法，外部档案维护方法等关键算子的改良，提出了一种新的约束多目标粒子群算法，并利用该算法求解模糊投资组合模型。蔡小龙等(2017) [15]引入可信性理论和偏度约束，建立了模糊情况下的均值－方差－偏度－正弦熵多目标投资组合优化模型，以及含有收益及风险系数的单目标投资组合优化模型，利用遗传算法优化投资策略。这里方差衡量资产实际收益率与期望收益率的偏离程度，偏度衡量资产之间尾部风险特征，正弦熵衡量变量之间不确定性程度，但是没有刻画投资者可能遭受的最大损失的风险度量。而 Wang 等(2009) [16]提出的模糊 VaR，可以计算投资者给定置信水平下的最大损失，从而有助于对投资风险进行更好地评估。Wang 等(2011) [17]构建了均值－VaR 模糊投资组合模型，利用改进粒子群算法进行优化；Wang 等(2013) [18]研究了均值－方差－VaR 的多目标模糊投资组合。

本文从可信性角度出发，基于 Wang 等(2009 [16], 2011 [17])和蔡小龙等(2017) [15]的研究，以均值来刻画收益，用方差、VaR、偏度和正弦熵等来度量风险，构建新的多目标模糊投资组合模型并进行实证分析，并进行多角度对比分析。

2. 模糊风险测度

2.1. 模糊集及模糊变量

(1) 模糊集(Zadeh (1956) [2])：通过隶属度函数的方式提出了模糊集的概念。

设 $\tilde{A}$ 是论域 X 到 $[0,1]$ 的一个映射，则称 $\tilde{A}$ 是 X 上的模糊集，$\tilde{A}$ 的隶属度函数 $\mu_{\tilde{A}}(x)$ 定义为

$$\tilde{A}: X \mapsto [0,1],\ x \mapsto \mu_{\tilde{A}}(x)$$

(2) 模糊变量(Liu (2002) [11])：模糊变量是一个从可信性空间 $(\Theta, \mathcal{P}, Cr)$ 到实数集 $\mathcal{R}$ 的函数。

在某些特殊情况下，模糊变量有三角模糊数、梯形模糊数、高斯模糊数等。为了计算方便，本文选取三角模糊数。

三角模糊数：设模糊集 $\tilde{A}: X \mapsto \mathbb{R}$，若其隶属度函数 $\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \dfrac{t-a}{b-a}, & a \le t \le b \\ \dfrac{t-c}{b-c}, & b \le t \le c \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$，则称 $\tilde{A}$ 为三角模糊数，用记号 $\tilde{A} = (a,b,c)$ 来表示，a 为收益率中值，b 和 c 分别为相对于收益率中值的左右宽度，三角模糊数的中值与最小值的距离为左宽度，最大值与中值的距离为右宽度。

2.2. 模糊变量的数字特征

设 ξ 为一个模糊变量，μ 作为其隶属函数，而 u 是一个实数，则 $\{\xi \le u\}$ 的可能性、必要性和可信性的测度可以定义如下(Liu (2002) [11])：

$$Pos\{\xi \le u\} = \sup_{x \le u} \mu(x),$$

$$Nec\{\xi \le u\} = 1 - \sup_{x > u} \mu(x),$$

$$Cr\{\xi \le u\} = \frac{1}{2}\left(pos\{\xi \le u\} + Nec\{\xi \le u\}\right)。$$

在以上的三个公式中，$Pos\{\xi \le u\}$ 和 $Nec\{\xi \le u\}$ 为一对对偶模糊测度，$Cr\{\xi \le u\}$ 为自对偶，即

$$Cr\{\xi \le u\} + Cr\{\xi > u\} = 1。$$

设 ξ 为一个模糊变量，并存在有限期望，根据 Liu (2004)，其期望、方差、偏度、正弦熵可分别定义为：

$$E[\xi] = \int_0^{+\infty} Cr\{\xi \ge r\}\mathrm{d}r - \int_{-\infty}^0 Cr\{\xi \le r\}\mathrm{d}r,$$

