

# Improvement of Unbiased Grey-Forecasting Model and Its Application on Subsidence Prediction

Zelin Zou, Tingying Zuo, Yingchun Song

School of Geosciences and Info-Physics, Central South University, Changsha Hunan  
Email: 397101752@qq.com

Received: Jan. 2<sup>nd</sup>, 2016; accepted: Jan. 16<sup>th</sup>, 2016; published: Jan. 22<sup>nd</sup>, 2016

Copyright © 2016 by authors and Hans Publishers Inc.  
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).  
<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

---

## Abstract

The unbiased grey-forecasting model is an unbiased exponential model and it can eliminate inherent deviation of the traditional grey-prediction model. After negative exponential function transforming, the smoothness of the original data and the prediction accuracy are both improved. It is the unbiased grey-forecasting model based on exponential transform that combines the unbiased grey-forecasting model and negative exponential transformation. The data is transformed, predicted and restored. The subsidence monitoring data is processed by the grey-prediction model, the unbiased grey-prediction model and the model in this paper. The results show that the model in this paper eliminates the inherent deviation of the traditional model and achieves good results in the subsidence prediction.

## Keywords

Unbiased Grey-Forecasting Model, Negative Exponent, Prediction, Reduction

---

# 改进无偏灰色模型在沉降观测中的应用

邹泽林, 左廷英, 宋迎春

中南大学地球科学与信息与物理学院, 湖南 长沙  
Email: 397101752@qq.com

收稿日期: 2016年1月2日; 录用日期: 2016年1月16日; 发布日期: 2016年1月22日

文章引用: 邹泽林, 左廷英, 宋迎春. 改进无偏灰色模型在沉降观测中的应用[J]. 测绘科学技术, 2016, 4(1): 11-18.  
<http://dx.doi.org/10.12677/gst.2016.41002>

## 摘要

无偏灰色预测模型能消除传统灰色预测模型本身所固有的偏差,是无偏指数模型。原始数据经负指数函数变换后可改进原始数据的光滑度,提高灰色模型预测范围和精度。结合这两种方法得到基于指数变换的无偏灰色预测模型,将原始数据经过负指数变化成为指数变换序列,利用无偏灰色模型进行预测,还原预测值。将实测沉降监测点数据分别由灰色预测模型、无偏灰色预测模型和本文模型进行预测,实验结果表明本文改进模型消除了传统模型固有偏差,在沉降预测中取得了良好效果。

## 关键词

无偏灰色预测模型, 负指数, 预测, 还原

## 1. 引言

自邓聚龙教授创立灰色系统理论以来,GM(1,1)模型以建模灵活和所需的数据量少等特点而被广泛应用于各个领域[1]。传统灰色预测模型是有偏差的指数模型,有学者提出无偏 GM(1,1)模型。它对具有齐次指数形式的原始数据进行模拟和预测不会产生偏差,即具有白指数重合性,从而在一定程度上消除了GM(1,1)模型本身所引起的预测误差,适应范围也有所扩大[2]。

实际上当无偏灰色模型处理的数据不符合模型所表达的基本规律时,精度较差。文献[3]和[4]中提出对数函数变换、幂函数变换和负指数函数变换等方法来提高原始数据序列光滑度,进而提高灰色模型的预测精度并取得了较好效果。本文的改进模型将以上的两种方法相结合,对原始数据进行  $X^{(i)} = m^{-Y^{(i)}} (m > 1)$  负指数变换,再利用无偏灰色模型进行预测,提高预测模型精度,扩大无偏灰色模型的应用范围。实验结果表明将负指数变换和无偏灰色模型结合能得到更高精度的预测结果。对于实际问题中原始数据不具备指数变换规律时,也能有良好的预测效果。

## 2. 改进无偏灰色模型建立

### 2.1. 负指数函数模型变换

数据变换技术作为一种提高灰色模型模拟和预测精度的方法,已得到广泛应用。本文采用与无偏灰色模型最为切合的变换方法——负指数函数变换,它可以将非光滑的数据序列变换成具有较好光滑度的数据序列,提高了无偏灰色模型的应用范围。

**定义 1**  $\rho(k) = \frac{x^{(0)}(k)}{\sum_{i=1}^{k-1} x^{(0)}(i)} = \frac{x^{(0)}(k)}{x^{(1)}(k-1)} (k = 2, 3, \dots, n)$  为序列的光滑比。

