Reconstruction of the Theory of Natural Numbers

Liusheng Yang

Shaanxi Chang'an Normal School, Xi'an China
Email: 13572503691@163.com

Abstract

The purpose is to reconstruct the theory of natural numbers and to provide a safe basis for mathematics. The method is to observe the objective background and the real process of the occurrence and application of natural numbers. The result is that there is a more primitive concept than the natural number. Conclusions are obtained that ① many "𝟙" and traversal operations are the initial concepts of mathematics, which embody all the concepts and properties of current natural number theories with the compatibility; ② arithmetic axioms are compatible, but their direct proof does not exist.

Keywords

axiomatic method；Peano axioms；Hilbert's second problem；Traversal operation

Subject Areas Math & Physics

重建自然数理论

杨六省
陕西省长安师范学校，西安
Email:13572503691@163.com

收稿日期：2017年5月11日；发布日期：2017年5月11日

摘　要

目的 重建自然数理论，为数学提供一个安全的基础。方法考察自然数概念发生和应用的客观背景及真实过程。结果存在比自然数更为原始的概念。结论①诸多的"𝟙"和遍历运算是数学的初始概念，它们蕴涵现今的自然数理论的所有概念和性质，包括相容性。②算术公理是相容的，但其直接性证明并不存在。

关键词

公理方法；Peano公理；希尔伯特第二问题；遍历运算

0 引言

虽说数学界的主流观点是把算术公理作为数学的基础，但算术公理相容性的直接性证明却一直没有得到解决。Edmund Landau 说，Peano 五个公理的无矛盾是不能证明的[1]。笔者同意这一观点（指直接性证明）。据此我们说，迄今为止，人们并未能为数学提供一个安全的基础。

数学的开端是什么？它应当是一个直接性的东西，还是一个间接性的东西？凡间接性的东西都需要证明。Peano 公理是一个间接性的东西，正因为如此，它是否是相容的，就是可质疑的，需要证明的。但证明不可能无止境倒退，因此，算术公理不能作为数学的开端。存在性就意味着相容性，因此，人们有理由相信，数学的

HANS PrePrints | https:// doi.org/10.12677/HANSPrePrints.2017.21007. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 11 May 2017, publ: 11 May 2017

开端应当是一个具有直接存在性的东西。笔者赞同直觉派的如下观点：Poincare 认为，整数不能以公理为基础[2]310，算术是不能由公理基础来判明它是正确的[2]309，与 Kronecker 一样，Poincare 坚持所有的定义和证明都必须是构造性的[2]309-310（注：笔者在此处只就数学的起始概念而言表示赞同）。Brouwer 不承认从公理推出结论的这种数学工作[2]313（注：基础的相容性问题不能得到解决，又如何保证这种数学是可靠的）。

克伦涅客（Kronecker）（1886）说：“上帝造整数，其它的都是人造的。”[3]18 S.C.克林（S.C.Kleene）说：“我们不能够希望对自然数列的认识可以化归到本质上比它更原始的东西去。”[3]18 但上帝并没有解释整数到底是什么？因此，整数（自然数）依然是一个间接性的东西，是应受到质疑的。

本文的目的是，期望找到比自然数更为原始的概念，它具有直接存在性，从而算术的相容性（也即数学基础的安全性）就是无需怀疑的。本文得到的结果是：𝟙（空心的阿拉伯数字 1）和遍历运算是数学的初始概念（——于是，Kronecker 和 S.C.Kleene 的上述观点就都是过时的），它们蕴含人们迄今所应用的自然数算术的所有概念和性质，包括相容性。开端的东西是不证自明的，而所谓证明自然数的性质，不过是把上述那对初始概念所蕴涵的东西明白的揭示出来罢了。

