

Proof of Riemann Hypothesis(一)

—The Way, Method and Main Steps of Proving Riemann Hypothesis(1/3)

Zhicheng Guo, Jun Yang

Beijing institute of Technology, Zhuhai, Zhuhai Guangdong, China

Email: 13833116000@139.com, yj621015@163.com

Received: Jul. 14th, 2020, published: Jul. 17th, 2020

Abstract

In view of the problem of zero point theory of periodic polynomials and its abnormal phenomenon near the peak of $|\zeta|$, this paper relates the periodic zero point of function f defined on interval $[-a, a]$ and its odd order at $\pm a$ with the new properties of cliffor chain and prime number, which are the author's research results, and makes a reasonable explanation of Riemann's hypothesis by using Godel number, and then completes the proof of Riemann's conjecture. At the same time, 21 basic new theorems, lemmas and corollaries which are closely related to the proof of Riemann conjecture are given. The concrete idea of proof: first, set the formula $\frac{1}{2}[\zeta(3) - \zeta(-3)]$ of $\zeta(3) = \frac{2}{7}\pi^2 \log 2 + \frac{16}{7} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \log(\sin x) dx$ and $\zeta(-3) = \frac{1}{120}$ as "special unit" I expressed by M-Gonal number, then decompose the set of all nontrivial zeros into the path combination of "special unit" I , and then by studying the geometry system of Helmholtz and Clifford, we can get the method of transforming Riemannian analytic extension of ζ function into discrete series extension. The main steps are as follows: 1) Transform the integral function $\int_0^{\infty} J(x) x^{-s-1} dx$ into a series form based on plane stratification, study the two necessary and sufficient conditions that the real integral function has only real zero point, and apply these conditions in the study of Riemann function; 2) Apply the reduction principle of Fermat method to prove the zero point distribution conclusion of the whole periodic function related to the Riemann ζ function; 3) Study the 16th problem of Hilbert and hel Mholdz and Clifford's geometric system equivalence problem. Based on the research of the simplest calculation method of the recurrence theory of metamathematics, this paper briefly proves that the 16th problem of Hilbert is equivalent to the finite points where the space finite parallel lines (finite distance) intersect at infinity; 4) The basic principle of proving Riemann conjecture and two key conclusions are given. In fact, many papers that have been published or published in Hans publishing house belong to the preparatory work of proving Riemann's conjecture. In the future, we will continue to give detailed proof or explanation of each of the above items around Riemann conjecture, and finally complete the strict proof of Riemann conjecture.

Keywords

Zeros of the Riemann Zeta Function, Greedy Algorithm, Planar Configuration, Clifford Chain, Rational Recursion, Binary Parting

黎曼猜想的证明(一)

——证明黎曼猜想的途径、方法和主要步骤(上)

郭志成, 杨 军

北京理工大学珠海学院, 广东 珠海, 中国

Email: 13833116000@139.com, yj621015@163.com

收稿日期: 2020年7月14日; 发布日期: 2020年7月17日

摘 要

针对周期多项式的零点理论问题及其在 $|\zeta|$ 峰值附近的异常现象, 将区间 $[-a, a]$ 上定义的函数 f 的周期零点及其在 $\pm a$ 处的奇数阶与作者的研究成果—Clifford链的新性质和素数的新性质联系起来, 并用哥德尔数对黎曼假定作出了合理的解释, 进而完成了黎曼猜想的证明。同时, 论文中也给出了21个与证明黎曼猜想紧密相关的基础性新定理、引理和推论。证明的具体思路: 首先将Euler公式 $\zeta(3) = \frac{2}{7}\pi^2 \log 2 + \frac{16}{7} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \log(\sin x) dx$ 和 $\zeta(-3) = \frac{1}{120}$ 的算式 $\frac{1}{2}[\zeta(3) - \zeta(-3)]$ 设定为用M角数表示的“特殊单位”1, 然后分解所有非平凡零点的集合为“特殊单位”1的路径组合, 再通过研究Helmholtz和Clifford的几何体系, 就可以得到将 ζ 函数的黎曼解析延拓转化为离散级数延拓的方法。主要步骤: 1) 将积分函数 $\int_0^{\infty} J(x)x^{-s-1} dx$ 转化为基于平面分层的级数形式, 研究实整函数只有实零点的两个充要条件, 并在黎曼函数的研究中应用这些条件; 2) 应用费马递降法的降阶原理, 证明与黎曼函数 ζ 有关整周期函数的零点分布结论; 3) 研究希尔伯特第16个问题与Helmholtz和Clifford的几何体系等价问题。通过元数学递归理论的最简计算方法的研究, 扼要证明希尔伯特第16个问题与空间有限条平行直线(有限的间距)相交于无穷远处的有限个点等价的结论; 4) 给出证明黎曼猜想的基本原理以及两个关键结论。实际上, 已经在汉斯出版社发表或发布的多篇论文都属于证明黎曼猜想的前期准备工作。我们以后将围绕着黎曼猜想陆续给出上述每一项内容的详细证明或说明, 最终完成黎曼猜想的严密证明。

