Real Set is the Fault of Uncountable Set and the Proof that Transcendental Set, Real Set, Complex Set and Vector Set are Countable Sets

Xiansheng Zhang

Chongqing Hechuan District Agricultural and Rural Committee, Hechuan District, Chongqing
Email: hcnw631@163.com

Received: July.27th, 2019, published: July.30th, 2019

Abstract

Cantor proves that real numbers are not countable by using closed interval nesting theorem and diagonal method, respectively. But it has always been controversial. This paper deeply analyses these two kinds of proofs and reveals the essence of their mistakes. Using the closed interval nest theorem to prove that the set of real numbers is not countable constitutes the paradox of linguistic form and semantics. Using the diagonal method to prove that the real number is uncountable makes a logical mistake of changing concepts secretly, generalizing them partially and reasoning inappropriately. We have found and constructed the method of combining numbers and graphics, which embody the characteristics of mathematics, with strict logic. An Infinite List Graphic Method for Rolling Wheel Arrangements with Possible Numbers、Graphic Method of Limited List of Possible Numbers, Diagrammatic method of circle number disc with possible number，and Extended Continuous Fraction Method、Algebraic Number Generation Transcendental Number Method、Extending the Index Method of Cantor Equation，It is proved that the transcendental set, the real set, the complex set and the vector set are all countable sets.

Keywords

Settheory, Closed Interval Nesting Method, Diagonalmethod, Countableset, Prove

实数不可数之谬与超越数实数复数向量数皆可数的证明

张先胜

重庆市合川区农业农村委员会，重庆市 合川区，中国
Email: hcnw631@163.com

收稿日期：2019年7月27日；发布日期：2019年7月30日

摘 要

康托用闭区间套定理和对角线方法分别证明了实数不可数，但一直以来备受争议。深刻剖析了此两种证法并揭示了其错误实质，用闭区间套定理证明实数不可数构成语形语义悖论，用对角线方法证明实数不可数犯了偷换概念、以偏概全、不当推断的逻辑错误。发现并构造了体现数学特点的数形结合、逻辑严密的方法：可能取数滚动轮排无限列表图示法、可能取数有限列表图示法、可能取数圆形数盘图示法，和拓广连分数法、代数数生成超越数法、拓广康托方程指标法，分别证明了超越数集、实数集、复数集、向量数集都是可数集。

关键词

集合论，闭区间套方法，对角线方法，可数集合，证明

1. 引言

康托用闭区间套和对角线方法分别证明了实数是不可数[1] [2]，对角线方法被借用推广发挥引申导出许多奇论[3] [4] [5] [6] [7]。但是，康托的这两种证明一直以来备受争议，诸多质疑论文从哲学、逻辑、数学等不同角度分析了康托证明的不足或错误[8]-[15]。本文直破康托证明实数不可数之谬；发现并构造了推理过程简单明了，彰显数形结合、逻辑严密之数学特点的锐利工具和方法，分别证明了超越数集合、实数集合、复数集合、向量数集合都是可数集合。

2. 康托用闭区间套方法证明实数不可数之谬

2.1. 闭区间套定义

设闭区间序列 $\{[a_n,b_n]\}$，有如下性质：

$$[a_{n-1},b_{n-1}]\supset[a_n,b_n],n=1,2,\cdots$$

$$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\varepsilon\to 0=0$$

则称此闭区间序列 $\{[a_n,b_n]\}$ 为一个闭区间套，或者简称区间套。[16] [17]

2.2. 闭区间套极限唯一实数存在定理

若 $\{[a_n,b_n]\}$ 是闭区间套，当 n 为无穷大时 $(n\to\infty)$，闭区间套两端点间的距离趋于无穷小且极限为0，$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\varepsilon\to 0=0$，即 $a_{n\to\infty}\to\xi\leftarrow b_{n\to\infty},(n=1,2,\cdots\to\infty)$，即 $a_{n\to\infty}+\frac{\varepsilon}{2}=\xi=b_{n\to\infty}-\frac{\varepsilon}{2}$，则存在唯一的 $\xi\in R$，使得 $\xi\in[a_n,b_n],(n=1,2,\cdots\to\infty)$，也就是：$a_n=\xi=b_n,(n\to\infty)$。

如下图 1，每一线段 $\overline{A_nB_n}$ 都是线段 $\overline{A_{n-1}B_{n-1}}$ 内部的线段，当 $n\to\infty$ 时，线段 $\overline{A_nB_n}$ 的长度 $L_{\overline{A_nB_n}}\to 0$，长度极限是 0，则必存在唯一的一点 M(点 M 的坐标值是 ξ)属于每一个线段 $\overline{A_nB_n},(n=1,2,\cdots)$，也就是说点 M 是所有线段 $\overline{A_nB_n},(n=1,2,\cdots)$ 的唯一公共点，即闭区间套必然且唯一“套住”实数 ξ。

表示在实轴上如下图 1：

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.41024. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 27July 2019, publ: 30July 2019

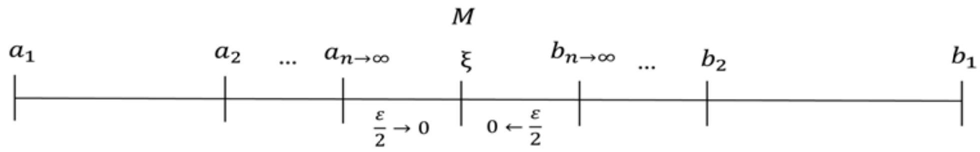

Figure1. Real axis representation of closed interval sleeve
图 1. 闭区间套的实轴表示图

2.3. 康托用闭区间套定理证明实数集不可数回顾

康托认为欲证实数集不可数，只需证明实数闭区间$[0,1]$不可数即可，一段实数闭区间不可数，则整个实数区间不可数。

假设实数闭区间$[0,1]$是可数集，则可设

$$[0,1]=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$$

记$I_0=[0,1]$，在I_0内作闭区间I_1，使其长度$I_1<\frac{1}{2}$且$a_1\notin I_1$；然后又在I_1内作闭区间I_2，使得$I_2<\frac{1}{2^2}$且$a_2\notin I_2$。以此类推，作好逐个包含的闭区间套：

$$I_0\supset I_1\supset\cdots\supset I_n$$

$$I_n<\frac{1}{2^n},a_n\notin I_n\ (n=1,2,\cdots)$$

因为$\frac{1}{2^n}\to 0,(n\to\infty)$，所以由闭区间套定理，存在唯一的$\xi\in I_n,(n=1,2,\cdots)$。

又由于令$a_n\notin I_n$，故$\xi\neq a_n,(n=1,2,\cdots)$。

但$\xi\in I_0$，因而ξ是$[0,1]$之中的点，因此，$[0,1]\neq\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$。这与假设矛盾。因此，$[0,1]$是不可数集合。[1]

