

疫情冲击下基于ARMA-GARCH模型的道琼斯指数收益率及风险分析方法

魏东乾

新加坡国立大学艺术与社会科学学院, 新加坡

收稿日期: 2021年11月15日; 录用日期: 2021年12月22日; 发布日期: 2021年12月29日

摘要

本文使用ARMA-GARCH模型拟合, 分析了疫情期间美国股市2019年至2020年部分期间数据。首先对数据进行检验, 得出序列不平稳的结论; 应用ARMA-GARCH模型, 可以有效地拟合出道琼斯指数收益率序列, 得到期间的波动率大小, 通过图像能直观判断拟合模型后的波动率变化幅度; 通过VaR的滚动预测实证也证实了在3月份, 股市的投资风险显著上升。可以得出, 利用ARMA-GARCH模型进行股市收益率及风险判断是可行的, 拟合效果较好。但是, 利用ARMA-GARCH模型时应注意: 因为收益率序列的自相关与偏自相关图不是典型的时序图, 所以从时间序列图中要准确地把握好ARMA模型, 否则容易导致ARMA模型拟合存在偏差; GARCH模型可以进一步尝试其他分布的拟合。

关键词

ARMA-GARCH模型, 收益率, VaR预测, 股市风险

Dow-Jones Index Return and Risk Analysis Method Based on ARMA-GARCH Model under Epidemic Impact

Dongqian Wei

Faculty of Arts & Social Science, National University of Singapore, Singapore

Received: Nov. 15th, 2021; accepted: Dec. 22nd, 2021; published: Dec. 29th, 2021

Abstract

This paper uses ARMA-GARCH model fitting to analyze the data of US stock market during the epi-

demical period from 2019 to 2020. Firstly, we test the data and draw the conclusion that the sequence is unstable; using ARMA-GARCH model, we can effectively fit the return series of Dow-Jones index, get the volatility during the period, and intuitively judge the variation range of volatility after fitting the model through the image; through the rolling prediction of VaR, it is also confirmed that the investment risk of the stock market increased significantly in March. It can be concluded that it is feasible to use ARMA-GARCH model to judge stock market return and risk, and the fitting effect is good. However, when using ARMA-GARCH model, we should pay attention to: because the autocorrelation and partial autocorrelation diagrams of return series are not typical time series diagrams, we should accurately grasp the ARMA model from the time series diagram, otherwise it is easy to lead to deviation in the fitting of ARMA model; GARCH model can further try to fit other distributions.

Keywords

ARMA-GARCH Model, Return Rate, VaR Prediction, Stock Market Risk

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在疫情冲击下，道琼斯指数在 2020 年 3 月份出现了三次熔断，通过对道琼斯指数的收益率来观察疫情对股市的冲击影响。为了验证 ARMA-GARCH 模型对于疫情冲击下股市指数预测的有效性，本文通过 ARMA-GARCH 模型对道琼斯指数收益率进行拟合与预测分析，在 ARMA-GARCH 模型的基础上对数据进行风险的滚动预测与实证，评估道琼斯指数收益率的预期风险。本文选取了 2020 年 3 月份美国疫情爆发前后一定时期内的股市指数的数据作为实证研究的对象，数据检验后进行 ARMA-GARCH 模型拟合，应用 GARCH 模型的 VaR 进行滚动预测，验证预测效果。

2. ARMA-GARCH 模型介绍及相关文献

2.1. ARMA-GARCH 模型介绍[1]

一般的 ARMA(p, q)模型的形式为： $r_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^p \phi_i r_{t-i} + a_t - \sum_{i=1}^q \theta_i a_{t-i}$ ，其中 $\{a_t\}$ 是白噪声序列， p 和 q 都是非负整数。

GARCH 模型是 Bollerslev (1986)提出的广义 GARCH 模型。对于对数收益率序列 r_t ，令 $a_t = r_t - u_t$ 为时刻的新息，称 a_t 服从 GARCH(m, s)模型： $a_t = \sigma_t \varepsilon_t$ ， $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^s \beta_j \sigma_{t-j}^2$ 。GARCH 模型实际上就是在 ARCH 的基础上，增加考虑异方差函数的 p 阶自回归性而形成，它可以有效的拟合具有长期记忆性的异方差函数。ARCH 是 GARCH 模型的一个特例。

实际上 ARCH 模型是在 ARMA 模型的基础上提出来的，两者的区别在于扰动项的设置不同，在 ARMA 模型中扰动项是最简单的白噪声序列。在现代高频金融时间序列中，数据经常出现波动性聚集的特点，但从长期来看数据是平稳的，即长期方差(无条件方差)是定值，但从短期来看方差是不稳定的。对于这种条件异方差，传统的时间序列模型如 ARMA 模型识别不出来这一特征。