1 讨论

1.1 重建自然数算术理论

舍弃公理法，回归到观察幼儿及成人是如何形成和应用自然数概念的，例如，观察猎人对几天内打猎数的“数数”，是如何被不同的日期所隔开或不被隔开——前者对应着加法概念，后者对应着自然数概念；又如，不借助于抽象思维略去掉所有的细节区别而只留下羊的概念，就无法对2只羊进行“数数”，也无法进行“1只羊加1只羊等于2只羊”的运算，因为不相同的东西无法进行“数数”和做加法运算，等等，这些都是构成自然数理论的客观背景。推而广之，为了使“数数”和加法运算能够适用于任何情况，上述的抽象思维过程就必须做到极致，从而构成“数数”和做加法运算的对象(换一种说法，在日常生活中，人们总是把不规范的现实条件视作理想条件而进行“数数”和做加法运算的）。人类思维有能力抽象掉事物的任何具体内容，从而形成诸多的（事实上是无限多的，这种无限性是一种客观存在，无需证明）不可分割的具有独立性的空洞的纯存在客体，我们不妨用“𝟙”（空心的阿拉伯数字1）来表示这个比自然数更为原始的概念——这是数学的第一个初始概念。

数学的第二个初始概念是遍历运算，它的直观解释可以是，如果把人们由抽象思维所得到的若干个𝟙比作是没有任何记号的面包（或石子、绳结等），那么，遍历运算就可以是指给每块面包都涂上一个红点，甚至我们也可以用“想到”每块面包作为实施遍历运算的手段。

Peano 公理的缺点是，原本属于直接性的东西却变成间接性的东西了。这样一来，原本可以由概念进行直接解释的东西，却变成不得不进行“证明”，例如，2+2为什么等于4？关于运算律成立的理由，也是如此——这一缺点使得算术公理相容性的证明变得难以进行。本文希望回归到人类认识自然数的真实起源以重建自然数理论，从而达到证明算术相容性的目的。

1.1.1 关于自然数的定义

（1）自然数1的定义。

HANS PrePrints | https:// doi.org/10.12677/HANSPrePrints.2017.21007. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 11 May 2017, publ: 11 May 2017

对人们由抽象思维所得到的𝟙实施遍历运算的结果，我们把它记作“𝟙’”，简记作1，称作自然数1。

（2）自然数2的定义。

对人们由抽象思维所得到的“𝟙，𝟙”实施遍历运算，我们可在（1）的基础上进行，于是，有且只有如下2种方式：

第1种方式是将新添加的𝟙’（即1）作为一个独立的新步骤。如果两个步骤之间用分号“；”隔开，那么，遍历运算的方式（此时指各步骤尚没有当作整体的部分；此说明下文不再特别写出）可记作：1；1。接下来，我们做相反方向的工作，即把被隔开的两个分离的步骤衔接起来构成一个整体（但仍会保留住存在着两个步骤的痕迹,犹如把一件衣服已裁剪好的各 “部分”缝合起来，仍能够对不同的部分进行区分一样），操作方法是用符号“+”置换分号“；”，这样，遍历运算的方式（此时指各步骤均已作为整体的部分；此说明下文不再特别写出）就可记作：1+1。

第2种方式是将新添加的𝟙’（即1）与（1）中原有的𝟙’（即1）合在一起作为一个统一的步骤，记作“1，1”（注：同一个步骤内的两个相邻的1，我们约定用逗号“，”分开），简记作2，称作自然数2。

综合以上两种情况，对“𝟙，𝟙”实施遍历运算的方式是：“1；1”和“1，1”，简记作：1+1和2。

（3）自然数3的定义。

对“𝟙，𝟙，𝟙”实施遍历运算，我们可在（2）的基础上进行，于是，有且只有如下2种方式：

第1种方式是将新添的𝟙’（即1）置于（2）的现有结果“1；1”和“1，1”的后面作为一个新的独立的步骤，这样得到的遍历运算的方式是：“1；1；1”和“1，1；1”。

第2种方式是将新添的𝟙’（即1）分别并入到（2）的现有结果“1；1”和“1，1”的各步骤中去，这样得到的遍历运算的方式是：“1，1；1”、“1；1，1”和“1，1，1”。

综合以上两种情况，删除所得结果中的重复者，对“𝟙，𝟙，𝟙”实施遍历运算的方式是：“1；1；1”、“1，1；1”、“1；1，1”和“1，1，1”，可简记作：1+1+1、2+1、1+2和3，3称作自然数3。