2.4. 康托用闭区间套方法证明实数不可数之谬分析

闭区间套定理要求闭区间及区间套设定不为“虚无(不存在)区间”才能立，否则导出矛盾。例如：闭区间$\{I_0=[0,1]=[A,B]\}$，如下图 2。

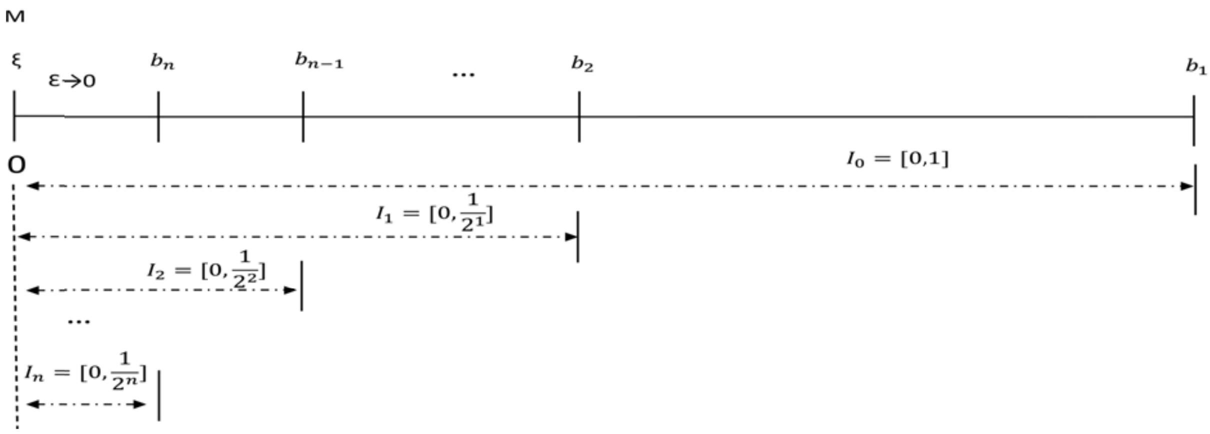

Figure2. Coordinate representation of cantor closed interval set
图 2. 康托闭区间套的坐标表示图

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.41024. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 27July 2019, publ: 30July 2019

令闭区间套按下述方法作出：$I_0=[0,1]=[A,B]$，在I_0内作闭区间I_1，使其长度$I_1\le\frac{1}{2}$且$b_1\notin I_1$；然后又在I_1内作闭区间I_2，使得$I_2\le\frac{1}{2^2}$且$b_2\notin I_2$。以此类推，闭区间套层层套叠。

$$I_0\supset I_1\supset\cdots\supset I_n$$

$I_n\le\frac{1}{2^n},b_n\notin I_n\ (n=1,2,\cdots)$，并且极限为0，即$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^n}-0\right)\to 0=0$。

上述闭区间套层层套叠且极限为0，即$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^n}-0\right)\to 0=0$，由闭区间套定理，存在唯一$\xi\in I_n,(n\to\infty)$是所有闭区间序列唯一公共点，即$0+\varepsilon\le\xi\le\frac{1}{2^n}-\varepsilon,(\varepsilon\to 0,n\to\infty)$，即有唯一的实数$0+0=\xi=0-0,\left(n\to\infty,\frac{1}{2^n}\to 0,\varepsilon\to 0\right)$，也即$0=\xi=0,(n\to\infty)$，即此闭区间套唯一公共点$M$为$A$点且坐标值$\xi=0,(n\to\infty)$。

当$(\varepsilon\to 0,n\to\infty)$时，闭区间$I_n=b_n-A=\frac{1}{2^n}-0=\varepsilon-0=0\le\frac{1}{2^n}\to 0=0$，且$\xi=0\in I_n,(n\to\infty)$，因假设$b_n\notin I_n,(n=1,2,3,\cdots$，但是，未限制不含$n=\infty$)，故，$\xi\ne b_n$，(当$n\to\infty$时，即$n=\infty$亦此)，所以，$\xi=0\ne b_n=\frac{1}{2^n}\to 0=0$，($n\to\infty$时)，矛盾。

错误之处在于：当$n<\infty$取任何有限值时，假设$b_n\notin I_n$成立；但当$n=\infty$时，假设$b_n\notin I_n$不成立。因为此时$I_n\le\frac{1}{2^n}\to 0=0$且$b_n=\frac{1}{2^n}=\varepsilon\to 0=0$而与 A 点重合，若此时坚持假设$b_n\notin I_n$，则闭区间套的唯一公共点就被“假设$b_n\notin I_n$”所排除掉了而转变成了“非连续区间有间断点，闭区间套定理不适用”的情况。即在没有(点)实数($b_n\notin I_n\to 0=0$为间断点)的“虚无(不存在)区间”中运用闭区间套定理则只能“套个空”。此时若既承认连续区间又满足“假设”排除b_n点，因承认连续闭区间$\{I_0=[0,1]=[A,B]\}$而能必然且唯一地“套住”实数ξ；因假设当$n=\infty$时，$b_n\notin I_n$而在假定的“间断点”没有实数(点)的“虚无(不存在)区间”运用闭区间套定理则只能“套个空”。则$0=M=A=\xi\ne b_n=\frac{1}{2^n}=0$。故，必然出现矛盾。

康托用区间套定理证明实数集不可数之谬，就属于闭区间套定理在“虚无(不存在)区间”运用会出现矛盾而不成立之情况。

康托错误断定：当$n=\infty$时，$\xi\in I_0$，因而ξ是$[0,1]$之中的点，因构造区间套的前提假设$b_n\notin I_n$，故$\xi\ne b_n,(n=1,2,\cdots)$，因此，$[0,1]\ne\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，与假设矛盾，所以，$[0,1]$是不可数集合。其实，当$n=\infty$时，$\xi=b_n=I_n=0$，但因构造区间套时错误假设$n$取任何值包括取无穷大时，$b_n\notin I_n$都成立，故，当取无穷大时构成自指否定(自相矛盾，违背矛盾律)，与汤姆逊分析语型语义悖论的对角线原理揭示的本质和结构相同。[18] [19]

3. 康托用对角线方法证明实数不可数回顾

康托为证明实数集是不可数集，构造了对角线方法。其证明步骤简述如下[2]：

为证明R(实数集)是不可数，只要证明$[0,1]\subseteq R$不可数。

用反证法，设$[0,1]$可数，则可设$[0,1]=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$。由于$a_n\in[0,1]$，故可用无穷十进制小数表示，并将这些数按行依次列出：

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.41024. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 27July 2019, publ: 30July 2019

$$a_1 = 0.a_{11}a_{12}\cdots a_{1n}\cdots$$
$$a_2 = 0.a_{21}a_{22}\cdots a_{2n}\cdots$$
$$a_3 = 0.a_{31}a_{32}\cdots a_{3n}\cdots$$

…

$$a_n = 0.a_{n1}a_{n2}\cdots a_{nn}\cdots$$

…

现定义数 $b = 0.b_1b_2\cdots b_n\cdots$，其构造规则为：$b_i = \begin{cases} a_{ii}+1 & (a_{ii}<9), \\ 0 & (a_{ii}=9). \end{cases}$

或定义数 $b = 0.b_1b_2\cdots b_n\cdots$，其构造规则为：$b_i = \begin{cases} 5 & (a_{ii}\neq 5), \\ 4 & (a_{ii}=5). \end{cases}$

数 $b = 0.b_1b_2\cdots b_n\cdots$ 的各位数 b_i 的这两种构造规则，对构造“与对角线数不同的数”而言没有实质区别，目的都是使 b 的每一位数字 b_i 都与 a_{ii} 不相等。