任何时间序列都由一个均值方程和一个方差方程所组成，一般的 ARMA 模型忽略了方差方程，因为残差是一个白噪声；而 GARCH 模型假设均值方程是一个常数，残差有 ARCH 效应。采用 ARMA-GARCH

模型分析，就是分别对均值和方差建模，即均值满足 ARMA 过程，残差满足 GARCH 过程的一个随机过程。

2.2. 相关文献叙述

相关学者运用 ARMA-GARCH 模型对股市指数及其他金融衍生产品指数的波动进行了分析、预测。黄轩、张青龙建立 ARMA-GARCH 模型，对“沪深 300 指数”的波动率进行分析，证明了 ARMA-GARCH 模型的分析效果优于单独使用 ARMA 模型、GARCH 模型的预测效果[2]。潘贵豪等利用时间序列的相关理论，建立了黄金价格的 ARMA-GARCH 模型进行实证分析，结果非常接近实际[3]。卢芊好等利用 DCC-GARCH 模型得到股市动态条件相关系数，经过技术处理，构建测度 A 股对央行公开市场操作敏感性的 VaR 模型，得出经济紧张时相对较小的事件也能达到股市联动的巨大作用[4]。张桂香探讨 VaR 技术在投资组合风险管理中的运用，并进行了实证分析，证明了 VaR 技术对于投资组合决策和绩效评估具有较好的效果[5]。何晓光以隔夜拆借数据为样本，建立 ARMA-GARCH 模型的利率风险测度 VaR 模型，分析了不同分布对不同场景的应用性[6]。张志强以沪深 300 指数为研究对象，建立了正态分布和 t 分布的 ARMA-GARCH 模型，研究表明基于 t 分布的 ARMA-GARCH 模型可以较好的沪深 300 指数的波动进行模拟[7]。总之，ARMA-GARCH 模型对于金融市场的指数预测应用较为广泛，但是针对当前疫情冲击作用下的分析文献还比较少见，本文对此进行了尝试。

3. 数据分析

数据来源于道琼斯指数 2019 年 1 月份至 2020 年 5 月份期间的 355 条样本数据，包括当日开盘价、当日最高价、当日最低价、当日收盘价、当日成交量以及调整后的收盘价等 6 条属性。时间序列 k 线图所示(图 1)，价格指数在 2020 年 3 月份急剧下降，同时成交量达到峰值，是平时十倍左右，在此之前的收盘价格都是呈稳步上升趋势，成交量比较平稳。

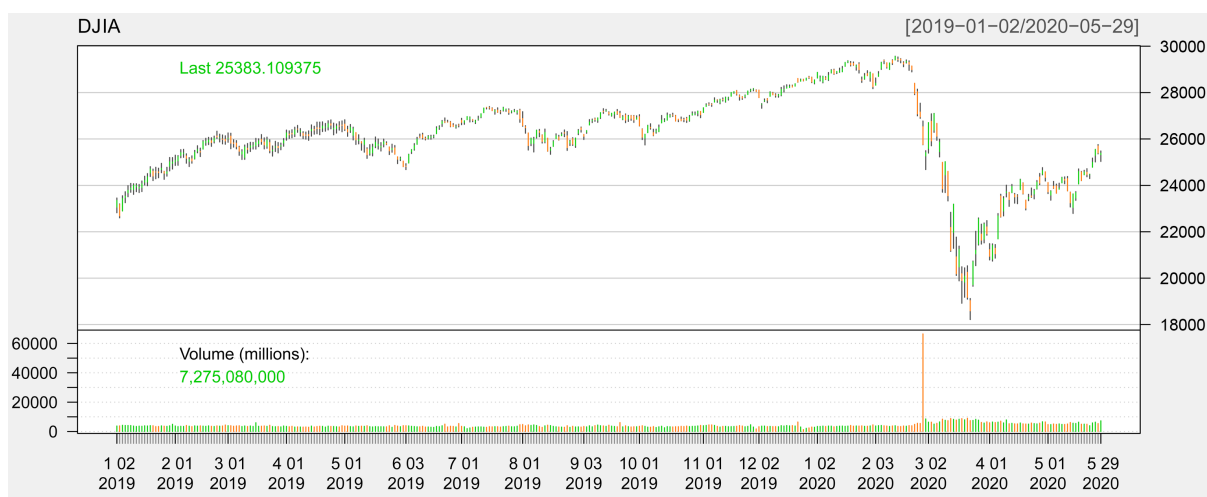


Figure 1. K-line chart of Dow-Jones index

图 1. 道琼斯指数 k 线图

属性变量矩阵估计如表 1 所示，开盘价和收盘价最高值分别为 29,440.00 与 29,551.00，对应时间分别是 2020 年 2 月 21 日与 2020 年 2 月 14 日，开盘价和收盘价的最低值分别为 19,028.00 与 18,592.00，对应时间均为 2020 年 3 月 23 日，股价处于明显下跌状态；2020 年 2 月 21 日至 3 月 23 日之间股市产生大幅度下降，在 2020 年 2 月 27 日成交额是平时数据的 10 倍左右。美股在 3 月份发生了 10 日 3 次熔断

