Newton's Binomial Theorem Based on Three-Dimensional Recursive Algorithms

Zhicheng Guo[1], Jun Yang[2]

[1]Northern Design and Research Institute, Shijiazhuang, China
[2]Professor, Aviation Technology School Beijing INStitute of Technology, Zhuhai, China
Email: 13833116000@139.com

Received: Mar. 25th, 2019, published: Mar. 28th, 2019

Abstract

The recursive algorithm of Newton's binomial expansion calculates directly $(x + y)^{k-1}$ without calculating $(x + y)^k$, where the exponential term k is a "two-dimensional" rational number (one-dimensional molecule and denominator) or a negative number. To solve the problem of calculating the coefficients of Newton's binomial expansion terms, this paper presents a new "three-dimensional" recursive algorithm for splitting functions with three variables. This method transforms the step-by-step recursive process into the splitting calculation of integers (or rational numbers) and then directly calculates the coefficients of arbitrary expansion terms. At the same time, it proves and explains that the essence of the coefficients of Newton's binomial expansion terms is the ratio of splitting functions. On the other hand, when k is not a positive integer, the polynomial rings given by Newton's binomial expansion are all in the form of infinite series. In addition to polynomial rings in infinite series form, there are polynomial rings in finite sequence and form in the expansions given in this paper. Therefore, the new algorithm can be used to further study the prime elements in the Gauss integer ring.

Keywords

Newton's Binomial Coefficients, Recursive

基于三维递推算法的牛顿二项式定理研究

郭志成[1]，杨　军[2]

[1]北方设计研究院，石家庄，中国
[2]教授，北京理工大学珠海航空学院，珠海，中国
Email: 13833116000@139.com

收稿日期：2019年3月25日；发布日期：2019年3月28日

摘　要

牛顿二项式展开的递推算法先不计算$(x + y)^{k-1}$而直接计算$(x + y)^k$，其中指数项k是“二维”有理数(分子

和分母各一维)或负数。针对牛顿二项式展开项系数的计算问题，本文给出了一种分拆函数有三个变量的新的“三维”递推算法。该方法把逐步递推的过程转化成了整数(或有理数)的分拆计算进而可直接求出任意展开项的系数，同时也证明和解释了牛顿二项式展开项系数的本质是分拆函数的比值。另一方面，当**k**不是正整数时，牛顿二项展开式给出的多项式环都是无穷级数的形式。而本文给出的展开式中除了有无穷级数形式的多项式环以外，还存在有限序列和形式的多项式环。因此，新算法可以用来进一步研究高斯整数环中的素元。

关键词

牛顿二项式系数，三维递推，分拆函数

1. 引言

17 世纪，Jakob Bernoulli 给出了把二项式展开式的系数解释为组合数的证明。后来，Iassc Newton 又给出了不先计算 $(x+y)^{k-1}$ 而直接去计算 $(x+y)^k$ 的递推方法如下：

令：$x=P, y/x=Q, k=m/n$，二项式公式可以表示为：

$$(P+PQ)^{m/n}=P^{m/n}+\frac{m}{n}AQ+\frac{m-n}{2n}BQ+\frac{m-2n}{3n}CQ+\cdots$$

这里 A 表示第一项，就是 $P^{m/n}$，B 表示整个第二项，也就是 $\frac{m}{n}AQ$，C 表示整个第三项，依次类推。在这种情况下，指数可以是一个分数或负数。我们由此得到的不是一个多项式，而是一个关于 Q 的无穷级数，Q^r 的每项系数是一个常数(类似二项式的组合系数)乘以 $P^{m/n}$。

令：$P=1, Q=z$，就得到了我们熟悉的二项式公式。许多文献试图拓展牛顿二项式定理，除了指数项可以拓展为复数之外，再没有其它令人满意的结果[1] [2] [3]。