（4）自然数4的定义。

对“𝟙，𝟙，𝟙，𝟙”实施遍历运算，我们可在（3）的基础上进行，于是，有且只有如下2种方式（以下采取较为简略的表述形式）：

第1种方式是分别在（3）的现有结果1+1+1、2+1、1+2和3的后面均添加“+1”，这样得到的遍历运算的方式是：1+1+1+1、2+1+1、1+2+1和3+1。

第2种方式是对（3）的现有结果1+1+1、2+1、1+2和3中的每一个，依次把其中的各个自然数（注：每次只能针对其中的一个）置换成它的后继（注：我们把2叫做1的后继，1的后继也可记作1^+；把3叫做2的后继，2的后继也可记作2^+或1^{++}；…），这样得到的遍历运算方式是：2+1+1、1+2+1、1+1+2；3+1、2+2；2+2、1+3；4（注：3的后继是4，称作自然数4,其代表的遍历运算方式是 “1，1，1，1”）。

综合以上两种情况，删除所得结果中的重复者，对“𝟙，𝟙，𝟙，𝟙”实施遍历运算的方式是：1+1+1+1、2+1+1、1+2+1、1+1+2、3+1、1+3、2+2和4。

HANS PrePrints | https:// doi.org/10.12677/HANSPrePrints.2017.21007. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 11 May 2017, publ: 11 May 2017

……

说明：①对于同一个“𝟙，…𝟙”实施遍历运算，“分步骤”概念的含义可作如下直观的解释：如果猎人每天都对打猎的成果作记录的话（“每天” 就是意指一个独立的步骤），“1+1+1”表示，第1天打猎1只，第2天打猎1只，第3天打猎1只；“2+1”表示，第1天打猎2只，第2天打猎1只；“1+2”表示，第1天打猎1只，第2天打猎2只；3表示，只1天就打猎3只。不难看出，遍历运算中的“分步骤”的概念，并不是人为杜撰的，它是客观存在在遍历运算概念中的必然反映。

②基于运算结果等效性的考虑，我们称那些凡能对“𝟙，…𝟙”实施遍历运算的所有表达式彼此相等，用符号=（=读作“等于”）连接，例如，1+2=2+1，1+2=3。只是由于遍历运算中只有一个步骤的表达式最为简单，我们就把它视作具有相等关系的各表达式的共同参照物，特称作自然数。现在我们终于可以在重建的自然数理论的框架下来回答陶哲轩（Terence Tao）教授在文[4]第 18 页中所提及的相关问题：自然数是什么？答：自然数是对人们由抽象思维所得到的诸多的 𝟙 实施遍历运算的一种特殊方式，即只有一个步骤的遍历方式。自然数是可构造的吗？答：是。因为对于任意的“𝟙，…𝟙”，我们总可以经过“有限步骤”对其实施“只有一个步骤”的遍历运算（注:这里的两个“步骤”意义不同，务必区分：前者特指“𝟙，…𝟙” 的遍历运算结果“1，…1”中的逗号“，”个数是有限的，后者特指“𝟙，…𝟙” 的遍历运算结果“1，…1”中没有分号“；”——前面“自然数 2 的定义”一段说过，分号“；”的意义是表示将两个步骤隔开）。自然数是由什么构成的？答：特殊的即只有一个步骤的遍历运算方式构成了自然数。自然数是物理对象吗？答：否。因为遍历运算的方式问题，不属物理学的研究范畴，因此，自然数不是物理对象。自然数度量什么？答：自然数不度量任何具体事物，否则它就不是一个极度抽象的概念；凡自然数能从什么地方经过再次抽象而得到，就能回到原处得到应用。

③对于上述表述中的表达式“a+b”，我们称它是一个加法算式，其中的“+”读作“加”，表示加法运算。a 与 b 均称作加数；“a+b”的运算结果叫做和，这个和即为与其相等的自然数（即下图式中“a+b”所在行的末项），例如，2+2 的和就是 4，等等。当然，1+1+2+1 也是一个加法算式，其和同样为与其相等的自然数（即下图式中“1+1+2+1”所在行的末项），这样就有 1+1+2+1=5。