的罕见情况。

可以看出，股市存在着短期周期性，2月份股市有下跌趋势应是正常现象。但在3月初美国疫情开始爆发，人们对债务危机出现预期心理，流动性放水加剧，导致股市低迷，说明疫情确实对美国股市产生了较大影响。

Table 1. Attribute variable matrix

表 1. 属性变量矩阵

	DJIA.Open	DJIA.High	DJIA.Low	DJIA.Close	DJIA.Volume	DJIA.Adjusted
Min.:	19028	Min.: 19121	Min.: 18214	Min.: 18592	Min.: 1.297e+09	Min.: 18592
1st Qu.:	25279	1st Qu.: 25523	1st Qu.: 25092	1st Qu.: 25387	1st Qu.: 3.336e+09	1st Qu.: 25387
Median:	26259	Median: 26422	Median: 26052	Median: 26258	Median: 3.653e+09	Median: 26258
Mean:	26103	Mean: 26285	Mean: 25909	Mean: 26109	Mean: 4.239e+09	Mean: 26109
3rd Qu.:	27190	3rd Qu: 27280	3rd Qu: 27079	3rd Qu: 27185	3rd Qu: 4.146e+09	3rd Qu: 27185
Max.:	29440	Max.: 29569	Max.: 29407	Max.: 29551	Max.: 6.650e+10	Max.: 29551

4. ARMA-GARCH 模型拟合

4.1. 数据检验分析

对道琼斯指数的收盘价格做 t 检验，结果为：t = 258.69，df = 354，p-value < 2.2e-16，说明不同样本之间差异显著。进行 Ljung-BoxQ 统计量检验，结果为：X-squared = 2709，df = 10，p-value < 2.2e-16 远小于 0.05，认为序列具有显著相关性，并非白噪声序列。

对道琼斯指数进行一阶对数差分计算收益率，即：

$$r_t = \ln P_t - \ln P_{(t-1)}$$

得到收益率时间序列图(图 2)，初步判断此时的收益率序列并不存在时间趋势项。进一步进行单位根检验，检验结果为：Lag Order = 10，Dickey-Fuller = -5.0265，p-value = 0.01，拒绝原假设，说明该序列不含有单位根，不是随机游走序列。对收益率序列进行 Ljung-Box 检验，Q 统计量检验的 p-value 小于 0.05，说明序列并不平稳，需要拟合 ARMA 均值方程模型。

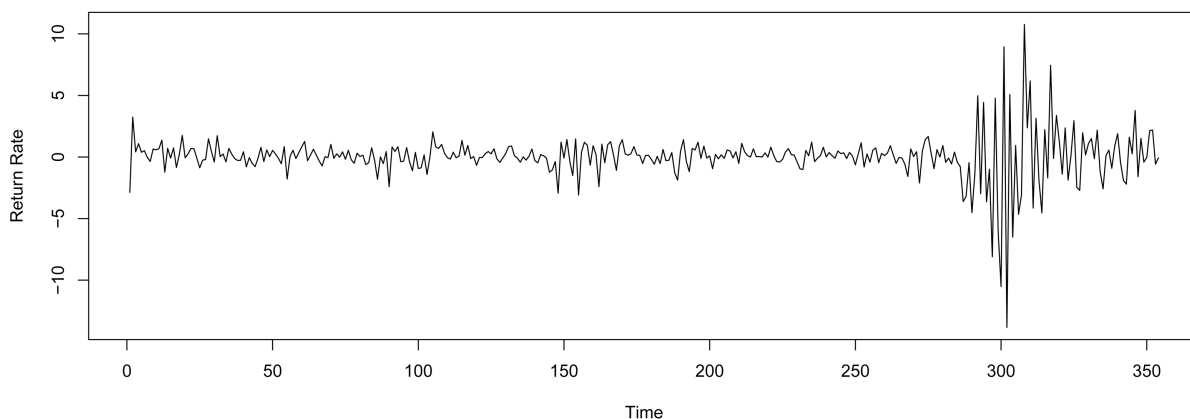


Figure 2. Time series of return rate

图 2. 收益率时间序列图

4.2. ARMA-GARCH 模型拟合

ARMA(p, q)均值方差模型为:

$$r_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^p \phi_i r_{t-i} + a_t - \sum_{i=1}^q \theta_i a_{t-i}$$