光滑比反映了序列的光滑性,光滑比越小,说明序列中数据变化越平稳,建立预测模型的精度也就越高。

**定理 2** 设序列  $x(k)$  为递增数列,且  $x(1) \geq e, a > 1$ , 则有  $\frac{a^{-x(k)}}{\sum_{i=1}^{k-1} a^{-x(i)}} \leq \frac{x(k)}{\sum_{i=1}^{k-1} x(i)}$ , 即经负指数变换的函数

比原函数具有更好光滑性。

**证明** 定理 2, 先证引理 2.1。

**引理 2.1** 函数  $f(x) = \frac{a^{-x}}{x}$  ( $x > 1, a > 1$ ) 为单调递减函数。

**证明** 因为  $f'(x) = \frac{-a^{-x}(x \ln a + 1)}{x^2} < 0$  ( $x > 1, a > 1$ )。所以  $f(x) = \frac{a^{-x}}{x}$  ( $x > 1, a > 1$ ) 为单调递减函数。

下面继续证明定理 2，由于  $x(k)$  为递增数列，所以  $x(k) \geq x(s), s = 1, 2, \dots, k-1$ 。

由引理 2.1 有  $\frac{a^{-x(k)}}{x(k)} \leq \frac{a^{-x(s)}}{x(s)}, s = 1, 2, \dots, k-1$ ,

所以  $a^{-x(k)} \cdot x(s) \leq a^{-x(s)} \cdot x(k), s = 1, 2, \dots, k-1$ 。

将  $s = 1, 2, \dots, k-1$  带入上式累积得

$$a^{-x(k)} [x(1) + x(2) + \dots + x(k-1)] \leq [a^{-x(1)} + a^{-x(2)} + \dots + a^{-x(k-1)}] x(k)。$$

即  $a^{-x(k)} \cdot \sum_{s=1}^{k-1} x(s) \leq \sum_{s=1}^{k-1} a^{-x(s)} \cdot x(k)$ ,

所以  $\frac{a^{-x(k)}}{\sum_{s=1}^{k-1} a^{-x(s)}} \leq \frac{x(k)}{\sum_{s=1}^{k-1} x(s)}$ 。

定理 2 证毕。

## 2.2. 改进无偏灰色模型

无偏灰色模型不存在传统 GM(1,1)模型所固有的偏差，消除了 GM(1,1)模型在原始数据序列增长率较大时失效的现象，其应用范围比传统 GM(1,1)模型广[5]。此外无偏 GM(1,1)模型无需进行累减还原，简化了建模步骤，提高了模型的计算速度。

设原始递增数据序列为

$$Y^{(0)} = (y^{(0)}(1), y^{(0)}(2), \dots, y^{(0)}(n)) \quad (1)$$

经  $X^{(i)} = m^{-Y^{(i)}} (m > 1)$  变换得到非负序列  $X^{(0)}$

$$X^{(0)} = (x^{(0)}(1), x^{(0)}(2), \dots, x^{(0)}(n)) \quad (2)$$

其中  $X^{(0)}(n) > 0, k = 1, 2, \dots, n$ ， $X^{(1)}$  为  $X^{(0)}$  的 1-AGO 序列 (AGO: Accumulated Generating Operation, 一阶累加生成序列) [6]。

$$X^{(1)} = (x^{(1)}(1), x^{(1)}(2), \dots, x^{(1)}(n)) \quad (3)$$

上述  $X^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^k X^{(0)}(i) (k = 1, 2, \dots, n)$ 。  $Z^{(1)}$  为  $X^{(1)}$  的紧邻均值生成序列。

$$Z^{(1)} = (z^{(1)}(2), z^{(1)}(3), \dots, z^{(1)}(n)) \quad (4)$$

其中  $Z^{(1)}(k) = 0.5(x^{(1)}(k) + x^{(1)}(k-1)), k = 2, 3, \dots, n$ 。

GM(1,1)模型的基本形式如下

$$x^{(0)}(k) + az^{(1)}(k) = b \quad (5)$$

再利用最小二乘参数估计原理，灰色模型的参数项可表示为

$$\hat{a} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{Y} \quad (6)$$

其中

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} x^{(0)}(2) \\ x^{(0)}(3) \\ \vdots \\ x^{(0)}(n) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -z^{(1)}(2) & 1 \\ -z^{(1)}(3) & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -z^{(1)}(n) & 1 \end{bmatrix}$$