则显然数 $b\in[0,1]$。但 $b_i \neq a_{ii}, i=1,2,\cdots,n,\cdots$。故而 b 与闭区间 $[0,1]$ 中按行列示的任何一个实数 a_i 不相等。

因此，闭区间 $[0,1]$ 按行列示数中就没有实数 b，即找到了一个未能被按行列示的实数 b，不能与行序自然数建立一一映射关系，即证明了实数子集闭区间 $[0,1]$ 中存在不可数不可列的数 b，即闭区间 $[0,1]$ 是不可数子集合；从而 R(实数集)不可数不可列，是不可数集合。

4. 康托用对角线方法证明实数不可数之谬

康托用对角线方法证明实数 $[0,1]$ 闭区间子集不可数的错谬分析如下：

例康托构造与对角线数不同的数 $b = 0.b_1b_2\cdots b_n\cdots$，令构造规则 $b_i = \begin{cases} 5 & (a_{ii}\neq 5) \\ 4 & (a_{ii}=5) \end{cases}$。现具体构造纯小数完全枚举行序列，按行排序规则：对角线数是 $\dot{0}\dot{1}\dot{2}\dot{3}\dot{4}\dot{5}\dot{6}\dot{7}\dot{8}\dot{9}$，即循环节为 $\overline{0123456789}$ 进行排序，则构造的“与对角线数不同的数”就是 $b = 0.\dot{5}\dot{5}\dot{5}\dot{5}\dot{5}\dot{4}\dot{5}\dot{5}\dot{5}\dot{5}$ (即循环节为 $\overline{5555545555}$)。此数 $0.\dot{5}\dot{5}\dot{5}\dot{5}\dot{5}\dot{4}\dot{5}\dot{5}\dot{5}\dot{5}$ 按上述康托对角线方法证明是不可数的，但用康托表格斜线法证明此有理数 $0.\dot{5}\dot{5}\dot{5}\dot{5}\dot{5}\dot{4}\dot{5}\dot{5}\dot{5}\dot{5}$ 是可数的，矛盾，必有一假。

又例构造与对角线数不同的数 $b = 0.b_1b_2\cdots b_n\cdots$，令构造规则为 $b_i = \begin{cases} a_{ii}+1 & (a_{ii}<9) \\ 0 & (a_{ii}=9) \end{cases}$，具体构造纯小数完全枚举行序列，按行排序规则：对角线数是 $\dot{0}\dot{1}\dot{2}\dot{3}\dot{4}\dot{5}\dot{6}\dot{7}\dot{8}\dot{9}$，即循环节为 $\overline{1234567890}$ 进行排序，则构造的“与对角线数不同的数” $b = 0.\dot{1}\dot{2}\dot{3}\dot{4}\dot{5}\dot{6}\dot{7}\dot{8}\dot{9}\dot{0}$ (即循环节为 $\overline{1234567890}$)。此数 $0.\dot{1}\dot{2}\dot{3}\dot{4}\dot{5}\dot{6}\dot{7}\dot{8}\dot{9}\dot{0}$ 按上述康托对角线方法证明是不可数的，但用康托表格斜线法证明此有理数 $0.\dot{1}\dot{2}\dot{3}\dot{4}\dot{5}\dot{6}\dot{7}\dot{8}\dot{9}\dot{0}$ 是可数的，矛盾，必有一假。

康托的对角线方法，一是运用了“循着对角线或者行序必能数遍一切纯小数”之直观可信的前提，并“假设实数之 $[0,1]$ 闭区间子集 $R_{[0,1]}$ 的全部实数可按行列示并与行序自然数建立一一映射关系”；二是在构造“与对角线数不同的数”时，将实数之 $[0,1]$ 闭区间子集 $R_{[0,1]}$ 划分成了不相交的两个子集：“对角线相同的数” a_i 之子集 $R_{[a_i]}$ 和“与对角线数不同的数” b 之子集 $R_{[b]}$。即：并集 $R_{[0,1]} = R_{[a_i]} \cup R_{[b]}$。三是待证实数 $[0,1]$ 闭区间子集 $R_{[0,1]}$ 是否可列可数问题，转化为待证不相交的两个子集：“对角线相同的数” a_i 之子集 $R_{[a_i]}$ 和“与对角线数不同的数” b 之子集 $R_{[b]}$ 是否可列可数的问题；若子集 $R_{[a_i]}$ 或者 $R_{[b]}$ 至少一个不可列不可数，则实数子集 $R_{[0,1]}$ 不可列不可数，从而推断实数集 R 不可列不可数。

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.41024. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 27July 2019, publ: 30July 2019

康托在证明中，其一是只对“对角线相同的数之子集 $R_{[a_i]}$ 可列可数”进行了证明，而没有对“与对角线数不同的数之子集 $R_{[b]}$ 不可列不可数”进行证明，误以为并集 $R_{[0,1]}$ 中可数子集 $R_{[a_i]}$ 已经得到证明，那么，剩下的在可数子集 $R_{[a_i]}$ 之外的元素 b 自然是不可列、不可数的而无需证明，犯了“以偏概全”、“不当推断”的逻辑错误；其二是将需要证明的“实数之 $[0,1]$ 闭区间子集 $R_{[0,1]}$ 不可列不可数”，偷换成了只需要对“对角线相同的数之子集 $R_{[a_i]}$ 可列可数”进行证明，从而无意中犯了“偷换概念”的逻辑错误；其三是从“以偏概全”和“偷换概念”中得出的错误结论“实数之 $[0,1]$ 闭区间子集 $R_{[0,1]}$ 不可列不可数”继续推断出实数集 R 不可列不可数，再犯了“不当推断”的逻辑错误。

5. 可能取数滚动轮排无限列表图示法

5.1. 各数位可能取数滚动轮排无限列表图的构造

构造左闭右开区间 $[0,1)$ 纯小数各数位可能取数滚动轮排无限竖排列表图示如下：

第 1 位小数按 0、1、2、3、4、5、6、7、8、9 无穷重复排序在列表各行；

第 2 位小数按 1、2、3、4、5、6、7、8、9、0 不断重复排序在列表各行，并且，第 1 轮错开 1 位排，第 2 轮错开 2 位排，按模 10 循环。

第 3 位小数按 2、3、4、5、6、7、8、9、0、1 不断重复排序在列表各行，并且，第 1 轮错开 2 位排，第 2 轮错开 3 位排，按模 10 循环。

……

第 9 位小数按 8、9、0、1、2、3、4、5、6、7 不断重复排序在列表各行，并且，第 1 轮错开 8 位排，第 2 轮错开 9 位排，按模 10 循环。

……

以至无穷。

上述错位轮排的目标是实现 1 位数全排列，2 位数全排列，…，n 位数全排列，直至无穷位数全排列。

左闭右开区间 $[0,1)$ 纯小数各数位可能取数滚动轮排无限竖排列表图 3 如下：

上述图 3 完全枚举了左闭右开区间 $[0,1)$ 纯小数。涵盖了一切纯小数，概莫能外，且无一不在其内。

5.2. 左闭右开区间[0,1)一切纯小数都可数的证明

康托构造的与对角线数相同的数显然在上述图中，且与行序自然数建立一一映射关系而可数。

康托构造的与对角线数字 a_{11}（第 1 行的第 1 位)不同的数字(令为 b_1)，在第 1 行之后的无穷行中第 1 位数轮流取数字 0~9 之一且包括为 b_1 的数字都会被重复任意多次，即有任意多行的第 1 位数与对角线数的第一位数 a_{11} 不同而与 b_1 取值相同；……；同理，第 n 位数亦此，与对角线数的第 n 位数 a_{nn}（第 n 行的第 n 位)不同的数字(令为 b_n)，在第 n 行以后的无穷行中第 n 位数轮流取数字 0~9 之一且包括为 b_n 的数字都会被重复任意多次，即有任意多行的第 n 位数与对角线数的第 n 位数 a_{nn} 不同而与 b_n 取值相同；……；以至无穷位数都如此。故，康托构造的与对角线数不同的数 $0.b_1\cdots b_{n\to\infty}$ 必然在上述纯小数可能取数滚动轮排无限竖排列表图之中，且存在于已经完成比较“对角线相同的数”的行序之后。所以，康托寻找的不在列表图中的数，却必然在列表图中，矛盾。

