On the Existence of Berkeley Paradox and the Discussion of Differential Precision

Runsheng Tu

National Special Steel Quality Products Supervision and Inspection Centre, Huangshi City, China
Email: 2run3@sina.com

Received: Mar. 17th, 2019, published: Mar. 20th, 2019

Abstract

The Berkeley paradox can only exist in classical calculus, but no longer exists in limit calculus. However, there are always people in the country who have repeatedly mentioned the Berkeley paradox or similar problems because they have not grasped the true meaning of the extreme calculus. It is necessary to reveal the true meaning of calculus and correct some people's prejudice. Almost everyone believes that the differential result of the limit calculus is only an approximate result rather than an exact result (the reason is that the item containing Δx is ignored). This is a wrong intuition. The opposite is true. The conclusion from the rigorous logic analysis is that The differential obtained by the limit calculus method is an accurate result, and retaining the term containing Δx must result in inaccurate differential results.

Keywords

Berkeley Paradox, Classical Calculus, Limit Calculus, Increment, Differential Main

关于贝克莱悖论不存在的论证暨微分精确性的讨论

涂润生

国家特殊钢产品质量监督检验中心，黄石，中国
Email: 2run3@sina.com

收稿日期：2019年3月17日；发布日期：2019年3月20日

摘　要

贝克莱悖论只能在古典微积分中存在，在极限微积中已经不复存在了。但是，国内总是有人因没有领会

极限微积分的真谛而重提贝克莱悖论或者类似的问题。揭示微积分的真谛，纠正一些人的偏见也就有必要了。几乎所有的人都认为极限微积分的微分结果只是一个近似结果而不是精确结果(原因是忽略了包含Δx的项)。这是一种错误的直觉。实际情况正好相反。通过严密的逻辑分析得到的结论是“根据极限微积分方法求得的微分是精确结果，保留包含Δx的项一定会导致微分结果不准确”。

关键词

贝克莱悖论，古典微积分，极限微积分，增量，微分主部

1. 引言

贝克莱悖论被认为是“无穷小量究竟是否为 0”的问题。然而，贝克莱悖论只是针对古典微积分才存在。一旦使用了极限微积分，贝克莱悖论就不复存在了。极限微积分中求导过程是标准的求导过程。在求极限之前无穷小量不为零.求无穷小量趋于零的极限结果必然为零。就是说，求极限之前，无穷小量是非零，求极限之后，无穷小量变成了零。这显然没有矛盾。尽管极限微积分方法问世之后，贝克莱悖论就被消除了，国外的文献中已经不再将贝克莱悖论当作贝克莱的学术成果了。但是，国内还有不少人停留在古曲微积分的思维中，还在讲贝克莱悖论、芝诺悖论(飞矢不动悖论)和阿基里斯悖论。数学界几乎一致认为，极限微积分中的微分结果是忽略了次要部分的主部。通过仔细分析，我觉得这种观念是完全错误的。应该是相反：极限微积分中的微分是全部的结果，如果不舍弃与无穷小量之积的项，那才是画蛇添足，反而会得到不精确的结果。我在这里首先论述“极限微积分是如何消除贝克莱悖论的。”然后讨论微积分的准确性问题(就是保留包含 Δx 的项准确？还是丢掉包含 Δx 的项准确？)。