收益率的自相关系数图与偏自相关系数图如图 3 所示, 自相关系数和偏自相关系数均存在拖尾性, 即自相关系数和偏自相关系数均存在相关性。对自相关系数与偏自相关系数图进行调试, 最后拟合 ARMA(4, 2), 拟合后序列的残差相关系数图与偏自相关系数图如图 4 所示。

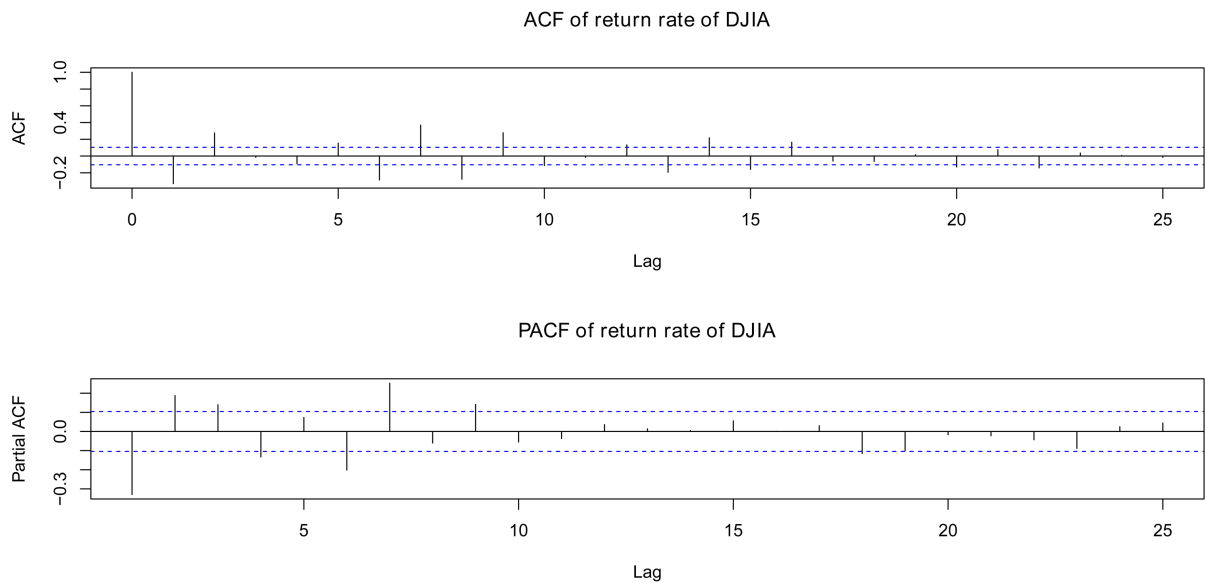


Figure 3. ACF and PACF of return rate of DJIA
图 3. 收益率的自相关系数图与偏自相关系数图

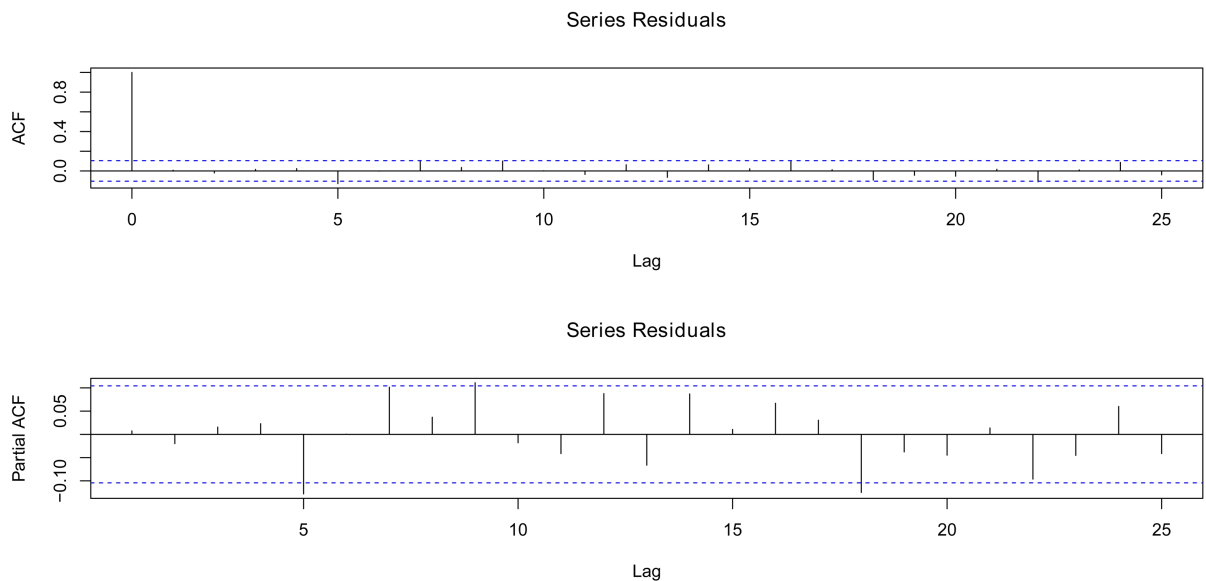


Figure 4. Fitted ACF and PACF of return rate of DJIA
图 4. 拟合后收益率的自相关系数图与偏自相关系数图

初步认为此时的残差序列是平稳序列，进一步做 Ljung-Box 检验，结果分别为 X-squared = 426.85，df = 10，p-value < 2.2e-16；Chi-squared = 154.82，df = 12，p-value < 2.2e-16。p-value 值大于 0.05，说明序列是平稳序列，ARMA 拟合良好。

对残差平方序列进行波动性检验，结果分别为：X-squared = 426.85，df = 10，p-value < 2.2e-16；Chi-squared = 154.82，df = 12，p-value < 2.2e-16。Ljung-Box 检验和拉格朗日乘数检验下，均显示残差序列是具有 ARCH 效应的，所以对残差进一步拟合 GARCH 条件异方差方程，即：

$$\begin{cases} a_t = G_t \Sigma_t \\ \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^S \beta_j \sigma_{t-i}^2 \end{cases}$$

其中 a_t 为均值方程后的残差，由于常见的 GARCH 模型通常是 GARCH(1, 1)，GARCH(1, 2)，GARCH(2, 2)，通过模型比较，最终选择使用 GARCH(1, 1) 的异方差方程，即运用 ARMA(4, 2)-GARCH(1, 1) 模型对收益率序列进行拟合，拟合结果如表 2 所示。

Table 2. Fitting results of return rate series

表 2. 收益率序列拟合结果