期望存在的条件是两个积分中至少有一个是有限的。

$$V[\xi] = E\left[(\xi - E[\xi])^2\right] = \int_0^{+\infty} Cr\left\{(\xi - E[\xi])^2 \ge r\right\}\mathrm{d}r,$$

$$S[\xi] = E\left[(\xi - E[\xi])^3\right] = \int_0^{+\infty} Cr\left\{(\xi - E[\xi])^3 \ge r\right\}\mathrm{d}r,$$

$$SE[\xi] = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\pi\phi(x))\mathrm{d}x,$$

其中 $\phi(x) = Cr\{\xi \le r\}$。

在模糊环境下，将某项投资的模糊损失变量设为 $\mathcal{L}$ （$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i w_i$），置信水平为($1-\beta$)的模糊 VaR (Wang 等(2011) [17])可以表示为：$VaR_{1-\beta} = \sup\left\{\lambda \mid Cr\{\mathcal{L} \ge \lambda\} \ge \beta\right\}$，其中 $\beta \in (0,1)$。

特别地，当资产收益率视为三角模糊数，用 $\xi_i=(a_i,b_i,c_i),(i=1,2,3,\cdots,n)$ 表示第 i 种证券的收益率，w_i 表示投资第 i 种证券的权重。证券投资组合收益率 $\sum_{i=1}^n \xi_i w_i$ 的期望收益、方差、偏度、正弦熵、VaR 的表达式分别为：

$$E\left(\sum_{i=1}^n \xi_i w_i\right)=\sum_{i=1}^n \frac{a_i+2b_i+c_i}{4} w_i,$$

$$V\left(\sum_{i=1}^n \xi_i w_i\right)=\sum_{i=1}^n w_i^2\left(\frac{33\alpha_i^3+21\alpha_i^2\gamma_i+11\gamma_i^2\alpha_i-\gamma_i^3}{384\alpha_i}\right),$$

$$S\left(\sum_{i=1}^n \xi_i w_i\right)=\frac{1}{32}\sum_{i=1}^n w_i^3\left[\left(c_i-a_i\right)^2\left(c_i-2b_i+a_i\right)\right],$$

$$SE\left(\sum_{i=1}^n \xi_i w_i\right)=\frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^n\left[w_i\left(c_i-a_i\right)\right] \text{和}$$

$$VaR_{1-\beta}=\begin{cases}\sum_{i=1}^n w_i\left[\left(1-2\beta\right)a_i+2\beta b_i\right], & 0<\beta\le 0.5\\ \sum_{i=1}^n w_i\left[\left(2-2\beta\right)b_i+\left(2\beta-1\right)c_i\right], & 0.5<\beta\le 1\end{cases},$$

其中 $\alpha_i=\max\{b_i-a_i,c_i-b_i\}$，$\gamma_i=\min\{b_i-a_i,c_i-b_i\}$。

3. 投资组合优化模型

3.1. 模型构建

本文建立基于均值－方差－VaR－偏度－正弦熵投资组合模型，如下：

$$\min VaR_{1-\beta},$$

$$\max E\left(\sum_{i=1}^n \xi_i w_i\right),$$

$$\min V\left(\sum_{i=1}^n \xi_i w_i\right),$$

$$\max S\left(\sum_{i=1}^n \xi_i w_i\right),$$

$$\max SE\left(\sum_{i=1}^n \xi_i w_i\right),$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}0\le \sum_{i=1}^n w_i\le 1\\ 0\le w_i\le 1, i=0,\cdots,n\end{cases}。$$

利用线性加权方法，引入偏好参数 λ_i，将多目标投资组合模型转化为如下单目标优化模型：

$$\min\left\{\lambda_1 VaR_{1-\beta}+\lambda_2\left(-E\left(\sum_{i=1}^n \xi_i w_i\right)\right)+\lambda_3 V\left(\sum_{i=1}^n \xi_i w_i\right)+\lambda_4\left(-S\left(\sum_{i=1}^n \xi_i w_i\right)\right)+\lambda_5\left(-SE\left(\sum_{i=1}^n \xi_i w_i\right)\right)\right\},$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{i=1}^n \lambda_i=1\\ 0\le \lambda_i\le 1, i=1,\cdots,n\\ 0\le \sum_{i=1}^n w_i\le 1\\ 0\le w_i\le 1, i=0,\cdots,n\end{cases}。$$