④自然数加法算式的实质是什么？符号“+”早在“自然数 2 的定义”的段落中就已出现，它的含义是将 2 个分离的遍历运算步骤衔接起来以便得到一个整体性的遍历运算的方式。由此不难知道，自然数的加法算式表示的是有两个或两个以上步骤的遍历运算方式。根据遍历运算的意义，不难理解，自然数加法的运算性质已包含在遍历运算的概念之中了。

综上所述，我们可得到如下自然数及加法算式一览表：

自然数及加法算式一览表

1

1+1，2

1+1+1，2+1，1+2，3

1+1+1+1，2+1+1，1+2+1，1+1+2，3+1，1+3，2+2，4

1+1+1+1+1，2+1+1+1，1+2+1+1，1+1+2+1，1+1+1+2，3+1+1，1+3+1，1+1+3，2+2+1，2+1+2，1+2+2，4+1，1+4，3+2，2+3，5

HANS PrePrints | https:// doi.org/10.12677/HANSPrePrints.2017.21007. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 11 May 2017, publ: 11 May 2017

……

说明：

①推理并不具有创造性，它只是将前提中蕴涵的东西明白地揭示出来。数学的真理性在于其概念的合理性，概念的合理性可由可构造性来保证，而可构造性就意味着相容性。由实施遍历运算的两种方式可知：（i）一览表能够包括任意的自然数和任意的自然数加法算式（注：碰到多重括号的情况，仍然可以化归为一览表中的某个算式，例如，对于算式“1+｛［2+（1+1）］+5+［（8+1）+3］｝”，如果不使用任何括号，所对应的遍历运算就分为8个步骤，从而原算式可化归为：1+2+1+1+5+8+1+3）。（ii）一览表中的两个表达式（指自然数或加法算式）相等，当且仅当（if and only if (iff)）它们位于一览表中的同一行，否则会导致矛盾，即与表达式相对应的不同的“𝟙，…𝟙”可以一一对应（注：与一览表相对应，我们依次给出的“𝟙”；“𝟙，𝟙”；“𝟙，𝟙，𝟙”；…，其中的任意2个都是相异的，这是不证自明的）。于是我们有结论：一览表是相容的。

②自然数的排序。如果 a 和 b 都表示自然数，它们要么对应于同一个 “1，…1”，要么对应于不同的“1，…1”，前者记作 a=b，后者记作 a≠b，依据排中律，二者必居其一。对于 a≠b 的情况，要么 a 对应的“1，…1”是 b 对应的“1，…1”的真部分（换一种说法，a 产生于 b 之前），即有 b=a+p，记作 b>a, （读作 b 大于 a，或 b 多于 a）,也可记作 a<b（读作 a 小于 b，或 a 少于 b）；要么 a 对应的“1，…1”不是 b 对应的“1，…1”的真部分，这时 b 对应的“1，…1”是 a 对应的“1，…1”的真部分，即有 a=b+q，记作 b<a,也可记作 a>b，依据排中律，二者必居其一。于是我们有如下结论（自然数的序的三岐性）：设 a 和 b 是自然数，那么下述三命题中恰有一个是真的：a<b，a=b，a>b。至于自然数的序的有关基本性质，由其证明（这里不予赘述）可知，它们与一览表是相容的。

③从构造方面讲，自然数 2 借助于自然数 1 而构成，自然数 3 借助于自然数 2 而构成，…据此我们说，自然数是序数；从运算结果讲，遍历运算使得“𝟙，…𝟙”变成“𝟙'，…𝟙'”，如果我们不去区分实施这种运算的方式的不同，而只着眼于考虑“𝟙，…𝟙”或“𝟙'，…𝟙'”的“大小（多少）”，例如，3<5，据此我们说，自然数又是基数。