不需复杂证明，按上述完全枚举“可能取数滚动轮排无限竖排列表图”中所列 $[0,1)$ 左闭右开区间的一切纯小数与其图示各行的顺序自然数天然建立一一映射关系，恰好证明实数之 $[0,1)$（左闭右开区间)子集是可数集合。

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.41024. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 27July 2019, publ: 30July 2019

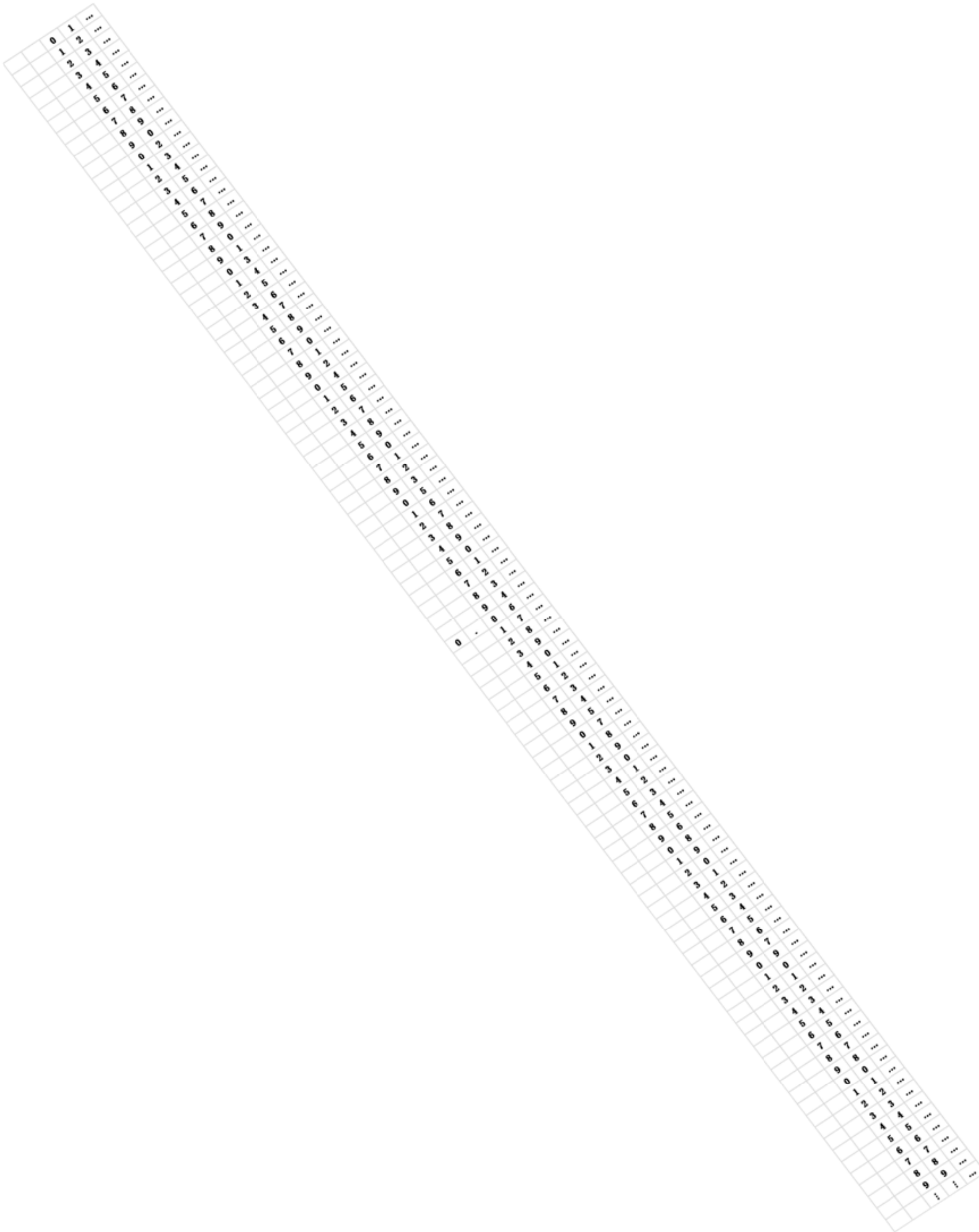

Figure 3. Rolling rotationally arranged infinite list graph with possible numbers
图 3. 可能取数滚动轮排无限列表图

5.3. 拓展证明实数复数向量数集是可数集

如法炮制，结合康托证明有理数集合是可数集合的表格斜线法，不难证明实数集合、复数集合、向量数集合都是可数集合。

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.41024. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 27July 2019, publ: 30July 2019

例如：上述[0,1)（左闭右开区间)纯小数“可能取数滚动轮排无限竖排列表图”镜像映射自然数集“列表图”；将镜像映射的自然数集“列表图”与纯小数集“列表图”相组合且仿康托证明有理数集合是可数集合的表格斜线法，易证实数集是可数集。

两个实数集其一带虚数单位，再仿康托证明有理数集合是可数集合的表格斜线法，易证复数集是可数集。

多个实数集且每一个都带不同的向量单位，再拓展仿康托证明有理数集合是可数集合的表格斜线法易证向量数集是可数集。

6. 可能取数有限表格图示法

6.1. 可能取数有限表格图的构造

构造可能取数有限列表图，如下图 4：任何实纯小数的每一位数都是 0、1、2、3、4、5、6、7、8、9 十个数字之一，概莫能外，且无一不在其内[20]。

		0	0	...
		1	1	...
		2	2	...
		3	3	...
		4	4	...
0	.	5	5	...
		6	6	...
		7	7	...
		8	8	...
		9	9	...