3.2. 模型评价

夏普比率(SR)是一种用来衡量投资组合的风险调整回报的指数。Kar 等人(2019) [19]定义了模糊夏普

比率(FSR)，其表达式为

$$\mathrm{FSR}=\frac{E\left[\sum_{i=1}^{n}\xi_i w_i\right]-R_0}{V\left[\sum_{i=1}^{n}\xi_i w_i\right]},$$

其中 R_0 是基准投资组合的收益率，$E\left[\sum_{i=1}^{n}\xi_i w_i\right]$ 表示模糊收益率，$V\left[\sum_{i=1}^{n}\xi_i w_i\right]$ 表示模糊方差。本文设 $R_0=0$。对于决策者所承担的风险，SR 的较高价值提供了更好的投资组合回报。因此 FSR 越高，则说明投资组合效果越好。

4. 实证分析

4.1. 数据来源

选择上证 50 指数成分股中的 10 只股票作为研究样本，分别是洛阳钼业(603993)、中国平安(601318)、中国人寿(601628)、康美药业(600518)、中信证券(600030)、大秦铁路(601006)、北方稀土(600111)、南方航空(600029)、上汽集团(600104)、中国交建(601800)。数据选取的时间区间为 2017-01-01 至 2018-06-30，总计 77 周的收益数据。采用对数收益率，即证券 i 在第 j 周的周收益率 $r_{i,j}=\ln\left(\frac{p_{i,j}}{p_{i,j-1}}\right)$，其中 $p_{i,j}$ 和 $p_{i,j-1}$ 分别是证券 i 在第 j 周和第 $j-1$ 周的周收盘价。数据来自于国泰安 CSMAR 数据库。

根据数据求得模糊收益率 $\xi_i=(a_i,b_i,c_i),(i=1,2,3,\cdots,n)$ (金秀等(2017) [20])，见表 1。

Table 1. Triangular fuzzy rate of return
表 1. 三角模糊收益率

股票	三角模糊收益率
600029	(0.002692, 0.177092, 0.115943)
600030	(0.001812, 0.217202, 0.094767)
600104	(0.006726, 0.087417, 0.06095)
600111	(0.000891, 0.11745, 0.179305)
600518	(−0.00143, 0.092921, 0.0777787)
601006	(0, 0.11602, 0.059268)
601318	(0.002826, 0.168111, 0.094013)
601628	(−0.00655, 0.148713, 0.122105)
601800	(−0.00542, 0.103049, 0.125236)
603993	(−0.0132, 0.222763, 0.19552)

4.2. 最优投资组合策略

本部分我们基于表 1 的数据和均值－方差－VaR－偏度－正弦熵投资组合模型，运用 python 中的 geapty 库中的遗传算法工具计算，设置不同偏好参数，求解最优投资组合，并对模型进行评价分析。为了对比模糊 VaR 的引入对优化策略的影响，我们主要对如下三种情况进行分析：

模型 I：均值－方差－VaR－偏度－正弦熵模糊投资组合模型：以均值来刻画收益，用方差、VaR、偏度和正弦熵等来度量风险。

模型 II：均值－方差－VaR－正弦熵模糊投资组合模型：以均值来刻画收益,用方差、VaR 和正弦熵

等来度量风险。

模型 III：均值－方差－偏度－正弦熵模糊投资组合模型：以均值来刻画收益，用方差、偏度和正弦熵等来度量风险。

具体情形见表 2 所示：

Table 2. Model construction

表 2. 模型构建

偏好参数	方差	偏度	VaR	正弦熵	模型
$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 1$	✓	✓	✓	✓	模型 I
$\lambda_4 = 0$ $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 1$	✓		✓	✓	模型 II
$\lambda_1 = 0$ $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 1$	✓	✓		✓	模型 III