式中  $a, b$  为灰色模型的参数项,  $a$  用来控制系统发展势态的大小, 称为发展系数;  $b$  反映资料变化的关系, 称为灰色作用量[7]。GM(1,1)模型的时间响应函数为

$$\hat{X}^{(1)}(k+1) = \left( X^{(0)}(1) - \frac{b}{a} \right) e^{-ak} + \frac{b}{a}, k = 1, 2, \dots, n \quad (7)$$

根据式(7)得到预测值, 然后进行一阶累减还原即可得模型预测值

$$\hat{X}^{(0)}(k+1) = \hat{X}^{(1)}(k+1) - \hat{X}^{(1)}(k) = \left( 1 - e^{-a} \left[ X^{(0)}(1) - \frac{b}{a} \right] \right) e^{-ak}, k = 1, 2, \dots, n$$

若原始数据为严格的指数序列, 即

$$x^{(0)}(k) = A e^{c(k-1)}, k = 2, 3, \dots, n \quad (8)$$

由 GM(1,1)预测模型的建模过程得

$$\hat{a} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \frac{2(1-e^c)}{1+e^c} \\ \frac{2A}{1+e^c} \end{bmatrix}, k = 2, 3, \dots, n \quad (9)$$

用传统灰色预测建模过程中的参数来表示原始数据序列中参数  $A$  和  $c$ , 即

$$c = \ln \frac{2-a}{2+a}, A = \frac{2b}{2+a} \quad (10)$$

由此建立的预测模型为

$$\begin{cases} \hat{x}^{(0)}(1) = x^{(0)}(1) \\ \hat{x}^{(0)}(k) = A e^{c(k-1)}, k = 2, 3, \dots, n \end{cases} \quad (11)$$

还原得到预测值

$$Y = -\log \left[ \left( m^{-X^{(0)}(k)} \right) \right] (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (12)$$

若  $y^{(0)}(1) \geq 1$  条件不满足, 可令  $y_1^{(0)}(1) = y^{(0)}(1) + c \geq 1$  进行预测, 最后用  $y^{(0)}(1) = y_1^{(0)}(1) - c$  还原预测值。

$X^{(i)} = m^{-Y^{(i)}} (m > 1)$  的中  $m$  的取值可视具体情况而定, 无偏灰色模型设原始数据为严格的指数序列, 即  $x^{(0)}(k) = A e^{c(k-1)}, k = 2, 3, \dots, n$ 。本文为了最贴合无偏灰色模型取  $m = e$ 。

### 2.3. 改进模型精度评定

本文利用残差大小检验法进行精度检验。残差检验法即绝对或相对误差检验，误差越小精度检验越好[8]。

设残差

$$\varepsilon(k) = x(k) - \hat{x}^0(k) \quad (13)$$

其中  $x^0(k)$  为原始序列数据序列， $\hat{x}^0(k)$  为预测模型的模拟数据。

相对误差

$$\Delta(k) = \left| \frac{\varepsilon(k)}{x^{(0)}(k)} \right| \quad (14)$$

平均相对误差

$$\bar{\Delta}(k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varepsilon(k) \quad (15)$$

根据表1，当  $\max\{\bar{\Delta}(k), \max(\Delta(k))\} < \alpha$  成立时，模型为残差合格模型。

### 3. 沉降观测实例

**实例 1** 选自某沉降控制点 8 期沉降值数据，分别用 GM(1,1)模型、无偏 GM(1,1)模型以及本文模型进行模拟，并对其精度进行评估。结果如下表 2 和图 1 所示。

由表 3 可知，本文模型  $\max\{\bar{\Delta}(k), \max(\Delta(k))\} = 0.0357$  具有较好的模拟预测精度，属于残差合格模型。各项精度指标都比 GM(1,1)模型和无偏 GM(1,1)模型好。