Figure 4. List graph with limited possible number
图 4. 可能取数有限列表图

6.2. 一切纯小数(左闭右开区间[0,1)实数)都可数的证明

任何一个纯小数都在上述图 4 中，由小数点之右无穷列且每列十格中仅选一格之数构成。

任何一个纯小数都是连接无穷位数的直射线或折射线串连之数。有限或无限循环小数的连线为先周期或非周期折线之后周期直射线或折射线。无限不循环小数[含开根无理数和超越数]连线为非周期无穷折射线。

康托所构造的对角线数相同之数必属上述可能取数有限表格图示中某条直射线或折射线连接之数；与对角线数不同之数也必属上述可能取数有限表格图示中的另一条直射线或折射线连接之数。因为任何纯小数的每一位数必为且仅为 0~9 十个数字之一，概莫能外且无一不在其内。

反证，若康托构造的与对角线不同之数不在纯小数可能取数有限表格中且不可数，则，纯小数可能取数有限表格镜像映射自然数可能取数有限表格，则必存在不在自然数可能取数有限表格中的不可数自然数，与自然数集是可数集且必在可能取数有限表格中相矛盾。

故，康托对角线方法证明实数集是不可数集、不可列集的结论是错误的。

与上面分析相同，康托在推理过程中错误断定所构造的与对角线数不同的数不在纯小数可能取数有限表格图中，但上述证明却必然在表格图之中。

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.41024. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 27July 2019, publ: 30July 2019

并且，上述纯小数可能取数有限表格图镜像映射自然数可能取数有限表格图,则两表格结构相同其全部可能取数之直射线或折射线连接之数必能建立一一映射关系,恰好证明纯小数集合与自然数集合一一映射，是可数集合。

6.2. 拓展证明实数复数向量数集是可数集

纯小数可能取数有限表格图不难类推拓广：

纯小数可能取数有限表格图镜像一一映射自然数可能取数有限表格图。

自然数可能取数表格图与纯小数可能取数表格图结合，并拓展运用康托表格斜线法一一映射实数可能取数表格图。

双实数可能取数表格图且其一带虚数单位，结合并拓展运用康托表格斜线法一一映射复数可能取数表格图。

多个实数可能取数表格且每一实数可能取数表格图都带向量单位，结合并拓展运用康托表格斜线法一一映射向量数集可能取数表格图。

故，实数集、复数集、向量数集是可数集。

7. 可能取数圆形数盘图示法

7.1. 可能取数圆形数盘图的构造

无穷个圆环套叠，第 1 内环划分 10^1 个扇区，不妨从 12 点钟方向顺时针依次填入十进制数字 0、1、2、3、4、5、6、7、8、9；第 2 内环划分 10^2 个扇区⋯，第 n 内环划分 10^n 个扇区。上一环之每个扇区对应下一环十个扇区，循环填数直至圆环扇区填满。如下图 5。

一是，若此圆形数盘表示纯小数集$[0,1)$ (左闭右开区间)，圆心赋 0 值和小数点，则第 1 环各扇区(1 位数全排列)涵盖表示了全部 1 位数纯小数(后面无穷环皆取 0 扇区)；第 1 环与第 2 环结合(2 位数全排列)则涵盖表示了全部 2 位数纯小数(后面无穷环皆取 0 扇区)；⋯；第 1 环与第 n 环结合(n 位数全排列)则涵盖表示了全部 n 位数纯小数(后面无穷环皆取 0 扇区)；⋯；直至无穷。概莫能外，且无一不在其中。

即纯小数集合为：十进制 0~9 十个数字的一位数的可重全排列、两位数的可重全排列、⋯、n 位数的可重全排列，直至无穷。

则，该圆形数盘涵盖了$[0,1)$ (左闭右开区间)的一切实纯小数。概莫能外，且无一不在其内。

每一个实纯小数都是从圆形数盘的圆心出发，经过每一环仅 1 个扇区的直射线或折射线连接之数。

二是，若上述纯小数圆盘镜像映射成为自然数圆盘(有限小数后面的无穷个 0 镜像映射自然数最高有效位前更高数位皆是空位)，则镜像圆形数盘表示自然数集。第 1 环各扇区(1 位数全排)涵盖表示了全部 1 位数自然数，第 2 环与第 1 环结合(2 位数全排列)则涵盖表示了全部 2 位数自然数，⋯，第 n 环至第 1 环结合(n 位数全排列)则涵盖表示了全部 n 位数自然数，⋯。概莫能外，且无一不在其中。

即自然数集合为:0~9 十个数字(十进制)的一位数的可重全排列、两位数的可重全排列、⋯、n 位数的可重全排列(有限自然数镜像映射 0 循环节有限纯小数)，直至任意位数的可重全排列。

三是，圆形数盘法的类推拓广。圆形数盘方法，除可表示自然数集、纯小数集外，不难类推拓广。表示有理(分数)数集：用两个圆形数盘，其一表示分子，另一表示分母。表示实数集：用两个圆形数盘，中间加小数点，其一表示整数，另一表示纯小数。表示复数集：四个圆形数盘分两组，即两组实数盘其一加虚数单位。表示向量数集：向量数个实数盘各带不同的向量标识符。同理，不难类推表示二进制(或任意 k 进制)数集(二进制数盘显得更简单，但不符合日常十进制思维习惯)。

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.41024. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 27July 2019, publ: 30July 2019

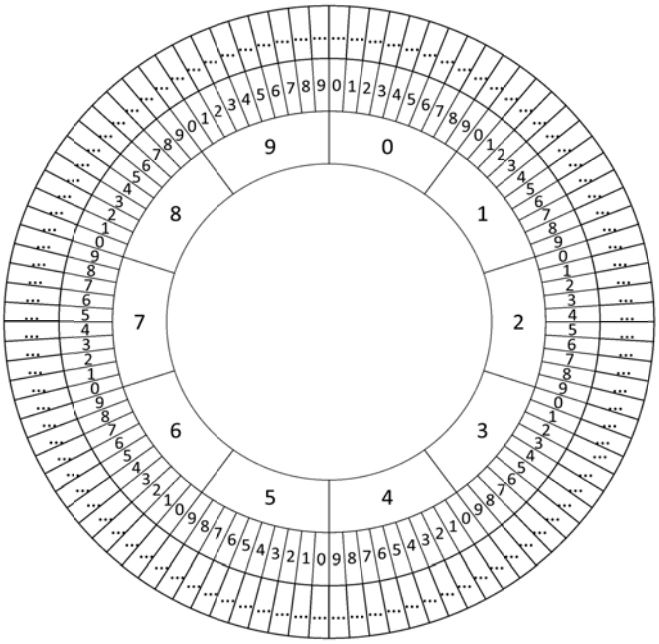

Figure 5. A disc graph of possible numbers
图 5. 可能取数圆形数盘表示图

7.2. 圆形数盘法证明纯小数可数

康托所构造的与对角线数相同的数，显然在圆形数盘中，每一位数映射纯小数盘某一内环之一某扇区。

康托所构造的与对角线数不同之数，显然也在圆形数盘中，其每一位数也必属纯小数圆盘中该环另一扇区之数(映射纯小数盘该环之另一扇区)，即必是连接各内环仅 1 个扇区的另一条直射线或折射线串联之数，因每一位数必属 0~9 十个数字(十进制)之一，概莫能外且无一不在其中。

反证，若康托构造的与对角线不同之数不在纯小数盘中且不可数，则，纯小数盘镜像映射自然数盘则必存在不是自然数盘中的不可数自然数，与自然数集是可数集且必在数盘中相矛盾。