2. 贝克莱悖论的表述

1734 年，大主教乔治•贝克莱(George Berkeley) (也有人译为贝科莱或伯克利)“渺小的哲学家”之名出版了一本标题很长的书《分析学家；或一篇致一位不信神数学家的论文，其中审查一下近代分析学的对象、原则及论断是不是比宗教的神秘、信仰的要点有更清晰的表达，或更明显的推理》。在这本书中，贝克莱对牛顿的理论进行了攻击。例如他指责牛顿，为计算比如说 x^2 的导数，先将 x 取一个不为 0 的增量 Δx，由 $(x+\Delta x)^2 - x^2$，得到 $2x\Delta x + (\Delta x)^2$，后再被 Δx 除，得到 $2x + \Delta x$，最后突然令 $\Delta x = 0$，求得导数为 $2x$。这是“依靠双重错误得到了不科学却正确的结果”。因为无穷小量在牛顿的理论中一会儿说是零，一会儿又说不是零。因此，贝克莱嘲笑无穷小量是“已死量的幽灵”。有人认为：贝克莱的攻击虽说出自维护神学的目的，但却真正抓住了牛顿理论中的缺陷，是切中要害的。数学史上把贝克莱的问题称之为“贝克莱悖论”。笼统地说，贝克莱悖论可以表述为“无穷小量究竟是否为 0”的问题：就无穷小量在当时实际应用而言，它必须既是 0，又不是 0。但从形式逻辑而言，这无疑是一个矛盾[1] [2]。这就是贝克莱悖论的标准表述。

对于古典微积分而言，确实存在贝克莱所说的问题。贝克莱悖论也只能针对“在极限微积分时代到来之前”的不严格微积分表述。在极限微积分问世之后，那些问题就不复存在了。因此，贝克莱悖论的表述忽略了求导过程中的求极限的过程，属于针对古典微积分而言的结论。对于极限微积分而言，它属于诡辩或断章取义。

飞矢不动的观点是完全错误的。因为，在时间时隔为 0 的情况下，飞矢的飞行的距离为 0 并不代表飞矢不动。微积分方法出现之后，瞬时速度概念已经将飞矢不动悖论击得粉碎了。

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.41004. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 17 March 2019, publ: 20 March 2019

3. 贝克莱悖论的问题讨论

为了便于说明问题，我们将 $y=x^2$ 的标准求导过程列于表 1 之中。

Table 1. Analysis of the Derivation Process of $y=x^2$
表 1. $y=x^2$ 的求导过程剖析

	求极限之前对函数的运算(求极限之前求增量的商)			开始求极限	结果	
	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)
极限微积分	$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{(x+\Delta x)-x}$	$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$	$\lim\limits_{\Delta x\to 0}[2x+\Delta x]$	$\lim\limits_{\Delta x\to 0}2x+\lim\limits_{\Delta x\to 0}[\Delta x]$	$2x+0$	$2x$
古典微积分	$\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{(x+\Delta x)-x}$	$\frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}$	$2x+\Delta x$	---	$2x+0$	$2x$

在极限微积分中，从(a)到(f)的每一步都是非常严格的逻辑推衍过程。不存在“无穷小量同时是零和非零的问题”。只是在不同的条件下(作不同的处理或运算)，无穷小量的值才不同。在古典微积分过程中，只有 $2x+\Delta x=2x+0$ 这一步有问题。在未求极限或者干脆不求极限的情况下，$\Delta x=\xi$，$\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{(x+\Delta x)-x}=\frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=2x+\Delta x$ 的运算过程是正确的或者说是非常严格的。只要 $\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{(x+\Delta x)-x}=\frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=2x+\Delta x$ 的运算过程没有错，

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{(x+\Delta x)-x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[2x+\Delta x]$ 的运算过程就没有错(求极限的符号还带在函数式的前面，表示求极限的操作还没有作用于后面的函数)。