**实例 2** 选自某沉降观测点前 7 期沉降值作为模拟值，后 2 期作为预测值，分别用 GM(1,1)模型、无偏 GM(1,1)模型以及本文模型进行模拟预测，并进行精度评估。结果如下表 4 和表 5 所示。

利用前 7 期数据进行的模拟，对模型的结果和精度检验各项指标进行分析，可知本文模型的平均相对误差 0.0172 优于无偏 GM(1,1)模型的 0.1302 和 GM(1,1)模型的 0.0625。且本文模型  $\max\{\bar{\Delta}(k), \max(\Delta(k))\} = 0.0421$  属于残差合格模型，较无偏 GM(1,1)模型和 GM(1,1)模型的精度等级高。

以后 2 期数据为预测值，分别以 3 种模型进行模拟预测并且对精度进行评估，结果如下表 6 和表 7 所示。

可知本文预测模型的平均相对误差 0.0566 优于无偏灰色模型的 0.2365 和灰色模型的 0.1077。

由上述结果可知，在沉降预测中本文模型的预测值十分接近原始值，精度明显要高于灰色模型和无偏灰色模型(见图 2)。

**Table 1. Indicators of accuracy test levels**  
**表 1. 精度检验等级指标**

预测精度等级	$\alpha$
好	0.01
合格	0.05
勉强	0.10
不合格	0.20

**Table 2.** The simulation results of the control point (cm)  
**表 2.** 控制点的模拟结果(cm)

观测 时序	实际值	无偏GM(1,1)模型		GM(1,1)模型		本文模型		备注
		预测值	残差值	预测值	残差值	预测值	残差值	
1	1.28	0	0	0	0	0	0	
2	1.85	2.144	-0.294	2.052	-0.202	1.870	-0.020	
3	2.32	2.471	-0.1507	2.364	-0.044	2.333	-0.013	
4	2.90	2.848	0.052	2.724	0.176	2.796	0.104	模拟值
5	3.19	3.282	-0.092	3.139	0.051	3.260	-0.070	
6	3.67	3.783	-0.113	3.616	0.054	3.723	-0.053	
7	4.21	4.359	0.149	4.167	0.043	4.187	0.023	
8	4.70	5.024	-0.324	4.801	-0.101	4.650	-0.050	

**Table 3.** The simulation accuracy of the control point  
**表 3.** 控制点的模拟精度

模型	无偏GM(1,1)模型	GM(1,1)模型	本文模型
平均残差(cm)	0.1529	0.0033	0.0030
最大相对误差	0.1589	0.1090	0.0357
平均相对误差	0.0580	0.0359	0.0149
$\max\{\bar{\Delta}(k), \max(\Delta(k))\}$	0.1589	0.1090	0.0357

**Table 4.** The simulation results of the observation point (cm)  
**表 4.** 观测点的模拟结果(cm)

观测 时序	实际值	无偏GM(1,1)模型		GM(1,1)模型		本文模型		备注
		预测值	误差值	预测值	误差值	预测值	误差值	
1	1.2	0	0	0	0	0	0	
2	2.2	2.89	-0.69	2.61	-0.41	2.18	0.02	
3	3.1	3.56	-0.46	3.21	-0.11	3.15	-0.05	
4	4.3	4.38	-0.08	3.96	0.34	4.12	0.18	模拟值
5	5.1	5.40	-0.30	4.87	0.23	5.09	-0.01	
6	6.0	6.65	-0.65	5.99	0.01	6.06	-0.06	
7	7.2	8.18	-0.98	7.38	0.18	7.03	0.17	

**Table 5.** The simulation accuracy of the observation point  
**表 5.** 观测点的模拟精度

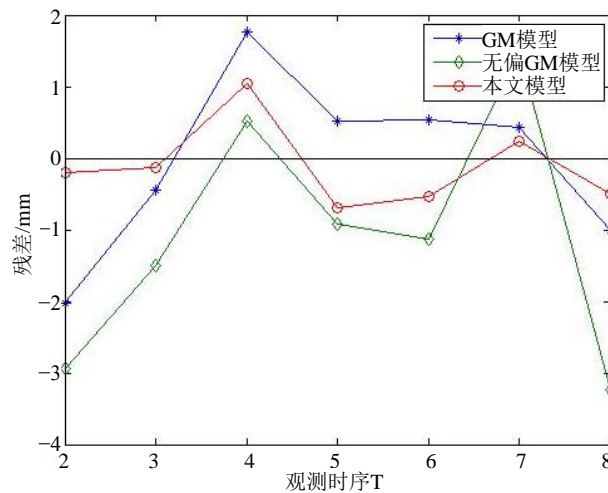
模型	无偏GM(1,1)模型	GM(1,1)模型	本文模型
平均残差(cm)	0.5256	0.2139	0.0820
最大相对误差	0.3125	0.1872	0.0421
平均相对误差	0.1302	0.0625	0.0172
$\max\{\bar{\Delta}(k), \max(\Delta(k))\}$	0.3125	0.1872	0.0421