从二进制数盘看，康托所构造的与对角线数不同的数就是二进制补数，显然存在于二进制数盘中。

勿需繁杂证明，纯小数盘与自然数盘相互镜像，构成一一映射关系而可数。

故，康托对角线方法本身错谬。

7.3. 圆形数盘法拓展证明实数复数向量数都可数

上述圆形数盘法结合康托证明有理数集是可数集合的表格斜线法，不难类推证明，实数集合、复数集合、向量数集合之圆形数盘与自然数圆形盘必能建立一一映射关系而是可数集合。

自然数盘与纯小数盘组合成实数，仿康托证明有理数集是可数集合的表格斜线法，分别映射为左标题行和上标题行，则实数必能与自然数盘一一映射而可数。

同理，两个实数其一带虚数单位组合成复数，仿康托证明有理数集是可数集合的表格斜线法，分别映射为左标题行和上标题行，则复数必能与自然数盘一一映射而可数。

如法炮制，若干个实数分别带不同的向量单位组合成向量数，拓展仿康托证明有理数集是可数集合的表格斜线法，多次分别映射为左标题行和上标题行，则向量数必能与自然数盘一一映射而可数。

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.41024. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 27July 2019, publ: 30July 2019

8. 拓展连分数法证明实数可数

8.1. 实数的简单连分数表示证明实数可数

引理：任意实数都可唯一写成简单连分数表示，有理数必可写成有限连分数，无理数必可写成无限连分数。[20] [21]

8.2. 以自然数 n 为循环节之简单循环连分数表示证明实数可数

以自然数 n 为循环节之简单连分数：

$$\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{n+\ddots}}}$$

若 n 取 1 时，就是

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}}}$$

然后，再取自然数序列 $m=1,2,3,\cdots$。

当 m 取 1 时，置换第 1 层的 n 为 1；

当 m 取 2 时，一是置换第 1 层的 n 为 1，二是置换第 1 层 n 为 2；三是置换第 1 层为 1 同时置换第 2 层为 2，四是置换第 1 层为 2 同时置换第 2 层为 1。(取全部子集的全排列，即取 1 个数的全排列和取 2 个数的全排列，置换生成不同的实数。)

当取自然数为 m 时，则取全部子集的全排列进行置换，即取 1 个数的全排列+取 2 个数的全排列+⋯+取 m 个数的全排列，置换上述简单连分数各层之数，置换生成不同的实数。

直至取任意多个乃至无穷个数的全部子集全排列，进行置换生成一切不同的实数。则无遗漏完全枚举一切简单连分数(有限连分数、无限循环连分数、无限不循环连分数)，且必能与全体排列之自然数序数建立一一映射关系，从而实数集可数。

8.3. 以自然数 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 为循环节之简单连分数表示证明实数可数

以自然数 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 为循环节之简单连分数：

$$\cfrac{1}{b_1+\cfrac{1}{b_2+\cfrac{1}{\cdots+\cfrac{1}{b_m+\ddots}}}}$$

然后，再取自然数序列 $k=1,2,3,\cdots$。

当 k 取 1 时，置换第 1 层的 b_1 为 1。

当 k 取 2 时，一是置换第 1 层的 b_1 为 1，二是置换第 1 层 b_1 为 2，三是置换及第 1 层 b_1 为 1 同时置换

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.41024. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 27July 2019, publ: 30July 2019

第 2 层 b_2 为 2，四是置换第 1 层 b_1 为 2 同时置换第 2 层 b_2 为 1。(取全部子集的全排列，即取 1 个数的全排列和取 2 个数的全排列，进行置换生成不同的实数。)

当取自然数为 k 时，则取全部子集的全排列进行置换，则取 1 个数的全排列+取 2 个数的全排列+⋯+取 k 个数的全排列，置换上述简单连分数各层之数，生成不同的实数。

直至取无穷个数的全部子集全排列，进行置换生成一切不同的实数。则无遗漏完全枚举一切简单连分数(有限连分数、无限循环连分数、无限不循环连分数)，且必能与全体排列之自然数序数建立一一映射关系，从而实数集可数。

8.4. 以自然数的任何无限不循环序列为无限简单连分数表示证明实数可数

以自然数的任何无限不循环序列为无限简单连分数：

$$\cfrac{1}{c_1+\cfrac{1}{c_2+\cfrac{1}{\cdots+\cfrac{1}{c_m+\cfrac{1}{c_{m+1}+\ddots}}}}}$$

当 $c_1, c_2, \cdots$ 取无限不循环序列为自然数序列时，无限简单连分数就是

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\ddots}}}}$$

然后，再取自然数序列 $k = 1, 2, 3, \cdots$。

当 k 取 1 时，置换第 1 层的 b_1 为 1。

当 k 取 2 时，一是置换第 1 层的 b_1 为 1，二是置换第 1 层 b_1 为 2，三是置换第 1 层 b_1 为 1 同时置换第 2 层 b_2 为 2，四是置换第 1 层 b_1 为 2 同时置换第 2 层 b_2 为 1。置换生成不同的实数。

…

当取自然数为 k 时，则取全部子集的全排列进行置换，则取 1 个数的全排列+取 2 个数的全排列+⋯+取 k 个数的全排列，置换上述简单连分数各层之数，进行置换生成不同的实数。

直至取无穷个数的全部子集全排列，进行置换生成不同的实数。则无遗漏完全枚举一切简单连分数(有限连分数、无限循环连分数、无限不循环连分数)，且必能与全体排列之自然数序数建立一一映射关系，故实数集可数。

9. 解方程之连分数表示形式证明实数可数

9.1. 有限连分数表示证明有理数可数

有理数方程

$$ax = b$$

$$x = \frac{b}{a}$$

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.41024. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 27July 2019, publ: 30July 2019

任何有理数都可写成有限简单连分数形式。因此，有限简单连分数之整数序列必可排序一一映射自然数而可数。

9.2. 简单循环连分数表示证明二次方程根实数可数

二次方程的根必可表示成简单循环连分数形式。

$$ax^2-bx-c=0$$

$$x=\frac{c}{a}+\frac{b/a}{x}$$

$$x=\frac{c}{a}+\cfrac{b/a}{\frac{c}{a}+\cfrac{b/a}{\frac{c}{a}+\cfrac{b/a}{\ddots}}}$$

由前述简单连分数证明实数可数可知，此二次方程生成的任何实数根都可数。

9.3. 复杂连分数表示证明三次及以上方程之根实数可数

三次及以上方程根实数必可表示成复杂连分数形式。

$$ax^3-bx^2-cx-d=0$$

$$x=\frac{b}{a}+\frac{c/a}{x}+\frac{d/a}{x^2}$$

$$x=\frac{b}{a}+\cfrac{c/a}{\frac{b}{a}+\frac{c/a}{\ddots}+\frac{d/a}{(\ddots)^2}}+\cfrac{d/a}{\left(\frac{b}{a}+\frac{c/a}{\ddots}+\frac{d/a}{(\ddots)^2}\right)^2}$$

以此类推，

$$a_0x^n-a_1x^{n-1}-a_2x^{n-2}-\cdots-a_{n-1}x^1-a_n=0$$

$$x=\frac{a_1}{a_0}+\frac{a_2/a_0}{x}+\cdots+\frac{a_{n-1}/a_0}{x^{n-2}}+\frac{a_n/a_0}{x^{n-1}}$$

$$\begin{aligned}x=\frac{a_1}{a_0}&+\cfrac{a_2/a_0}{\frac{a_1}{a_0}+\frac{a_2/a_0}{\ddots}+\cdots+\frac{a_{n-1}/a_0}{(\ddots)^{n-2}}+\frac{a_n/a_0}{(\ddots)^{n-1}}}+\cdots\\&+\cfrac{a_{n-1}/a_0}{\left(\frac{a_1}{a_0}+\frac{a_2/a_0}{\ddots}+\cdots+\frac{a_{n-1}/a_0}{(\ddots)^{n-2}}+\frac{a_n/a_0}{(\ddots)^{n-1}}\right)^{n-2}}\\&+\cfrac{a_n/a_0}{\left(\frac{a_1}{a_0}+\frac{a_2/a_0}{\ddots}+\cdots+\frac{a_{n-1}/a_0}{(\ddots)^{n-2}}+\frac{a_n/a_0}{(\ddots)^{n-1}}\right)^{n-1}}\end{aligned}$$