关键词

黎曼函数非平凡零点, 贪婪算法, 平面构形, Clifford链, 有理递归, 二元分拆

1. 引言

1859年, 黎曼在论文《论不大于一个给定值的素数个数》的论文中研究了定积分

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^{\infty} \left(\frac{x^{s-1}}{e^x - 1} \right) dx, (s \text{ 为复变量})$$

和

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s) &= \int_1^{\infty} \Psi(x)x^{\frac{s}{2}-1} dx + \int_0^1 \Psi\left(\frac{1}{x}\right)x^{\frac{s-3}{2}} dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \left(x^{\frac{s-3}{2}} - x^{\frac{s}{2}-1}\right) dx \\ &= \frac{1}{s(s-1)} + \int_1^{\infty} \Psi(x) \left(x^{\frac{s-2}{2}} + x^{\frac{s-1}{2}}\right) dx \end{aligned}$$

式中 $\Psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi x}$ 。

由于圆周率 π 与素数存在着密切的关系，人们通常用函数 $\pi(x)$ 表示正整数中小于 x 的素数个数。通过比较函数 $\pi(x)$ 和积分 $li(x) = \int_0^x (1/\ln t) dt$ 的值，黎曼预言了 $\pi(x) - li(x)$ 的几个变化问题，并提出了函数 $\zeta(s)$ 的复零点(简称零点)全部位于直线 $Re(s) = \frac{1}{2}$ 上的著名猜想。人们又称之为黎曼假定，并将其英文 Riemann Hypothesis 简记为 RH。对 RH 的不同表述出现在许多种不同的数学领域[1]，在解析数论领域中，人们通过简单的代数变换将 RH 表述为素数的密度形式如下：

$$\pi(x) - li(x) = O\left(x^{\frac{1}{2}}\right) \quad (1.1)$$

或相邻素数之差的形式

$$p_{n+1} - p_n < p_n^{\frac{1}{2} + \delta} \quad (1.2)$$

尽管大量数据显示 $\pi(x) - li(x) > 0$ ，但令人吃惊的是，李特尔伍德证明了 $\pi(x) - li(x)$ 可以由负变正，再由正变负，如此反复无穷多次。这个结论深刻但简洁的揭示了黎曼零点的复杂性质，甚至人们至今不知道第一次符号变化的位置。李特尔伍德关于符号变化的证明使用了分拆理论，分拆理论超出了分析的范畴，它说明了分拆理论对 RH 的重要性。

黎曼对此问题仅仅指出 $\pi(x) - li(x)$ 的误差有时太大，但他没有说具体的原因。目前给出指数项误差的重要结果是

$$p_{n+1} - p_n < p_n^{\frac{11}{20} + \delta} \quad (1.3)$$

式中 δ 为无穷小。

我们注意到，公式中的常数 $\frac{11}{20}$ 是由 $\frac{7}{12} \rightarrow \frac{13}{23} \rightarrow \frac{5}{9} \rightarrow \frac{11}{20}$ 逐步改进得来的，它与黎曼的思想来源完全不同，这种由三角和的估计法逼近素数之差的现代分析方法已经走到了尽头[2]，为此拉马努金转向了自守形式的离散方法研究。