④以往人们总喜欢问 2+2 为什么等于 4 之类的问题，但这类问题总让人感到有些怪异，因为这就如同问，有“4”块面包，第 1 天吃 2 块第 2 天又吃 2 块与第 1 天就吃 4 块，为什么结果是一样的？但令人不解的是，问题的怪异性并没有引起人们对应用皮亚诺公理这种方式来刻画自然数概念的合理性产生怀疑，相反，人们依旧执着于依据皮亚诺公理寻求问题答案并给出证明。事实上，问 2+2 为什么等于 4，与问 a 为什么是 a 没有什么两样。因为根据同一律，a 就是 a；同样，2+2 为什么等于 4 的道理就应该包含在相等概念的定义之中，何须证明？（注：只有隐含的即具有间接性的东西的被揭示才算得上证明）——由于对“𝟙，…𝟙”实施遍历运算的所有方式（表达式），我们称它们相等，这就是说，吃掉“4”块面包（注：它可以被视作是对遍历运算概念的直观解释）这个概念本身，就包含着第 1 天吃 2 块第 2 天又吃 2 块和第 1 天就吃 4 块等等各种可能情况。

⑤关于自然数 0 的规定。猎人第 1 天没有打到猎物，我们用符号 0 来表示（0 称作自然数 0，读作自然数零，或简读作零），第 2 天打到的猎物是 a 只，于是规定 0+a=a（注：a 也可以为 0，下同）就显得是自然合理的；

HANS PrePrints | https:// doi.org/10.12677/HANSPrePrints.2017.21007. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 11 May 2017, publ: 11 May 2017

同理，猎人第 1 天打到的猎物是 a 只，第 2 天没有打到猎物，我们规定 a+0=a 同样是自然合理的，因为两种规定都与客观事实相一致。基于这种补充规定，我们可以在一览表最顶端 1 的上面添上自然数 0。

为了凸显规律起见，在一览表中的同一行，总是采取把加数个数多的排在前面，把“各加数乘积的较小者”排在前面（注：从第5行起，末项例外；仅为了说话方便起见，这里提前使用了“乘积”的概念）。

1.1.2 自然数加法的交换律和结合律

容易说明，加法和乘法的各种运算律是蕴涵于一览表中的。既然一览表是相容的，所以，加法和乘法的各种运算律对于自然数系而言也是相容的。

（1）关于自然数加法的交换律

没有限制就是被允许。遍历运算只要求把“𝟙，…𝟙”中的每个𝟙变为1即可，因此，自然数加法的交换律就是必然蕴涵于遍历运算概念中的性质。其实，根据自然数的构造方法来验证“a+b= b+a”也很容易。当两个自然数 a 和 b 相加之和等于2时（注：a 与 b 中含0的情况，由于情况简单，这里不予讨论），交换律显然成立；当两个自然数 a 和 b 相加之和等于3时，由于“1+2”与“2+1”处于一览表中的同一行，因而它们是相等的。假设当两个自然数 a 和 b 的和等于 c 时，“a+b=b+a”成立，即“a+b”与“b+a”位于一览表中的同一行，那么，对于 c 的后继而言，根据上文中的第2种遍历方式，我们可以知道“（a +1）+ b ”、“a +（b +1）”、“（b +1）+ a ”、“b +（a +1）”同样位于一览表中的同一行，因而它们是相等的，这就是说，当两个自然数 a 和 b 的和等于 c^+ 时,交换律也成立，故根据数学归纳法，加法的交换律对任意的自然数 a 和 b 均成立。