说明：对比模型 I 和模型 II，可以发现偏度的引入对于投资组合的影响；对比模型 I 和模型 III，可以发现模糊 VaR 的引入对于投资组合的影响；对比模型 II 和模型 III，可以发现偏度和模糊 VaR 的引入对于投资组合的不同影响。

为了对比模糊 VaR 中置信水平的影响，本文分别考虑 $\beta = 0.2$，0.1 和 0.05 三种不同情况下。

Table 3. Model E-V-VaR-S-SE ($\beta = 0.2$) portfolio result

表 3. 模型 E-V-VaR-S-SE ($\beta = 0.2$)投资组合的结果

λ_i	均值	方差	FSR
(0.3, 0.3, 0.2, 0.1, 0.1)模型 I	0.08834029	0.00026526	333.0327
(0.4, 0.3, 0.2, 0, 0.1)模型 II	0.09006627	0.00030431	295.9688
(0, 0.3, 0.4, 0.2, 0.1)模型 III	0.0916398	0.00044865	204.2568

Table 4. Model E-V-VaR-S-SE ($\beta = 0.1$) portfolio result

表 4. 模型 E-V-VaR-S-SE ($\beta = 0.1$)投资组合的结果

λ_i	均值	方差	FSR
(0.3, 0.3, 0.2, 0.1, 0.1)模型 I	0.09078368	0.00028836	314.8276
(0.4, 0.3, 0.2, 0, 0.1)模型 II	0.0979784	0.00037821	259.0582
(0, 0.3, 0.4, 0.2, 0.1)模型 III	0.0916398	0.00044865	204.2568

Table 5. Model E-V-VaR-S-SE ($\beta = 0.05$) portfolio result

表 5. 模型 E-V-VaR-S-SE ($\beta = 0.05$)投资组合的结果

λ_i	均值	方差	FSR
(0.3, 0.3, 0.2, 0.1, 0.1)模型 I	0.07659501	0.0002829	270.7494
(0.4, 0.3, 0.2, 0, 0.1)模型 II	0.11222875	0.00053848	208.4177
(0, 0.3, 0.4, 0.2, 0.1)模型 III	0.0916398	0.00044865	204.2568

分析表 3~5，我们可以得到如下结论：

在给定置信水平下以及偏好参数下，模糊偏度的引入，能够更好地对尾部风险进行控制，同时模糊夏普比率也较高(比较模型 I 和模型 II)；模糊 VaR 的引入可以获得模糊夏普比率最高的投资组合，均值－方差－VaR－偏度－正弦熵的模糊投资组合模型效果较好(比较模型 I 和模型 III)；相较于模糊偏度，包含模糊 VaR 的投资组合模型效果更好(比较模型 II 和模型 III)。在相同的偏好参数下，β 越大，夏普比率越高，从而最优投资策略更优。

5. 结论

本文考虑证券市场的模糊不确定性，将资产收益率视为模糊变量，引入模糊 VaR，构建均值－方差－偏度－正弦熵的模糊投资组合模型。考虑不同偏好参数、不同置信水平下的模糊 VaR，基于上证 50 指数成分股中 10 只股票，利用遗传算法进行实证分析。与已有文献相比，本文提出的模型具有更优的夏普比率表现。模糊 VaR 可以更好地衡量投资组合的未来风险，并且可以通过改变置信水平，从而得到投资组合的最大损失；同时使用模糊 VaR 与模糊偏度进行策略选择，可以更好对资产收益率的尾部风险进行控制，从而使得投资组合模型更优。

参考文献

[1] Markowitz, H. (1952) Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, **7**, 77-91. https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1952.tb01525.x

[2] Zadeh, L.A. (1965) Information and Control. *Fuzzy Sets*, **8**, 338-353. https://doi.org/10.1016/S0019-9958(65)90241-X

[3] Tanaka, H., Guo, P. and Türksen, I.B. (2000) Portfolio Selection Based on Fuzzy Probabilities and Possibility Distributions. *Fuzzy Set and Systems*, **111**, 387-397. https://doi.org/10.1016/S0165-0114(98)00041-4