我认为沈卫国在文[3] [4]中对待上面的求导过程存在四个错误。沈卫国的第一个错误：沈卫国却认为从(b)到(c)这一步是错误的。沈卫国的第二个错误是在文献[3] [4]中表达了这样的意思：在极限还没有求出来的之前就认为(b)式的结果是 0/0。读者不知道他是怎么得到这种结果的。他仍然将求极限的符号带在函数式的前面，求极限的操作还没有作用到函数式之中，就取Δx = 0 (即将 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x$ 的极限求出来了)。极限的符号还没有消失，极限就求出来了。这陷入了一种矛盾之中：极限到底是求出来了还是没有求出来？沈卫国的第三个错误是认为不能对(b)式进行约分。在没有求极限的时候，Δx = ξ，怎么就不能约分呢？即使令Δx = 0，(b)式也是可以约分的。认为这时不能约分，是数学的基本运算规则有问题，而不是约分过程不符合逻辑。举例来说，给出一个分母是未知数 x 函数式，如果该式能简化的话，大家会毫不犹豫地进行约分，而不管分母 x 是否为零(x 的值是零，约分的结果也是对的)。换言之，即使先将极限求出来，而得到了 0/0 的结果，这样的 0/0 也不是没有意义，而是难以求出其具体的形式，导致求导工作无法完成。沈卫国从第(b)步中得出 0/0 的结果是怎么回事呢？他是先求极限而后求增量之商。从而得出分母为零没有意义的结论。根据数学运算法则，先求增量之商而后求极限也是可以的。这两种顺序我们应该选择哪一种呢？这要看哪一种顺序方便(哪一种顺序能避免出现不确定的因素)。沈卫国选择的顺序使运算进入了一个死胡同。因此，不可取。我们应该选择先约分而后求极限的运算顺序。这样就可以使运算过程顺利进行。“认为 0/0 一律没有意义”是沈卫国的第四个错误。沈卫国在文[4]中还有一个错误是，认为 $y=x^2$ 的微分的精确结果是$(2x+\Delta x)\mathrm{d}x$，而 $2x\mathrm{d}x$ 的结果是不精确的。丁小平先生和莫绍揆教授所说的微积分的

问题和错误也是没有深刻领会微积分的真谛的结果。

4. 求极限与不求极限的求导结果的比较

对于求导，不求极限的过程除存在贝克莱指出的问题之外。还有哪些后果?

求函数的导数就是求函数的曲线的点上的切线的斜率。如果求导数的过程中包含求极限(即极限微积分法)，求得的就是图 1 中那根切线。如果不求极限(即使用古典微积分法)，得到的就是图 2 中的那根割线(也是图 2 中那个直角边分别为 Δ*y* 和 Δ*x* 的微三角形的斜边——同时是一段函数曲线的对应弦线)的斜率。

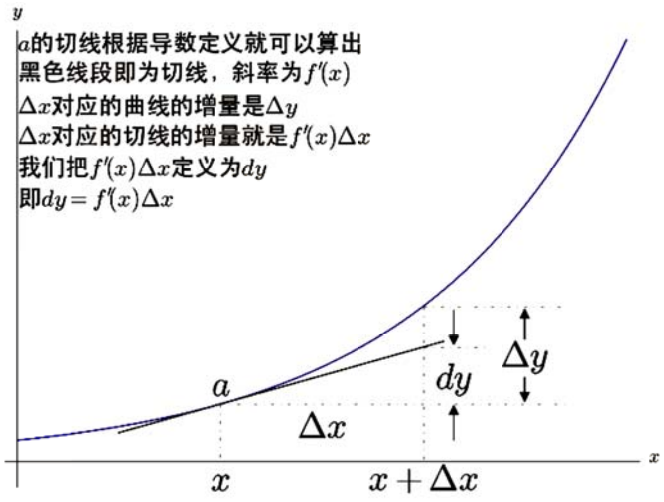

Figure 1. Contains the derivative of the limit process, which yields the slope (d*y*/d*x*|d*x* → 0) of the tangent at the derivative point of the function curve