2. 基于分拆函数的三维递推算法

Euler 定义了符号 (N,n,p) 表示将整数 N 分成 n 个部分，且每一部分≤p 的分拆的种数(这里，次序是要考虑的)。这个分拆的种数就是在

$$\left(x+x^2+x^3+\cdots+x^p\right)^n=x^n\left(1+x+x^2+\cdots+x^{p-1}\right)^n$$

展开式中 x^N 的系数。

显然存在恒等式

$$(n+k,n,p)=\binom{n}{k}_p$$

式中符号 $\binom{n}{k}_p$ 表示 $\left(1+x+x^2+\cdots+x^{p-1}\right)^n$ 展开式的 x^k 项的系数。

为了方便，我们把简单多项式的系数 $\binom{n}{k}_p$ 简记为 $c(k,n,p)$。对于正整数 n,k

$$(n+k,n,p)=c(k,n,p)$$

又由于存在对称性

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.41008. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 25 March 2019, publ: 28 March 2019

$$\binom{n}{k}_p = \binom{n}{(n-1)p-k}_p$$

因此按照牛顿二项式定理的递推法则，我们得到的指数为整数 n 的二项式幂的展开式为

$$\left(P+PQ\right)^n = P^n + \frac{c(n-1,n,2)}{1}AQ + \frac{c(n-2,n,2)}{c(n-1,n,2)}BQ + \frac{c(n-3,n,2)}{c(n-2,n,2)}CQ + \cdots \tag{1}$$

由此就得到的 Q^r 的每项系数转化成为了简单多项式 $\left(1+x+x^2+\cdots+x^{p-1}\right)^n$ 系数 $c(s,r,p)$ 的一个比值。下面介绍这种比值的算法。

2008 年，Hacène Belbachir, Sadek Bouroubi 和 Abdelkader Khelladi 给出的简单多项式(项分式)展开公式[4]。

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{x^p}{1-x}\right)^n &= \left(1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{p-1}\right)^n \\ &= 1+nx+\cdots+nx^{pn-n-1}+x^{pn-n} \\ &= \sum_{m=0}^{(p-1)n} x^m \binom{n}{m}_p \\ &= \sum_{m=0}^{(p-1)n} x^m \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{m}{p} \right\rfloor} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{n-1+m-kp}{k-kp}\end{aligned}$$

可以得到：

$$\left(n+k,n,p\right) = \binom{n}{k}_p = \binom{n}{pn-p-k}_p$$

它通常表示为组合函数或分拆函数的形式

$$\binom{n}{k}_p = c(p,n,k) = p(n,k,p)$$

式中 $p(n,k,p)$ 是熟知的分拆函数 [1]。

因此公式(1)给出的也是不先计算 $(x+y)^{k-1}$ 而直接去计算 $(x+y)^k$ 的递推。并且可以直接求出我们想要得到的第 $x^{k-i}y^i$ 项的系数 $\dfrac{c(n-i,n,2)}{c(n-i+1,n,2)}$。

3. 新算法的进一步推广和意义

由于组合数 $c(p,n,k)$ (或 $p(n,k,p)$)通常只能计算整数的情形，因此公式(1)推广了牛顿二项式递推方法只完成了指数项为整数的推广。下面讨论如何推广指数项为到任意分数的问题。

显然，(1)中的 n 为分母，分子为 1 的二项式也是可以计算的。它的递推表达式为

$$\left(P+PQ\right)^{1/n} = P^{1/n} + \frac{1}{c(n-1,n,2)}AQ - \frac{c(n-1,n,2)}{c(n-2,n,2)}BQ + \frac{c(n-2,n,2)}{c(n-3,n,2)}CQ - \cdots \tag{2}$$

由牛顿二项式定理知道，指数为分数 m/n 时(不要求 n 为素数)，分数 m/n 的分拆数 $p(m/n+k,m/n,p)$ 也

[1] 本文使用了三种数学符号 $(n+k,n,p)$, $\binom{n}{k}_p$, $p(n,k,p)$，是因为尽管它们的数值相同，但来源于不同的组合解释。