	Estimate	Std.	t value	Pr(> t)
mu	2.149e-02	8.217e-05	261.552	<2e-16
ar1	-8.138e-02	4.312e-05	-1887.307	<2e-16
ar2	9.999e-01	4.111e-05	24321.228	<2e-16
ar3	-2.183e-02	4.362e-05	-500.357	<2e-16
ar4	-1.290e-01	3.582e-05	-3602.046	<2e-16
ma1	9.635e-02	6.728e-05	1432.112	<2e-16
ma2	-9.998e-01	6.755e-05	-14799.746	<2e-16
omega	4.904e-02	1.681e-02	2.918	0.00352
alpha1	3.106e-01	6.969e-02	4.456	8.33e-06
beta1	6.874e-01	5.074e-02	13.547	<2e-16

各个系数的 t 检验全部通过，说明系数的解释作用显著，最终得到模型：

$$\begin{cases} r_t = 0.021493 - 0.081385r_{t-1} + 0.999893r_{t-2} - 0.021827r_{t-3} - 0.129009r_{t-4} + 0.096348a_t - 0.999764a_{t-1} \\ \sigma_t^2 = 0.049044 + 0.310568a_t^2 + 0.687393\sigma_{t-1}^2 \end{cases}$$

对该模型的残差项进行 ARCH 效应检验，结果为：Chi-squared = 8.3912，df = 12，p-value 0.7539。P-value 大于 0.05，说明残差不具备 ARCH 效应，模型拟合成功。拟合的波动率序列图如图 5 所示，在尾部波动率明显提高，说明序列在 3 月份的时候波动的很剧烈，和收益率的时间序列(图 2)对比可以发现，收益率在 3 月份的时候出现了剧烈的波动，两个图的结果是相吻合的，进一步说明股票市场出现了剧烈波动，疫情对股票市场产生了剧烈影响。标准化残差的时间序列图、自相关图以及平方自相关图如图 6~8 所示，

剔除个别异常值，标准化残差符合独立同分布序列的特征。用 $\mu + 2\sigma_t$ 可以作为一个近似的 95% 置信区间，将置信下限和置信上限分别延轴方向连成曲线，得到已知收益率在拟合波动率下的预测区间(图 5~9)，可以看出，预测区间基本全部覆盖了收益率。