对于连续素数的间隔等级问题，目前最好的结果仍然是 A.E.Ingham 在 1937 年给出的公式

$$p_{n+1} - p_n < K p_n^{\frac{5}{8}} \quad (1.4)$$

式中 K 是一个与 n 无关的确定正数。

在离散数学领域，黎曼 ξ -函数的所有零点的表述是这样的：实函数

$$\xi\left(\frac{x}{2}\right) = 8 \int_0^{\infty} \Phi(t) \cos(xt) dt \quad (1.5)$$

中函数 $\Phi(t)$ 可以表为

$$\Phi(t) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \pi n^2 (2\pi n^2 e^{4t} - 3) \exp(5t - \pi n^2 e^{4t}) \quad (1.6)$$

式中 $t \in R$ ；且 $n = 1, 2, 3, \dots$ 为自然数。

由此可以把公式(1.5)写成关于原点的泰勒级数形式

$$\frac{1}{8}\zeta\left(\frac{x}{2}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \hat{b}_m x^{2m}}{(2m)!} \quad (1.7)$$

式中

$$\hat{b}_m := \int_0^{\infty} 2^{2m} \Phi(t) dt \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.8)$$

1927年, Pólya 在研究 J.L.W.V.Jensen 关于 RH 的一些未发表的零星笔记时, 提出了表达式(1.8)的不等式猜想

$$(\hat{b}_m)^2 > \left(\frac{2m-1}{2m+1}\right) \hat{b}_{m-1} \hat{b}_{m+1} \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.9)$$

后来 Turén 证明了这个不等式确实是正确的。我们对 Turén 不等式的兴趣是很自然的, 这是因为如果不等式(1.9)在某些 $m > 1$ 的情况下不成立, 那么 RH 就不能成立。也就是说, Turán 不等式是 RH 成立的必要条件。在此基础上, 文献[3]研究了实整函数只有实零点的几个充要条件, 并将这些条件应用于黎曼函数, 证明了与黎曼函数有关的整函数零点分布的一些结果。

作者研究了在 $m = 1/2$ 的情况下 RH 成立的充要条件, 改进了文献[3]的结果, 利用 Turén 不等式并采用离散的方法给出黎曼猜想的证明; 再用分析法简化证明过程, 最后给出第二种黎曼猜想的解析证明。其间有理递归理论是研究这种变化规律的基础, 已经发表的多篇论文[4]-[10]已经扫除了证明过程中的许多障碍。

在黎曼之后的二百多年, RH 吸引了许多研究素数的数学家尝试着证明或找到反例, 分析学家为此还提出了许多种估算非平凡零点的方法。由于表示素数分布规律的微积分形式(1.1)简洁明了, 目前人们大多数采用的研究工具都是属于微积分的分析方法, 它是研究笛卡尔坐标系中的函数方法。另一种研究 RH 的方法是离散法, 主要是哈代和拉玛努金使用的分拆方法, 此方法甚至证明了几乎所有零点都能使猜想成立。遗憾的是, 随着拉玛努金的离世, 他们曾研究过的涉及零点的分拆领域[11]再无突破性进展。至今人们既没有找到黎曼猜想的反例, 也没有一种方法是计算全部零点的。

因为数值符号 $\Pi(s-1) = \Gamma(s)$, 而函数 $\Gamma(s)$ 存在(连续性的)积分的表达式, 故分析学家通常把欧拉给出的符号 $\Pi(s-1)$ 写为欧拉定义的 $\Gamma(s)$ 函数。由于这个原因, 函数 $\Gamma(s)$ 具有数值和顺序的双重意义。这种双重意义的另一个例子是, 连续的第 n 个素数公式

$$f_{p_1=2}(n) = \theta^{3^n}, \quad \theta \approx 1.3064$$

和

$$g_{p_1=2}(n) = \left\lfloor 2^{2^{2^{\dots^{\omega}}}} \right\rfloor \quad (\text{共有 } n \text{ 个指数}), \quad \omega \approx 1.9287800$$