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.41008. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 25 March 2019, publ: 28 March 2019

是可以递推计算的，因此推广指数项为到任意分数的牛顿二项式递推方法的问题转化成为了分数的分拆如何计算的问题。

J. Wallis 讨论过用分子分母更小的分数之和(逼近)表示给定的分数，首开研究分数分拆的先河，Euler 其后将这个问题拓展为求解 $\zeta(2n)$ 的公式。由于在单位圆上可以用自然数给分数的顺序做标记(似于牛顿多项式定理的 m, n 可以分别是有理数)因此，用新方法展开有理数幂次的二项式不存在困难[4]。

如果我们添加 I_p 表示 p 进制的单位 P，Q 为 p 进制的多项式。那么，当 $p = q$ 时，二项式公式就写成高斯整数的分拆(或分解为素元)形式了[5]。

分拆数 (m,n,p) 等于简单多项式的系数 $c(m+n,n,p)$，因此可以用“相邻”整数分拆函数的比值而不是分数的比值递推求解多项式的系数，它给出了二项式展开的另一种递推求解方法。也就是，当把 n 推广为有理数 m/n 时，可以由公式

$$
\begin{aligned}
(P+PQ)^{m/n} &= P^{m/n} + \frac{c(m/n-1,m/n,2)}{1}AQ + \frac{c(m/n-2,m/n,2)}{c(m/n-1,m/n,2)}BQ + \cdots \\
&= P^{m/n} + \frac{p(2,m/n,m/n-1)}{1}AQ + \frac{p(2,m/n-2,m/n)}{p(2,m/n-1,m/n)}BQ + \cdots
\end{aligned}
$$

计算每项的系数。它对于研究 David Hilbert 提出的第 16 个问题的极限环和 ABC 猜想具有重要的意义。欧拉证明了存在递推公式

$$(N+1,n+1,p) = (N,n+1,p) + (N,n,p) - (N-p,n,p)$$

它可以表示为

$$\frac{c(m,n+1,p) - c(m-1,n+1,p)}{c(m,n,p) - c(m-p,n,p)} = 1$$

从公式可以看出，变量 p 的取值对于等式成立与否没有影响。也就是当 p 为有限的整数时，恒等式中可以只保留 $m-p$ 和 m,n 与 1 的简单组合而去掉第三个非独立变量 p。故简记为

$$\frac{c(m,n+1) - c(m-1,n+1)}{c(m,n) - c(m-p,n)} = 1$$

这个性质是有理系数多项式独有的性质，可以用来进一步研究高斯整数环中的素元，通常人们称 p 为(与 P 相关的)自由基或多项式的有理数幂 0 项。

在 $(P+PQ)^{m/n}$ 的展开式(通常为级数)中，变量 p 又是不可或缺的，因为展开项的系数随 p 的不同而改变，甚至可以改变展开式的性质。具体来说，存在一个正实数值 C，使得当 $p > C$ 时，展开的级数一定是收敛的，当 $p < C$ 时，展开的级数一定是发散的[6]。它的实例可参见牛顿二项式定理原文[7]中对三项根式 $\sqrt[5]{c^5 + c^4x - x^5}$ 展开式的说明。

对 $p = C$ 的研究并非没有意义，恰恰相反，研究这种情形下高斯整数环中素元的性质非常重要。

4. 应用举例

继续用代数法研究 $(P+PQ)^{m/n}$ 展开式的性质，将变得非常繁琐和不直观。因此本文用一个例题帮助人们理解公式(1)的性质。

例题： 用两种方法求解 $c(3,4,3)$、$c(5,8,2)$ 和 $c(8,8,3)$。

解： 第一种方法，利用简单多项式求解公式求得：

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.41008. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 25 March 2019, publ: 28 March 2019

$$c(3,4,3)=\binom{4}{0}\cdot\binom{6}{3}-\binom{4}{1}\cdot\binom{3}{0}=16$$

$$c(5,8,2)=\binom{8}{0}\cdot\binom{12}{5}-\binom{8}{1}\cdot\binom{10}{3}+\binom{8}{2}\cdot\binom{8}{1}=56$$

$$c(8,8,3)=\binom{8}{0}\cdot\binom{15}{8}-\binom{8}{1}\cdot\binom{12}{5}+\binom{8}{2}\cdot\binom{9}{2}=1107$$