图 1. 包含求极限过程的求导，得到是函数曲线的导数点处的切线的斜率：d*y*/d*x*|d*x* → 0

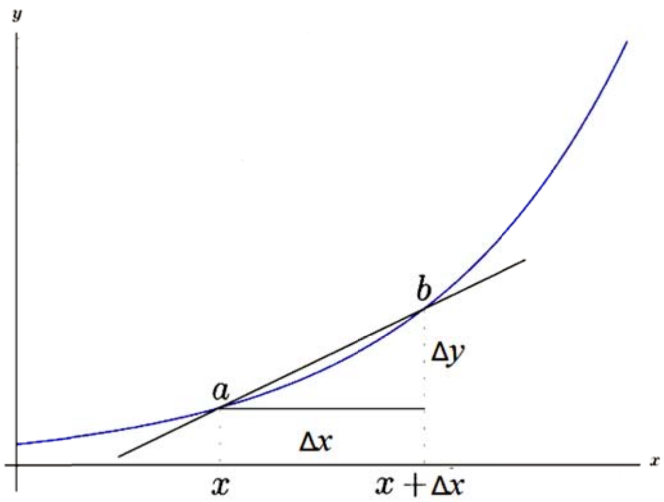

Figure 2. The derivation of the limit process is not required, and the slope (Δ*y*/Δ*x*) of a secant is obtained

图 2. 不要求极限过程的求导，得到是一条割线的斜率：Δ*y*/Δ*x*

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.41004. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 17 March 2019, publ: 20 March 2019

结论是，包含求极限过程的求导结果准确，而不包含求极限过程且保留了包含自变量增量的求导结果反而不准确。

5. 求微积分的准确性问题

师教民认为，求微分的过程有问题。对于 $y=x^2$ 来说，$\mathrm{d}y=\dfrac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}\mathrm{d}x=[2x+\Delta x]\mathrm{d}x=2x\mathrm{d}x$ 。在这个过程中，直接将 $\Delta x\mathrm{d}x$ 当作零了[5]。他也是针对古典微积分而言的。极限微积分方法问世之后，他所指出的这个问题也不复存在了。

微分在数学中的定义：由函数 $B=f(A)$，得到 A、B 两个数集，在 A 中当 $\mathrm{d}x$ 靠近自己时，函数在 $\mathrm{d}x$ 处的极限叫作函数在 $\mathrm{d}x$ 处的微分。微分的中心思想是无穷分割。微分的几何意义是在微分点上函数曲线的切线的斜率与自变量的增量之积。根据据这个定义，一元可微分函数的微分通式为 $\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$ 。对于 $y=x^2$ 这个函数，其正确的的微分过程如下：

$$\mathrm{d}y=\left[\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}\right]\mathrm{d}x=\left[\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)\right]\mathrm{d}x=\left[\lim_{\Delta x\to 0}2x+\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x\right]\mathrm{d}x=2x\mathrm{d}x \quad (1)$$

标准的求微分过程都可以转变成求导数的过程。在求 $\mathrm{d}y$ 的积分的时候，根据正确的微分公式来求，就不会出现概念问题和逻辑问题。也就不存在什么师教民等所说的错误。微积分的大量应用都没有出错就是强硬的证明。有人说，实践是检验真理的唯一标准。我们为什么不相信实践的结果呢？一旦相信微积分的大量正确的应用实例，就不会怀疑其中存在逻辑问题和概念问题了。

师教民多次提到“矢量微元 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 到底是曲线还是直线”的矛盾[6]。这也是在极限微积分中忽略求极限导致的。因为，微元 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 的极限就是近似的直线。它实际上是曲线，不求极限它也是曲线。当线段长度无穷小时，这段曲线与对就的弦线(直线)重合了。求极限后得到的结果才是精确的结果(师教民所说的“曲线-直线矛盾”是考虑近似结果惹的祸)。这一点在图 1 和图 2 中都表示得很清楚，不存在师教授所说的矛盾。

在教科书和互联网上很容易找到微分的定义。函数的微分是函数增量的主要部分，且是 Δx 的线性函数，故函数的微分是函数增量的线性主部($\Delta x\to 0$)。在数学中，微分是对函数的局部变化率的一种线性描述。微分可以近似地描述当函数自变量的取值作足够小的改变时，函数的值是怎样改变的。微分：是函数在一点处由于自变量微小变化所引起的改变量的近似值。虽然微分的定义有多种不同的表述方式，但是，其主要思想是相同的，就是认为微分是一个近似的表达，是函数改变量的主部。其本意就是认为微分结果是不精确的。原因被认为是忽略了 Δx 的项及与 Δx 的积的项。这是凭直觉得到的结论而不是根据严密的逻辑得到的结果。