它们表示了从 $p = 2$ 开始, 素数计数和素数由小到大顺序排列的双重意义[12]。

上面给出的数组 $(\theta, \omega) \approx (1.3064, 1.9287800)$ 是利用已知素数计算得到的大致结果。如果我们从 3 开始对素数计数, 那么我们可以得到 (θ, ω) 的另一组实数。显然, 数组 (θ, ω) 随着起始素数 p_1 的增加, 变量 θ, ω 是单调递增的。找出用有理数逼近 θ/ω 的变化规律是证明 RH 的关键一环, 这种算法通常称为逆向数学。逆向数学属于元数学, 元数学最常用的算法是递归理论。作者就是通过研究关于 Clifford 链的元数学理论, 发现了 RH 的证明方法。

2. 黎曼猜想(RH)的研究回溯

黎曼在修改第五公设的基础上，建立了黎曼空间理论，并提出了 RH。在此之前，欧拉研究了来自圆的超越量，得到了 ζ 函数的实零点展开成级数方程的实根，解决了著名的伯努利难题。RH 的是复根之间的关系，属于黎曼流形的性质。两者的原理相近，只是复杂程度不同而已。我们还应该注意到，所有的数学命题都是由两部分组成的，但是显现的程度不同。第一部分是形式命题，第二部分是算术命题。以素数定理的命题为例，形式命题是：小于变量 x 的素数个数的极限形式为 $x/\ln x$ 。算术命题是：狄利克雷级数在 $\operatorname{Re}(s) \geq 1$ 时没有复(非平凡)零点。众所周知的是，对两种命题相互转化的解释是阿达玛证明素数定理的关键。

人们已经给出了 RH 的不少于 2000 种等价的形式命题(黎曼提出的假定也不是现在这种形式)，也证明了弱于 RH 的许多算术命题(其中包括所有非平凡零点都不在 $\operatorname{Re}(s) = 1$ 上的素数定理)，但是，至今人们似乎看不到严格证明 RH 的任何希望。因此，首先分解 RH 的命题为算术命题和形式命题两部分，再研究两种命题某种形式下的相互转化，是逆向数学证明 RH 的不二选择。

需要指出，应用这种证明方法需要解决的关键问题是怎样处理无穷量 ∞ 的问题。实际上，欧拉在《无穷分析引论》中已经给出了利用共轭性质处理无穷的方法，只是至今人们没能把这种方法推广到令人满意的程度。甚至人们在高斯的手稿中发现，在黎曼提出猜想之后不久，Gauss 就计算出了一些非平凡共轭零点的值，远远早于业余数学家 Glam 在 1903 年公布的时间。这些事实说明了 Euler 和 Gauss 比黎曼更早注意到了素数与无穷量 ∞ 的关系。

我们知道，所有非平凡零点都在 $\operatorname{Re}(s) = 1/2$ 上的 RH 是欧拉函数 $\sum_p n^{-s} = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}$ 在分析领域的解析延拓，黎曼进一步把相邻素数的分布规律刻画为定积分公式： $\pi(x) - Li(x) = O\left(x^{\frac{1}{2}}\right)$ ，它使得许多分析学家认为微积分是“无所不能”的分析工具。因此，通常人们都是用积分形式来表示黎曼猜想的进展。随着解析研究的深入，越来越多的人才逐渐认识到：分析学产生和发展基本都限制在笛卡尔坐标系的范畴内，仅用柯西创立的微积分工具证明黎曼猜想几乎是不可能的。

众所周知，Euler 关于圆周率的实分析理论和高斯二次互反性(率)及其拓展¹，目前仍然占据着数论研究的巅峰。因此，目前亟待建立一种简洁的理论，将 Euler 和 Gauss 的思想统一起来，用来阐述清楚 RH；而不是继续寻求在现有分析理论框架下证明 RH。不走出证明黎曼猜想的这些误区，在知识爆炸的今天，很难在有限的人生中完成其证明。