第二种方法，已知将 7 分成四部分，且每一个部分≤3 的分拆种数如下：

$$\begin{array}{ccc}
3+2+1+1 & 2+3+1+1 & 1+3+2+1 \\
3+1+2+1 & 2+1+3+1 & 1+1+3+2 \\
3+1+1+2 & 2+1+1+3 & 1+1+2+3 \\
1+2+2+2 & 2+1+2+2 & 1+3+1+2 \\
 & 2+2+1+2 & 1+2+3+1 \\
 & 2+2+2+1 & 1+2+1+3
\end{array}$$

枚举法得到$(7,4,3)=16$。再利用关系式可以求得：

$$c(3,4,3)=c(7-4,4,3)=(7,4,3)=16$$

已知存在关系式

$$c(5,8,2)=\binom{8}{5}_2=\binom{8}{5}$$

利用二项式系数的组合公式可以得到

$$c(5,8,2)=56$$

已知：$(1+x+x^2)^n$ 的展开式里 x^n 项的系数(最大系数)计算公式[3]为

$$\binom{n}{0}\cdot\binom{n}{0}+\binom{n}{1}\cdot\binom{n-1}{1}+\binom{n}{2}\cdot\binom{n-2}{2}+\binom{n}{3}\cdot\binom{n-3}{3}+\cdots$$

或阶乘平方的倒数和形式

$$1+\frac{n(n-1)}{(1!)^2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{(2!)^2}+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{(3!)^2}+\cdots$$

由此求出

$$c(8,8,3)=\binom{8}{0}\cdot\binom{8}{0}+\binom{8}{1}\cdot\binom{7}{1}+\binom{8}{2}\cdot\binom{6}{2}+\binom{8}{3}\cdot\binom{5}{3}+\binom{8}{4}\cdot\binom{4}{4}=1107$$

由此可以看出，简单多项式系数公式$c(m,n,p)$包括了数的分拆、两个项对称和 x^n 项的最大系数的计算过程。更通俗地说，当我们任意选取正整数数组(m,n,p)作为一个变量时，可以按项数的分拆，每两项的对称和最大项数的位置归为三类分解法，每类又有两种不同的计算方法，后一种方法是枚举法，前一种属于递推法。上述描述是用歌德尔数对公式(1)的刻画，属于元数学(包括了对有理数)研究的范畴。

本文公式(1)的一个简单应用是，不计算圆周率而直接求解圆周率的某一位数上的数字。这些内容都属于高深的数论内容，不在这里赘述。

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.41008. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 25 March 2019, publ: 28 March 2019

参考文献

[1] Erdős, Paul, Lacampagne, C. B. , & Selfridge, J. L. . (1988). Prime factors of binomial coefficients and related problems.Acta Arithmetica,49(5), 507-523.

[2] Kiliç, E. , & Prodinger, H. . (2016). Evaluation of sums involving gaussian q-binomial coefficients with rational weight functions. International Journal of Number Theory, 12(02), 495-504.

[3] Cohen, D. I. A. . (1978).Basic Techniques of Combinatorial Theory.Basic techniques of combinatorial theory. Wiley.135

[4] Artin, M. , Tate, J. , & Bergh, M. V. D. . (1991). Modules over regular algebras of dimension 3.Inventiones Mathematicae,106(1), 335-388.

[5] Murawski, R. (1999). Recursive functions and metamathematics.

[6] 佚名. (2013).无穷分析引论.Euler 著.

[7] 佚名. .数学珍宝——历史文献.李文林主编.443-448

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.41008. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 25 March 2019, publ: 28 March 2019