这是整系数一元 n 次方程实根的复杂连分数一般表示。

拓展前述简单连分数证明实数可数，不难证明复杂连分数都可数，则一元 n 次次方程的任何根实数都可数，从而实数可数。

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.41024. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 27July 2019, publ: 30July 2019

9.4. 复杂连分数表示证明超越数可数

仿一元 n 次方程实根的复杂连分数表示法，将超越数一元高次方程化为：

$$\delta_0 x^n - \delta_1 x^{n-1} - \delta_2 x^{n-2} - \cdots - \delta_{n-1} x^1 - \delta_n = \theta$$

令：δ_i 可以是代数数也可以是超越数，θ 为超越数(或者在 δ_i 至少其一为超越数时，θ 可取代数数以确保为超越数方程)。

$$x = \frac{\delta_1}{\delta_0} + \frac{\delta_2/\delta_0}{x} + \cdots + \frac{\delta_{n-1}/\delta_0}{x^{n-2}} + \frac{(\delta_n - \theta)/\delta_0}{x^{n-1}}$$

$$\begin{aligned} x = \frac{\delta_1}{\delta_0} &+ \frac{\delta_2/\delta_0}{\frac{\delta_1}{\delta_0} + \frac{\delta_2/\delta_0}{\ddots} + \cdots + \frac{\delta_{n-1}/\delta_0}{(\ddots)^{n-2}} + \frac{(\delta_n - \theta)/\delta_0}{(\ddots)^{n-1}}} + \cdots \\ &+ \frac{\delta_{n-1}/\delta_0}{\left(\frac{\delta_1}{\delta_0} + \frac{\delta_2/\delta_0}{\ddots} + \cdots + \frac{\delta_{n-1}/\delta_0}{(\ddots)^{n-2}} + \frac{(\delta_n - \theta)/\delta_0}{(\ddots)^{n-1}}\right)^{n-2}} \\ &+ \frac{(\delta_n - \theta)/\delta_0}{\left(\frac{\delta_1}{\delta_0} + \frac{\delta_2/\delta_0}{\ddots} + \cdots + \frac{\delta_{n-1}/\delta_0}{(\ddots)^{n-2}} + \frac{(\delta_n - \theta)/\delta_0}{(\ddots)^{n-1}}\right)^{n-1}} \end{aligned}$$

这是非整系数一元 n 次方程实根的复杂连分数一般表示。

拓展前述简单连分数证明实数可数，不难证明非整系数方程根之超越复杂连分数都可数，则非整系数一元 n 次次方程的任何根实数(含超越数)都可数，从而超越数可数。

10. 超越数生成函数证明超越数可数

10.1. 超越数的定义及分析

10.1.1. 超越数的否定性定义及分析

不是整系数的一元 n 次方程的根之数；等价定义：不是代数数系数的一元 n 次方程的根之数(因开根无理数系数可通过方程移项再乘方消除根号及化分数为整数而转化成整系数方程)。[22]

代数数的任意有限次加、减、乘、除、乘方、开根运算是封闭的。因此，代数数的有限次加、减、乘、除、乘方、开根运算不能生成超越数。

10.1.2. 超越数的肯定性定义及分析

非整系数一元 n 次方程的根。即至少存在一个超越数系数的一元 n 次方程的根若不是代数数则必是超越数。[22]

故，可通过若干个已知超越数作为系数求一元 n 次方程的根，生成超越数。即通过超越数生成超越数。

10.2. 代数数生成超越数的可数性证明

引理：“若 $\alpha \neq 0,1$ 是代数数，β 是代数无理数，则 α^β 是超越数。” [22]

显然，这就是一个代数数生成超越数的生成函数。令生成的超越数为 δ，则 $\delta = \alpha^\beta$，(δ 是超越数，β 是代数无理数，$\alpha \neq 0,1$ 是代数数。)

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.41024. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 27July 2019, publ: 30July 2019

10.2.1. 超越数 $\delta=\alpha^{\beta}$ 映射自然数方法

由于代数数 α,β 可数必能分别与自然数建立一一映射关系，再仿康托证明有理数可数之分数表格斜线法，α,β 分别映射表格的标题行与标题列，表内为超越数 $\delta=\alpha^{\beta}$，则从表内左上角起之斜线排序超越数必能一一映射自然数而可数。故，超越数 $\delta=\alpha^{\beta}$ 可数。

10.2.2. 可作代数数生成超越数的函数很多且能映射自然数

例：“设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 是不为 0 或 1 的代数数，又设 $1,\beta_1,\cdots,\beta_n$ 是在 Q 上线性无关的一组代数数，则 $\alpha_1^{\beta_1}\cdots\alpha_n^{\beta_n}$ 是超越数。”[23]又例“设 α 为非零代数数，则 e^{α} 为超越数。”[23]等等。如法炮制，不难证明，这些代数数生成的超越数都可数。

10.3. 一切超越数都能与自然数建立一一映射关系

显然，代数数生成超越数都能与自然数建立一一映射关系而可数。

那么，是否一切超越数都能与自然数建立一一映射关系而可数呢？

10.3.1. 一切超越数都能与自然数建立一一映射关系的证明方法之一

显然，代数数生成超越数都能与自然数建立一一映射关系而可数。

假设还存在不能由代数数生成超越数之函数生成的超越数 γ，则不能直接由代数数生成超越数之函数的途径而与自然数建立一一映射关系。

但是，代数数生成的超越数 δ 必能与 γ 建立函数关系：$\delta=f(\gamma)$ 从而间接建立与自然数的一一映射关系而可数。所以，一切超越数都可数。

10.3.2. 一切超越数都能与自然数建立一一映射关系的证明方法之二

引理 1：在复数域内一元 n 次方程必有且只有 n 个根。

引理 2：整系数(或代数数系数)一元 n 次方程的根必为代数数，反之，根全为代数数则必是整系数(或代数数系数)一元 n 次方程的解。

引理 3：超越数不是整系数一元 n 次方程的根，即当 $a_i,(0\le i\le n)$ 为整系数、x 超越数时，$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x^1+a_n\neq 0$，或者 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x^1+a_n=d$，$d$ 为超越数。

证明：令：$a_i\,(0<i<n)$ 为代数数(可化为整系数)，且 x 为超越数时，d 必为超越数；x 为代数数时，d 必为代数数。

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x^1+a_n=d$$

整理为：$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x^1+(a_n-d)=0$ (1)