需要指出的是，黎曼先后发表的三篇论文《论不大于一个给定值的素数个数》、《关于非欧几里德几何的解释》、《单复变函数一般理论基础》和未发表的对可积函数充要条件的研究手稿，均来源于对于同一类问题的思考。它表现在在几何上是：平面上(两条)平行线相交在无穷远处的一个点。表现在代数上是：无穷大符号 ∞ 如何参与分析中的代数运算。这些内容都是对欧拉的《无穷小分析引论》和高斯的《算术探索》两本名著的总结与推广。具体来说就是，黎曼把关于弧度的自然函数 $li(x)$ 压缩为主值函数 $Li(x)$ ，又将素数个数 $\pi(x)$ 表示为阶梯函数 Π 的显示公式(爱德华兹又记阶梯函数 Π 为 J 函数，其它记号也略有不同)

$$\pi(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu(m)}{m} \Pi\left(\frac{x}{m}\right)$$

¹拉马努金等人拓展 Euler 圆周率公式为倒数形式，G.Pólya 和 T.Popoviciu 将二次互反性拓展到由全体 Laurent 级数所构成的复向量空间，P.A.MacMahon 和 D.E.Knuth 将二次互反性拓展到分拆领域，等等。

$$\Pi(x) = Li(x) - \sum_{\rho} Li(x^{\rho}) + \int_x^{\infty} \frac{du}{u(u^2-1)\log u} - \log 2 \quad (x > 1)$$

$$Li(x) = \int_0^x \frac{du}{\log u} = \lim_{\delta \downarrow 0} \left(\int_0^{1-\delta} \frac{du}{\log u} + \int_{1+\delta}^x \frac{du}{\log u} \right)$$

式中 $\mu(m)$ 为 mobius 函数, ρ 遍历 $\zeta(s)$ 的所有虚零点。

黎曼为了把虚零点简化为直观的表达式, 给出虚零点以更简明的积分形式如下:

$$\xi(t) = \frac{1}{2} - \left(2 + \frac{1}{4}\right) \int_1^{\infty} \Psi(x) x^{-\frac{3}{4}} \cos\left(\frac{t \cdot \log x}{2}\right) dx = 0$$

最后黎曼提出了虚零点的集合(不仅仅是一个数)震荡着全部回到实部 1/2 的漂亮猜想。其中, mobius 函数在解析法研究黎曼零点的过程中起着关键的作用, 搞明白了这一点理解本文证明 RH 的过程就容易多了。

2019 年 3 月, 文献[10]给出了莫莱微分定理, 并提出了一个关于 mobius 函数的开放性问题, 一年多来没有人给出其证明。本文就是针对 mobius 函数的开放性问题, 研究用离散的方法把积分形式转化为多重级数的形式, 由此分别得到积分项 $\int_1^{\infty} f(x) dx$ 的细分关系式, 并将其推广到三重积分(双线性积分), 最终发现了 RH 的三种证明。

RH 绕过了数论中大量未解决的问题, 对 $\xi(t)$ 的性质进行了高度概括; 因此, 只有在相关的未解决问题得到了解决后, RH 才可能被证明。最直接相关的问题有两个: 一个是希尔伯特提出的第 16 个问题——关于极限环数量有限(以及计算方法)的问题, 另一个是二次域 $k(\sqrt{m})$ 中的非零非单位整数表示为素元乘积的唯一性问题。这两个问题都属于对子空间的分类(或者说多维分区), 如果不建立新的数学理论, 想简单的说清楚这两个前置问题都不是容易的。

实际上, 牛顿建立的微积分原理比莱布尼茨创立的微积分具有更广泛的意义[6], 也就是说, 用多重级数研究 RH 比用奇异积分研究 RH 更具一般性, 黎曼为此提出了如何判断函数的可积性问题。哥德尔数可以将级数和积分两种研究方法设定为两种不同(不同数量的运算符号)的形式演算系统(记为 PM), 故首先找出 RH 的 PM 再证明 RH 是一条比较简明的途径。

自从欧几里德证明了素数无穷, 建立了欧几里德算法以后; 伴随着每一次素数基本性质的发现, 数学的理论都会延伸出若干个庞大的理论体系。从类别上说, 这些理论体系大致分为连续的和离散的两类, 从历史进程上说, 这些理论体系的建立大致分为以下四个阶段:

第一阶段. 从欧几里德发现了算术基本定理, 并建立了以五个公设为基础的逻辑体系开始, 以笛卡尔建立了直角坐标系为标志, 数学逐步发展成为了代数和几何两大数学体系。