[4] Carlsson, C. and Fuller, R. (2001) On Possibilistic Mean Value and Variance of Fuzzy Numbers. *Fuzzy Sets and Systems*, **122**, 315-326. https://doi.org/10.1016/S0165-0114(00)00043-9

[5] Zhang, W.G. and Nie, Z.K. (2003) On Possibilistic Variance of Fuzzy Numbers. Lecture Notes in Artificial Intelligence Vol. 2639, *International Workshop on Rough Sets*, *Fuzzy Sets*, *Data Mining*, *and Granular-Soft Computing*, Chongqing, 26-29 May 2003, 398-402. https://doi.org/10.1007/3-540-39205-X_66

[6] Zhang, W.G. and Nie, Z.K. (2004) On Admissible Efficient Portfolio Selection Problem. *Applied Mathematics and Computation*, **159**, 357-371. https://doi.org/10.1016/j.amc.2003.10.019

[7] Wang, S. and Zhu, S. (2002) On Fuzzy Portfolio Selection Problems. *Fuzzy Optimization & Decision Making*, **1**, 361-377. https://doi.org/10.1023/A:1020907229361

[8] Zhang, W., Wang, Y. and Chen, Z. (2007) Possibilistic Mean-Variance Models and Efficient Frontiers for Portfolio Selection Problem. *Information Sciences*, **177**, 2787-2801. https://doi.org/10.1016/j.ins.2007.01.030

[9] Tsaur, R.C. (2013) Fuzzy Portfolio Model with Different Investor Risk Attitudes. *European Journal of Operational Research*, **227**, 385-390. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2012.10.036

[10] Zhang, X., Zhang, W. and Xiao, W. (2013) Multi-Period Portfolio Optimization under Possibility Measures. *Economic Modelling*, **35**, 401-408. https://doi.org/10.1016/j.econmod.2013.07.023

[11] Liu, B. and Liu, Y.K. (2002) Expected Value of Fuzzy Variable and Fuzzy Expected Value Models. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, **10**, 445-450. https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2002.800692

[12] Huang, X. (2008) Mean-Semivariance Models for Fuzzy Portfolio Selection. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **217**, 1-8. https://doi.org/10.1016/j.cam.2007.06.009

[13] Huang, X. (2008) Mean-Entropy Models for Fuzzy Portfolio Selection. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, **16**, 1096-1101. https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2008.924200

[14] 王灿杰, 邓雪. 基于可信性理论的均值–熵–偏度投资组合模型及其算法求解[J]. 运筹与管理, 2019, 28(2): 154-159.

[15] 蔡小龙, 周荣喜, 郑庆华. 基于可信性均值–方差–偏度–正弦熵的投资组合模型[J]. 北京化工大学学报(自然科学版), 2017, 44(2): 119-123.

[16] Wang, B., Watada, J. and Pedrycz, W. (2009) Value-at-Risk-Based Two-Stage Fuzzy Facility Location Problems.

IEEE Transactions on Industrial Informatics, **5**, 465-482. https://doi.org/10.1109/TII.2009.2022542

[17] Wang, B., Wang, S. and Watada, J. (2011) Fuzzy Portfolio Selection Models With Value-at-Risk. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, **19**, 758-769. https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2011.2144599

[18] Wang, B. and Watada, J. (2013) Multiobjective Particle Swarm Optimization for a Novel Fuzzy Portfolio Selection Problem. *IEEE Transactions on Electrical and Electronic Engineering*, **9**, 146-154. https://doi.org/10.1002/tee.21834

[19] Kar, M.B., Kar, S., Guo, S., Li, X. and Majumder, S. (2019) A New Bi-Objective Fuzzy Portfolio Selection Model and Its Solution Through Evolutionary Algorithms. *Soft Computing*, **23**, 4367-4381. https://doi.org/10.1007/s00500-018-3094-0

[20] 金秀, 曲晓洁, 刘家和. 考虑投资者心理的模糊多目标投资组合模型及交互式算法[J]. 系统管理学报, 2017, 26(6): 1081-1088.