（2）关于自然数加法的结合律

自然数加法的结合律与交换律的情形相同，该运算律也是必然蕴涵于遍历运算的概念之中的。理由是，与算式“（a+b）+c”和“a+（b+c）”相对应的遍历运算，如果都被看做是分为3个步骤的话，两个算式均可表示为“a+b+c”，因而二者是相等的。其实，也可以对“（a+b）+c=a+（b+c）”进行“证明”。当 a、b、c 都等于1时（注：这里不讨论 a、b、c 中含0 的情况），加法结合律显然成立。假设当“𝟙，…𝟙”所对应的自然数是 m 时，“（a+b）+c=a+（b+c）”成立，对于“𝟙，… 𝟙，𝟙”（注：比前者多了一个𝟙）实施遍历运算，根据上文中的第2种遍历方式，我们有遍历结果：［（a+b）+1］+c、（a+b）+（c+1）、（a+1）+（b+c）、a+［（b+c）+1］。对于同一个“𝟙，…𝟙”，用两种不同的方式实施遍历运算，其结果是相等的。［（a+b）+1］对应的第2种遍历方式是［（a+1）+ b］和［a+（b+1）］，［（b+c）+1］对应的第2种遍历方式是［（b+1）+ c ］和［b+（c+1）］，做一下代换，于是我们关于“𝟙，…，𝟙，𝟙”有遍历运算方式：［（a+1）+ b］+c、［a+（b+1）］+c、（a+b）+（c+1）、（a+1）+（b+c）、a+［（b+1）+ c ］、a+［b+（c+1）］。显然，这些算式位于一览表中的同一行，因而它们是相等的，即有：［（a+1）+ b］+c=（a+1）+（b+c）；［a+（b+1）］+c= a+［（b+1）+ c ］；（a+b）+（c+1）= a+［b+（c+1）］。这就是说，当“𝟙，…𝟙，𝟙”对应的自然数是 m^+ 时,加法结合律也成立，故根据数学归纳法，加法的结合律对任意的自然数 a、b、c 恒成立。

1.1.3 关于自然数的乘法运算

1.1.3.1 自然数乘法运算的定义

HANS PrePrints | https:// doi.org/10.12677/HANSPrePrints.2017.21007. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 11 May 2017, publ: 11 May 2017

乘法是重复的加法。例如，在一览表中自然数12所在的行，就有12个1相加，6个2相加，4个3相加，3个4相加，2个6相加，于是，我们特别把 a+a+…+a（共 b 个 a）记作 a×b ，读作 a 乘以 b；a 叫做被乘数，表示相同的加数，b 叫做乘数，表示相同加数的个数；符号×叫做乘号，表示乘法运算；a×b 的运算结果叫做乘积。我们特别规定：b=1时，a×b= a×1=a；b=0时，a×b=0。这里顺便一提的是，问4×3或2×6等为什么等于12，同样是一个让人感到怪异的问题，理由同前面的加法例子。

1.1.3.2 自然数乘法的交换律和结合律

（1）关于自然数乘法的交换律

假设需要实施遍历运算的对象（由抽象思维得到的若干个𝟙）被排列成 b 行 a 列（注：a、b 均不为0）。如果我们的遍历运算的第1步是遍历第1行的 a 个𝟙;第2步是遍历第2行的 a 个𝟙;…, 第 b 步是遍历第 b 行的 a 个𝟙，根据乘法定义，我们就得到算式 a×b；如果我们的遍历步骤依次按列进行，就得到算式 b×a，由于两种不同的遍历运算方式针对的是同一对象，故有 a×b= b×a。事实上，此思路可用数学归纳法证明，文中类似的情况亦然，不赘述。

我们特别规定，a 与 b 有一个为0时，a×b 与 b×a 均为0。

（2）关于自然数乘法的结合律

假设需要实施遍历运算的对象有 c 个，且每个中的𝟙都被排成 b 行 a 列。如果我们的遍历运算是依次遍历 c 中的每一个，根据乘法定义，我们就得到算式（a×b）×c。考虑到上述 c 个对象中的每一个都有 b 个 a，根据乘法定义，共有 b×c 个 a ，再一次地根据乘法定义，我们就可得到算式 a×（b×c）。故有（a×b）×c = a×（b×c）。

1.1.3.3 自然数乘法对于加法的分配律

要对 b+c 个“a 个 𝟙”实施遍历运算，如果一次性实施遍历运算，算式就是 a×（b+c）。如果分为 2 个步骤，第 1 步骤先对 b 个“a 个 𝟙”实施遍历运算，算式是 a×b；第 2 步骤再对 c 个“a 个 𝟙”实施遍历运算，算式是 a×c,两个步骤合在一起（符号“+”本身就是将分离的步骤衔接起来的意思），算式就是 a×b+a×c。由于不同的遍历方式针对的是同一遍历对象，故有 a×（b+c）= a×b+ a×c。