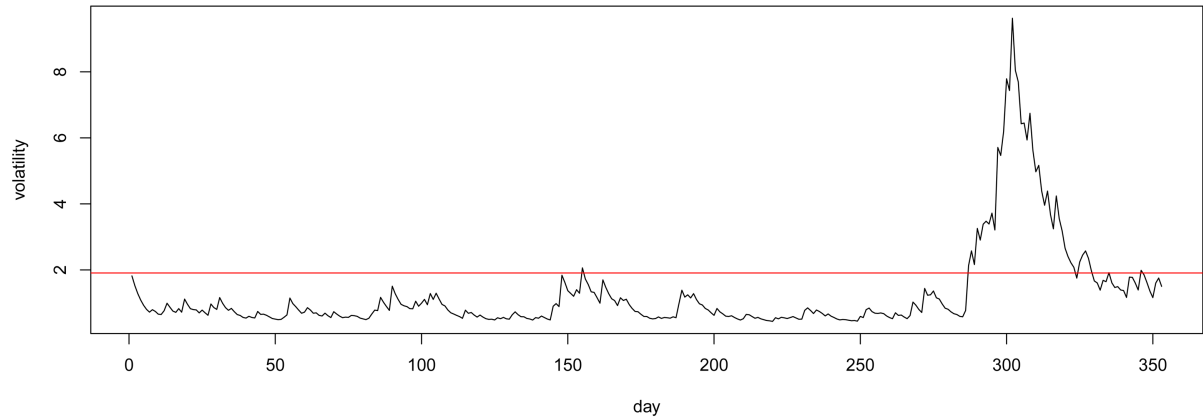


Figure 5. Fitted volatility series

图 5. 拟合的波动率序列图

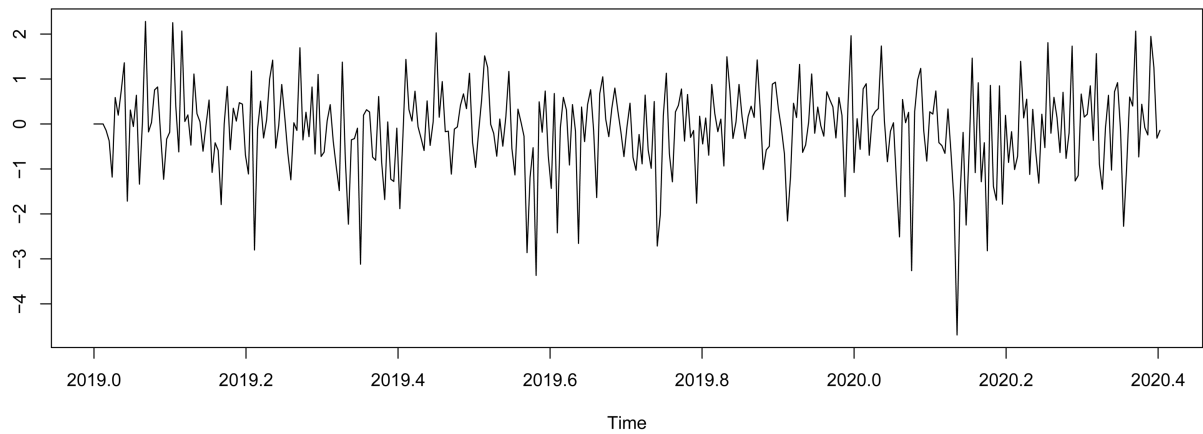


Figure 6. Time series diagram of standardized residuals

图 6. 标准化残差的时间序列图

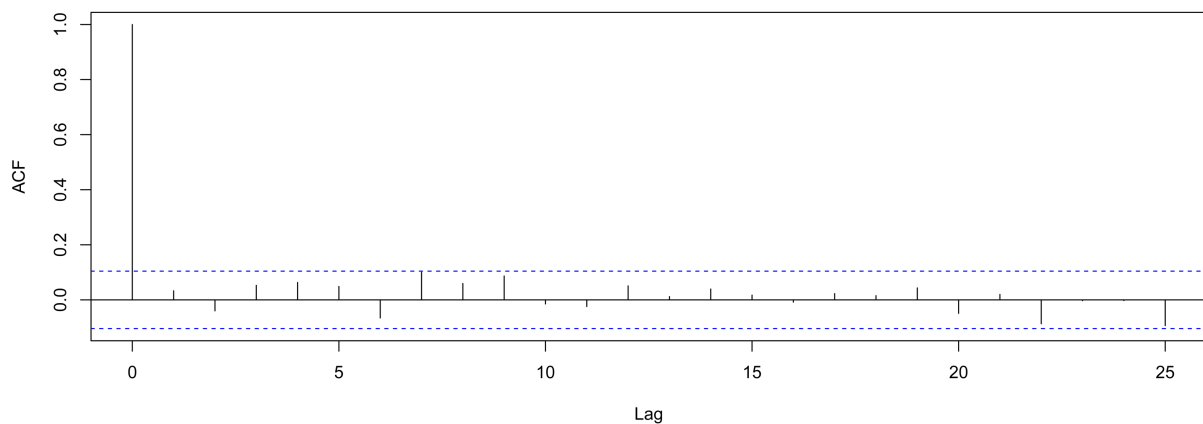


Figure 7. Autocorrelation diagram of standardized residuals

图 7. 标准化残差的自相关图

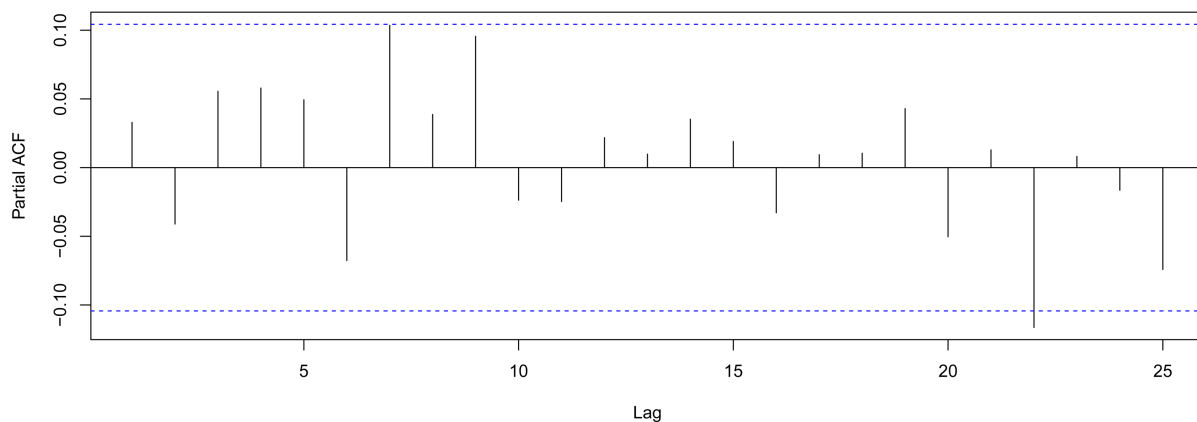


Figure 8. Square autocorrelation of normalized residuals

图 8. 标准化残差的平方自相关图

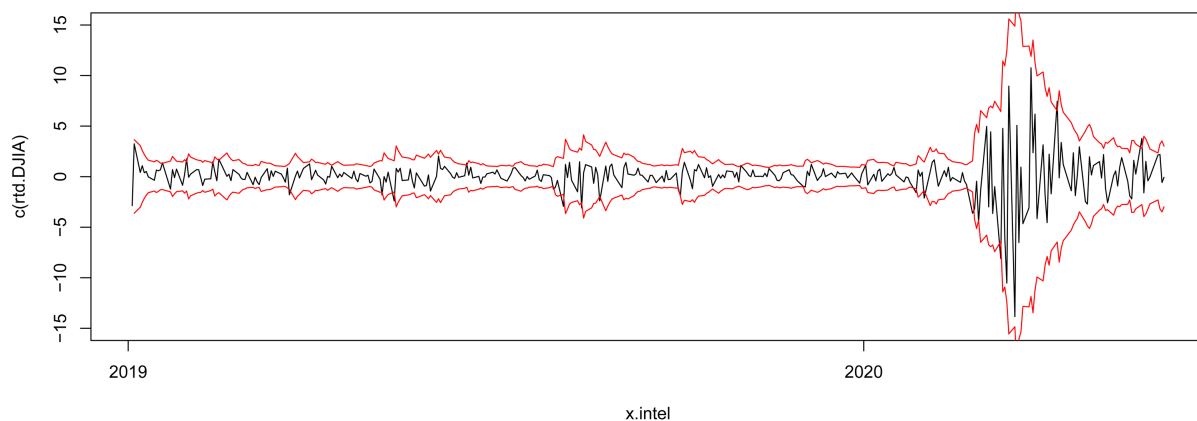


Figure 9. Forecast interval of return rate under fitted volatility

图 9. 收益率在拟合波动率下的预测区间

5. VaR 滚动预测

运用 ARMA-GARCH 模型, 进一步预测下一日市场的 VaR 作为市场风险的评估方式, 在正态分布条件的假设下一天持有期的 VaR 分位数为:

$$p = r_t(1) + q_a \sigma_t(1)$$

利用拟合模型, 置信区间取 99%, 使用 2019 年年度收益率序列进行 VaR 的滚动预测, 并与实际序列进行比较。具体建模步骤如下:

- 1) 基于 ACF、PACF 判断均值方程的自回归项和漂移项;
- 2) 分别建立 $AR(p)$ 、 $MA(q)$ 、 $ARMA(p, q)$ 模型;
- 3) 根据三个模型的 AIC 值选择最优作为均值方程;
- 4) 分别建立 GARCH(1, 1)、GARCH(2, 1)、GARCH(2, 2) 模型;
- 5) 判断三个模型的系数显著性, 选择显著性检验均通过的模型;
- 6) 检验残差是否具有 ARCH 效应。