古典微积分的范围内，$y=x^2$ 的导数中的 Δx，$(2x+\Delta x)\mathrm{d}x$ 的积分求不出来。原因是，$\int(2x+\Delta x)\mathrm{d}x$ 中的 $\int\Delta x\mathrm{d}x$ 项无法求出来。此处的 Δx 既不是常数又不是具体的函数式，而是一个无穷小量，且 $\int\Delta x\mathrm{d}x$ 不是求双重积分(即使 $\Delta x=\mathrm{d}x$ 这一项的积分也求不出来)。

根据函数关系在平面上作图所得到的曲线(一般都简称为“函数曲线”)上点的导数是该点上的切线的斜率。只有在当 Δx 趋于零时才能求得。当 $\Delta x=\xi$ 不为零时，求得的增量之商是弦线的斜率，且 $\Delta x=\xi$ 越大，增量之商就与切线斜率相差越大(见图 1 与图 2 的差别)。这可以与作圆的内接多边形类比。等份划得越多，所得到的内接正多边形与圆越接近。当划分的等份数为无穷大(内接正多边形的边长越于零)时，圆内接正多边形才能与圆完全重叠。“圆内接正多边形的边长越短”相当于“Δx 越小”，“圆内接多边

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.41004. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 17 March 2019, publ: 20 March 2019

形才能与圆完全重叠得越好”相当于“求得的导数越精确”(“求导时求自变量增量的极限”相当于“求圆内接正多边形的边长的极限”)。

换一个角度考虑。对于 $y = f(x)$的导数而言，$\Delta y/\Delta x$ 是切割函数曲线的一段弦的斜率(见图的割线)。$\Delta x = \xi$ 一般是一个很小的量。Δx 越大，这样的弦线连接成的曲线与 $y = f(x)$函数的曲线差别越大。只有当 $\Delta x \to 0$ 时，弦线的连线才与 $y = f(x)$函数的曲线重合。这表明，$y = f(x)$函数的导数的时候，利用包含求极限过程的方法求得的导数是最准确的。微分也一样：包含求极限过程的微分是最准确的微分结果。令 $\Delta x = \xi$ 并保留这一项的微分反而是不准确的。

微分的准确性完全在于求得的导数的准确性，积分的准确性的依赖对象同增是导数的准确性。

综上所述，对于求函数的导数，求极限使无穷小量趋于零，结果更精确，而不是保留了无穷小量结果更精确。因此，目前广泛使用的微分结果不能称为主部。

微分的几何的表示方法是示意图。对于向量微元，精确的是曲线，近似的是弦线。当无限分割时，弦线与曲线重合。对于表示微分的几何意义，精确的几何图是无限分割导致两根垂线重叠(分割出的线段长度为无穷小)。将它们“放大”而使那两根重合的垂线分开(也使分割出的曲线及其弦线与有明显的分离)，是为了便了直观地理解，并不是真的那么的粗略和近似。因此，师教民先生的文[6]中说向量微分的几何意义的表示方式的矛盾不存在。师教民和沈卫国说求导过程中 Δx 不该舍掉，也是没有道理的。

参考文献

[1] About Berkeley．加州大学伯克利分校官网[引用日期 2016-12-26] https://www.berkeley.edu/about
[2] 乔治▪贝克莱．豆丁网[引用日期 2015-01-02] http://www.docin.com/p-548774444.html
[3] 沈卫国. 微积分极限法(标准分析)的本质及问题详析[J], 天津职业院校联合学报，2017,19(6): 78-86,92.
[4] 沈卫国. Hans 汉斯. 数学基础若干问题的创新性思考[J]. 2018, DOI: 10.12677/PM.2018.85069: PP.516-533
[5] 师教民. 微积分之谜新探索[M]. 石家庄: 河北科学技术出版社,1989: 235.
[6] 师教民. 微积分之谜与美[M]. 石家庄: 河北科学技术出版社, 2007: 14－16; 28－35.

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.41004. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 17 March 2019, publ: 20 March 2019