1.1.4 欧几里得算法

下面我们要证明的是：设 n 是自然数，且 q 是不等于 0 的自然数，则存在唯一自然数 m 和 r，使得 n=mq+r 且 0≤r<q。

证明：当 n<q 时，m=0, r=n,命题成立。当 n=q 时，m=1, r=0,命题成立。当 n>q 且 q=1 时，恒有 m=n，r=0，命题成立。

下面考虑 q>1 且 n>q 的情况。当 q=2 时, 如果 n= 2t（t>1），则 m=t, r=0；如果 n= 2t+1（t ≥1），则有 m=t, r=1。当 q=3 时, 如果 n= 3t（t>1），则有 m=t, r=0；如果 n= 3t+1（t ≥1），则有 m=t, r=1；如果 n= 3t+2（t ≥1），则有 m=t, r=2。假设 q>1 且 n>q 时，存在自然数 m 和 r，使得 n=mq+r 且 0≤r<q：如果 0≤r<q-1，则 n+1=mq+(r+1)，满足命题中不等式条件 ；如果 0≤r=q-1，则 n+1=（m+1）q+0，满足命题中不等

HANS PrePrints | https:// doi.org/10.12677/HANSPrePrints.2017.21007. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 11 May 2017, publ: 11 May 2017

式条件，于是根据归纳法，存在自然数 m 和 r，使得 n=mq+r 且 0≤r<q。下面证明 m 和 r 的唯一性。设另有 m_1 和 r_1，使得 n= m_1q+r_1 且 0≤r_1<q。假设 m_1≠m，不失一般性，不妨设 m_1=m+ m_2（m_2>0），则有 n= m_1q+ r_1= mq+ m_2q+r_1，显然 m_2q+ r_1> r，故有 n= m_1q+r_1= mq+ m_2q+r_1> mq+r，即有 n>n，矛盾，故 m_1=m。如果 m_1=m，但 r_1≠r，不失一般性，不妨设 r_1>r ，则有 n= m_1q+ r_1= mq+r+ r_2（r_2>0）=n+r_2>n，矛盾，故 r_1= r。

1.1.5 重建的自然数算术是相容的

基于如下结果：自然数及加法算式一览表是相容的；自然数加法的所有运算律、自然数的序的三岐性及自然数的序的基本性质均蕴涵于一览表中，因而它们与一览表是相容的；基于算术中的各类数均可借助于自然数来定义、复杂运算可借助于加法运算来定义，结论是，重建的自然数算术是相容的。

1.2 算术公理是相容的

1.2.1重建的自然数算术可以推出Peano公理

S.C.Kleene 将 Peano 公理稍作改动，列出如下 5 条[3]19：

1.0 是自然数。

2.如果 n 是自然数，则 n’（指 n 的后继者——笔者）亦是自然数。

3.只有由 1 及 2 给出的才是自然数。

4.对于任何自然数 m 与 n,当 m’ = n’时必有 m= n。

5.对任何的自然数 n，n’ ≠0。

前 3 条没有什么可以多说的，我们看第 4 条。m’与 n’相等，由相等概念的定义（“我们称那些凡能对“𝟙，…𝟙”实施遍历运算的所有表达式彼此相等”)及正文中的一览表是相容的可知，m’与 n’意指同一自然数;若 m≠ n，则可推出 m’ ≠ n’，这是不可能的，故第 4 条得证。

再看第 5 条。由正文关于后继数的定义知，1,2，…均是某自然数的后继数，它们的共同点是均具有一个特定针对的“𝟙，…𝟙”，即它们是指对各自的“𝟙，…𝟙”实施遍历运算的一种特殊的遍历方式，唯独自然数 0 不具有这一性质，故 0 不是任何自然数的后继数。