**Table 6.** The prediction results of the observation point (cm)  
**表 6.** 观测点的预测结果(cm)

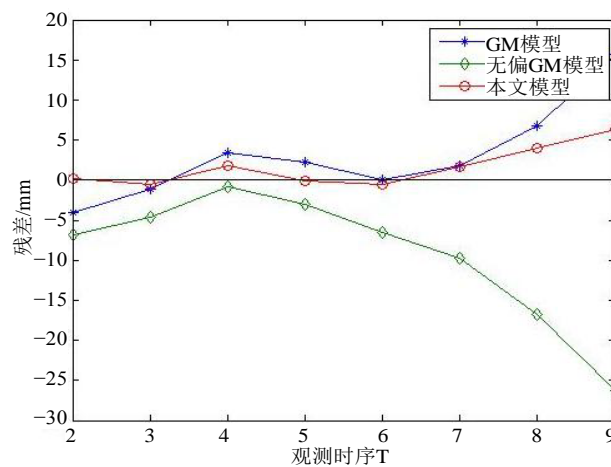
观测 时序	原始 序列	无偏GM(1,1)模型		GM(1,1)模型		本文模型		备注
		预测值	残差值	预测值	残差值	预测值	残差值	
8	8.4	10.08	-1.68	9.08	0.68	8.00	0.40	预测值
9	9.6	12.24	-2.62	11.17	1.57	8.97	0.63	

**Table 7.** The prediction accuracy of the observation point  
**表 7.** 观测点的预测精度

模型	无偏GM(1,1)模型	GM(1,1)模型	本文模型
平均绝对误差(cm)	2.15	1.1250	0.5100
平均相对误差	0.2365	0.1077	0.0566



**Figure 1.** The stimulation residual error plot of the control point  
**图 1.** 控制点的模拟残差分布



**Figure 2.** The stimulation residual error plot of the observation point  
**图 2.** 观测点的模拟残差分布图

## 4. 结论

实际沉降变化过程具有不确定性, 传统灰色模型在处理此类问题上难以取得良好效果。本文通过负指数变换提高原始序列的光滑度, 将原始序列变为指数变化序列, 符合无偏灰色预测模型的要求, 同时也消除了灰色模型本身的固有误差, 提高了模型预测精度和应用范围。实例表明, 本文改进模型在沉降预测中取得较好效果。

## 参考文献 (References)

- [1] 彭正明, 王腾军, 曹冬冬. GM(1,1)模型的改进及其在变形预测中的应用[J]. 地球科学与环境学报, 2012, 34(4): 102-106.
- [2] 穆勇. 无偏灰色 GM(1,1)模型的直接建模法[J]. 系统工程与电子技术, 2003, 25(9): 1094-1095.
- [3] 何斌, 蒙清. 灰色预测模型拓广方法研究[J]. 系统工程理论与实践, 2002, 22(9): 138-141.
- [4] 崔立志, 刘思峰. 基于数据变化技术的灰色预测模型[J]. 系统工程, 2010, 28(5): 110-114.
- [5] Yang, Y.Y., Galatsanos, N.P. and Katsaggelos, A.K. (1993) Regularized Reconstruction to Reduce Blocking Artifacts of Block Discrete Cosine Transform Compressed Images. *IEEE Transactions on Circuits System for Video Technology*, **3**, 421-432.
- [6] Li, G.D., Yamaguchi, D. and Nagai, M. (2007) A GM(1,1)-Markov Chain Combined Model with an Application to Predict the Number of Chinese International Airlines. *Technological Forecasting and Social Change*, **74**, 1465-1481. <http://dx.doi.org/10.1016/j.techfore.2006.07.010>
- [7] 刘思峰, 等. 灰色系统理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2004.
- [8] 郑锋, 魏勇. 提高灰建模数据光滑度的一种新方法[J]. 统计与决策, 2007(9): 37-38.