则上述方程必有且只有 n 个解，且解为代数数或者超越数并未确定，若 d 为代数数则解为代数数；若 d 为超越数，则解为超越数。

该方程涵盖一切代数数和超越数 d，故，一切代数数可数，一切超越数可数。

10.3.3. 一切超越数集都能与自然数集合建立一一映射关系的证明方法之三—拓展康托方程指标法证明超越数可数

康托用整系数一元高次方程指标法证明了代数数(包括有理数和开根无理数)是可数。

下面拓展康托方程指标法证明超越数是可数。

令：$\delta_i\,(0<i<n)$ 为代数数生成的超越数，h 为代数数或超越数，x 为代数数解或超越数解。则方程

$$\delta_0x^n+\delta_1x^{n-1}+\cdots+\delta_{n-1}x^1+\delta_n=h$$

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.41024. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 27July 2019, publ: 30July 2019

整理为：$\delta_0 x^n + \delta_1 x^{n-1} + \cdots + \delta_{n-1} x^1 + (\delta_n - h) = 0$ (2)

将(1)-(2)得：$(a_0 - \delta_0)x^n + (a_1 - \delta_1)x^{n-1} + \cdots + (a_{n-1} - \delta_{n-1})x^1 + [(a_n - d) - (\delta_n - h)] = 0$

将 $\delta = \alpha^\beta$，(δ 是超越数， β 是代数无理数， $\alpha \neq 0,1$ 是代数数。)代入

$$\left(a_0 - \alpha_0^\beta\right)x^n + \left(a_1 - \alpha_1^\beta\right)x^{n-1} + \cdots + \left(a_{n-1} - \alpha_{n-1}^\beta\right)x^1 + \left[a_n - \alpha_n^\beta + (h - d)\right] = 0$$

上述方程必有且只有 n 个解，且解或者为代数数或者为超越数。

拓展康托证明代数数可数的一元高次方程指标法，因方程的系数$\left(a_i - \alpha_i^\beta\right)$和$\left[a_n - \alpha_n^\beta + (h - d)\right]$可数且可取遍一切代数数和超越数，故，上述方程的代数数解和超越数解都可数。

该方程涵盖一切代数数和超越数，故，一切代数数和超越数皆可数。

11. 结论与讨论

11.1. 结论

用闭区间套方法证明实数集是不可数集合构成语型语义悖论，内含自指否定之本质和统一结构，证明无效。

用对角线方法证明实数集是不可数集合，犯了偷换概念、以偏概全、不当推断的逻辑错误，证明无效。

发现并构造了六种方法：数系的可能取数滚动轮排无限列表图示法、可能取数有限列表图示法、圆形数盘图示法、拓展连分数法、代数数生成超越数法、拓广康托方程指标法，并分别证明了超越数集合、实数集合、复数合集、向量数集合都是可数集合。

11.2. 讨论

因康托对角线方法之谬，借用、推广、拓展、引申对角线方法当迅即停止。例如图灵停机问题证明、哥德尔不完全性定理证明、递归论中若干证明、塔斯基关于真理的论证、测度论相关内容、可计算理论相关内容等，运用康托对角线方法的证明无效，需另找其它方法证明或证伪。

鉴于本文已证明实数集是可数集，因此，希尔伯特提出 23 个数学问题中的第 1 个问题——连续统问题不存在。哥德尔用内模型(可构造集)方法证明了连续统假设和集合论公理系统的和谐性；Cohen 用外模型(力迫)方法证明了连续统假设之否定和集合论公理系统的和谐性，证明了连续统假设是与集合论公理系统独立的命题[24]，等价于证明了集合论公理系统内不存在连续统问题。

康托用闭区间套方法证明实数不可数，在构造区间套的假设前提条件时，n 取无穷大的情形中隐含了不易发现的自指否定；用对角线方法证明实数不可数，完成了“与对角线数相同的数”之无穷集的序列映射证明，误以为作了全面证明而忽略了还存在“与对角线数不相同的数”之数集的序列映射必须证明。可见，研究“无穷”当慎之又慎。

参考文献

[1] 方嘉琳编著，《集合论》[M]，吉林:吉林人民出版社，1982:92-93.
[2] [美]克林著，莫绍揆译，《元数学导论》[M]，北京:科学出版社，1985:4-6.
[3] 郭世铭著,《递归论导论》[M]，北京:中国社会科学出版社，1998:55-114.
[4] 张家龙著，《数理逻辑发展简史——从莱布尼茨到哥德尔》[M]，北京:社会科学文献出版社，1993:342-367，372-438.

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.41024. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 27July 2019, publ: 30July 2019

[5] [美]王浩著，康宏逵译，《哥德尔》[M]，上海:上海世纪出集团译文出版社，2002：350-362.
[6] [美]侯世达著，郭维德等译，《哥德尔、艾舍尔、巴赫——集异璧之大成》[M]，北京:商务印书馆出版社，1996：31-32，45-47，95-99，268-303，341-356，538-581.
[7] 乐秀成编译改写，《GEB——一条永恒的金带》[M]，成都:四川人民出版社，1984：43-120，139-148.
[8] 沈卫国，“康托对角线真的证明实数不可数了吗？”，《天津成人高等学校联合学报》[J]，200505(3)：85-91.
[9] 沈卫国，“论实数(连续统)的可数性及其相关问题”，《天津职业院校联合学报》[J]，200609(5):11-121.
[10] 沈卫国，“论康托对角线法的局限性与数学、逻辑学中的一些基础性问题”，《天津职业院校联合学报》[J]，200805(3):114-123.
[11] 邢滔滔，“无尽的对角线”，《科学文化评论》[J]，2014(3):5-20.
[12] 欧阳耿，“罗素悖论与康托在集合论中的两个失误”，《贵州师范大学学报(自然科学版)》[J]，200208(3):81-84.
[13] 欧阳耿，“康托在集合论中的两个失误”，《烟台师范学院学报(自然科学版)》[J]，200104(4):284-287.
[14] 欧阳耿，“康托实数集合不可数证明中的四种错误探析”，《喀什师范学院学报》[J]，201111(6):17-21.
[15] 温邦彦，“什么是康托的不可列集合？——无穷理论的新方案(3)”，《重庆工学院学报(自然科学版)》[J]，200911(11):145-153.
[16] [俄]菲赫金哥尔茨著，杨弢亮、叶彦廉译，《微积分学教程》(第一卷)(第 8 版)[M]，北京：高等教育出版社，2006:64-65.
[17] 常庚哲，史济怀编，《数学分析教程》(上册)[M]，北京：高等教育出版社，2003:28-29.
[18] 张建军，“对角线方法、对角线引理与悖论研究”[J]，《自然辩证法研究》1997,(13)12:11-15.
[19] 张建军，黄展骥著，《矛盾与悖论新论》[M]，石家庄：河北教育出版社，1998:146-179.
[20] 王建午，曹之江，刘景麟编，《实数构造理论》[M]，北京:人民教育出版社，1981:115-120.
[21] 高建福著，《无穷级数与连分数》[M]，合肥:中国科学技术大学出版社，2005:103-138.
[22] 于秀源，《超越数论基础》，[M]，哈尔滨：哈尔滨工业出版社，2011:32-46，80.
[23] 朱尧辰、徐广善，《超越数引论》，[M]，北京：科学出版社，2003:39，84.
[24] “10000 个科学难题”数学编委会，《10000 个科学难题》(数学卷)[M]。北京：科学出版社，2009:11.

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.41024. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 27July 2019, publ: 30July 2019