利用循环做每日的滚动, 预测 2020.01.01~2020.05.30 的 VaR, 如图 10 所示: 可以看出 VaR 曲线完全包裹住了收益率, 说明包裹性很好, 并且可以很好的看出来在中间部分也就是 3 月份的时候达到了峰

值。由于收益率是取的绝对值所拟合的图形，实际上三月份的收益率是为负值，这实际情况相吻合。说明应用 GARCH 模型的 VaR 滚动预测有较好的效果。

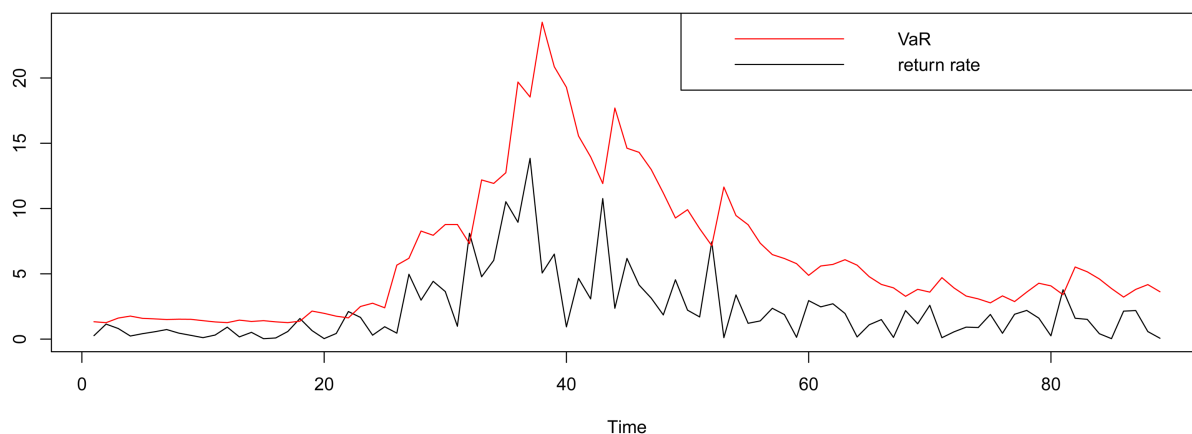


Figure 10. Predicted curve of VaR

图 10. VaR 预测曲线

6. 结论

1) 在疫情刚产生时期，股票市场的确产生了很大波动效应，同时对应的风险也是很大的。应用 ARMA-GARCH 模型，可以有效地拟合出道琼斯指数收益率序列，进而得到期间的波动率大小，同时通过图像能直观判断拟合模型后的波动率变化幅度；通过 VaR 的滚动预测实证也证实了在 3 月份下，股市的投资风险显著上升。可以得出，本文利用 ARMA-GARCH 模型进行股市收益率及风险判断是可行的，拟合效果较好。

2) 利用 ARMA-GARCH 模型时应注意：因为收益率序列的自相关与偏自相关图不是典型的时序图，所以从时间序列图中要准确地把握好 ARMA 模型，否则容易导致 ARMA 模型拟合存在偏差；GARCH 模型可以进一步尝试其他分布的拟合[6][7]。

参考文献

- [1] [美]Ruey S. Tsay. 金融时间序列分析(第 3 版)[M]. 王远林, 等, 译. 北京: 人民邮电出版社, 2020.
- [2] 黄轩, 张青龙. 基于 ARMA-GARCH 模型对沪深 300 指数的预测分析[J]. 中国物价, 2018(6): 44-46.
- [3] 潘贵豪, 胡乃联, 刘焕中, 李国清. 基于 ARMA-GARCH 模型的黄金价格实证分析[J]. 黄金, 2010(1): 5-8.
- [4] 卢芊好, 陈鸿铭, 林杉, 黄曼玲, 林萍. 基于 ARMA-GARCH 模型的 A 股实证分析及应用[J]. 经济管理, 2019(9): 78-80.
- [5] 张桂香. VaR 模型与 VaR 方法应用于证券市场风险管理的实证研究[D]: [硕士学位论文]. 杭州: 浙江工业大学, 2003.
- [6] 何晓光. 基于 ARMA-GARCH 模型的同业拆借率的 VaR 的度量[J]. 对外经贸, 2016(2): 85-87.
- [7] 张志强. 基于 ARMA-GARCH 模型的沪深 300 指数日收益率波动特性研究[J]. 山西科技, 2016(1): 34-36.