在依据 Peano 公理的讨论中，对于任何自然数 n 和 m，有 n+m’=（n+m）’。在重建的算术理论中，设与 n+m 相等的自然数是 c，则与 c 的后继数相等的就有（n+m）’和 n+m’，它们分别出现在第 1 和第 2 种方法中。

在依据 Peano 公理的讨论中，对于任何自然数 n 和 m，有 m×n’=m×n+m。在重建的自然数理论中，m×n’与 m×n+m 均表示 n’个 m 相加，故同样有 m×n’=m×n+m。

其余相关条文，不再一一赘述。

1.2.2 用“元数学”可证明Peano公理是相容的

重建的自然数算术是相容的，由它可以推出 Peano 公理，因而，Peano 公理也是相容的。当然，这种关于算术公理相容性的证明，已不再是 Hilbert 所要求的直接证明了，因为这种证明并不是在 Peano 公理系统内进行的，它仍是借助了一次“转化”。

1.3 对数学基础问题三大学派的简评

HANS PrePrints | https:// doi.org/10.12677/HANSPrePrints.2017.21007. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 11 May 2017, publ: 11 May 2017

要确认算术公理（例如，Peano 公理）的相容性，就得先确认其中的每个概念的合理性，而这又依赖于这些概念的存在性（可构造性）。但算术公理中的每个概念都属于被隐定义，它们是否具有存在性，并非是不证自明的，因此，就需要更为原始的概念来确认算术公理中的概念的合理性，但这与算术公理是最初始的东西相悖，因而，试图寻找算术公理相容性的直接性证明，就是一件徒劳的事，也就是说，Hilbert 第二问题是不可解的，它是一个伪问题。

从十九世纪末二十世纪初逐渐拉开序幕的关于数学基础问题的大论战，最终不了了之。原因是，无论是形式派、逻辑派，还是直观派，它们都未能为数学提供一个合理的基础，事实上，他们也不可能为数学提供一个合理的基础，笔者的不同于以往的理由是：形式派无法解决数学相容性的证明问题，因为 Hilbert 的第二问题，本身就是一个伪问题；不涉及数学概念，逻辑学照样可以建立起来，也就是说，数学并不为逻辑学所蕴涵，因此，Russell、Whitehead 与 Frege 的想法，即数学可以从逻辑推导出来，因而是逻辑的一种展延（extension）[2]302，这种观点是没有根据的；至于直观派主张整数导源于时间的直观这种思想[3]311，同样是站不住脚的，因为时间的直观对于整数概念而言，完全是个外在的东西。

综上所述，笔者认为，应用公理法刻画数学的基础是不合理的，也即把数学的基础设定为一个间接性的东西，其本身就是矛盾的：间接性的东西，就是可质疑的，需要进一步说明的，但这又与开端概念相悖。作为数学的基础（概念），它的存在性应该是不证自明的，从而其相容性也就不是问题了，因为不满足相容性的东西不可能存在。至于这个基础所蕴涵的算术的所有性质（包括相容性），只需我们明白的揭示出来，这就是所谓的证明。存在的就是合理的，就是真的，所以我们不能同意 Russell 所说的——数学是这样一门科学，在其中我们永远不会知道我们所讲的是不是真的[2]307。客观的存在性，是验证数学真理的一面镜子，尤其在基础问题上，情况更为明显。

2 结论

①诸多的“1”和对其所实施的遍历运算这一对概念，是数学的最基本的概念。②重建的自然数算术是相容的。③算术公理是相容的，但其直接性证明并不存在。

参考文献：

[1]艾.蘭道.分析基础[M].刘绂堂译.北京：高等教育出版社，1958，见“给教师写的序”.
[2] [美]M.克莱因.古今数学思想（第四册）[M]. 北京大学数学系数学史翻译组译，上海:上海科学技术出版社，1981.
[3]S.C.克林.元数学导论（上册）[M].莫绍揆,译.北京:科学出版社，1984.
[4][澳]陶哲轩.陶哲轩实分析[M].王昆扬，译.北京：人民邮电出版社，2008.

HANS PrePrints | https:// doi.org/10.12677/HANSPrePrints.2017.21007. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 11 May 2017, publ: 11 May 2017