第二阶段. 从欧拉发现了素数的乘积公式

$$\zeta(s) = \sum_n n^{-s} = \prod_{p:\text{素数}} (1-p^{-s})^{-1}, \quad (n \text{ 为自然数})$$

并建立了分析学开始(等价于用 ε - δ 语言替换第五公设), 以各种极限理论不断的完善微积分学说为标志, 数学也逐步进入连续性质研究的新层次。

第三阶段. 从高斯发现费马素数型的正十七边形的欧几里德画法和素数的互反律公式

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{1}{2}(p-1)\frac{1}{2}(q-1)}, \quad (p, q \text{ 为奇素数})$$

并建立了二次同余理论开始，以阿贝尔和伽洛瓦证明了五次方程不可根式解和字符的各种元数学结构理论(群论，格论等集合理论)的建立为标志，数学离散性质的研究不断进入了新的高度。

第四阶段. 从洛伦兹对相对性原理(包括非欧几何)的研究和哥德尔不完备性理论开始，以怀尔斯用自守理论证明了费马大定理为标志，数学进一步开启了素数连续性质和离散性质相统一的理论研究。有关素数的类域论从连续和离散两个方向对黎曼猜想的研究贯穿了这种统一理论的始终，至今方兴未艾。

由此可以看出，素数性质的新发现在数学的发展进程中起着关键的作用。寻找素数的新性质并由此建立一种包括连续性质和离散性质的数学新理论是一项亟待进行的工作，黎曼猜想的证明也需要以素数性质的新发现为基础。无论是用积分还是用级数研究黎曼猜想，首先需要讲清楚黎曼的变分思想。人们通常用二元的 Stieltjes 积分符号

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y) d_x d_y \phi(x,y)$$

表示黎曼的求和形式

$$S = \sum_{i,j}^{m,n} f(\xi_i, \eta_j) \Delta_{11} \phi(x_i, y_j)$$

式中 x_i, y_j 满足 $x_i \in x, y_j \in y$ 且 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m = b, c = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m = d$ ，同时 ξ_i, η_j 满足 $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i, y_{j-1} \leq \eta_j \leq y_j$ ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$)。

对细分 x, y 的任意的 i, j ，如果当差值 $\Delta_{11} \phi(x_i, y_j)$ 趋近于 0 时，使得和式 S 存在；则称

$\int_a^b \int_c^d f(x,y) d_x d_y \phi(x,y)$ 为无限制积分。如果差值 $\Delta_{11} \phi(x_i, y_j)$ 在满足条件

$$\Delta_{11} \phi(x_i, y_j) = \phi(x_{i-1}, y_{j-1}) - \phi(x_{i-1}, y_j) - \phi(x_i, y_{j-1}) + \phi(x_i, y_j)$$

下，使得和式 S 存在；则称 Stieltjes 积分形式为限制积分。为了区分无限制积分(即：积分变量可以是任意形式的函数)和限制积分(即：积分变量的形式是受限的，例如积分变量为不超过二次的多项式)，人们在无限制积分前加通用符号“*”。限制积分保持形式不变。

如果可积函数 $f(x,y)$ 的满足有界的条件，人们把 $\phi(x,y)$ 在 Vitali 意义上的变化记为 $\phi \subset V$ ；如果可积函数不满足有界的条件，人们则把 $\phi(x,y)$ 在 Frèchet 意义上的变化记为 $\phi \subset F$ 。它们又可以分为两类，一类是 $f(x,y)$ 不可分解为单变量函数的(有限次)乘积，另一类可分解为单变量函数的(有限次)乘积，即 $f(x,y) = (g(x))^s (h(x))^r$ ，后一类的特例是双线性泛函(即 $s = r = 1$)。

黎曼研究了函数

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(nx)}{n^2}$$

的可积性，证明了 $g(x) = \pi^2/8n^2$ ，得到了第二类无限制积分存在的例子。式中 $\varphi(x)$ 等于 x 减去最靠近它的整数，如果存在两个同等靠近的整数则定义为 0。

黎曼进一步认为，可以从研究三角函数表示的函数开始，研究素数的分布规律。但是，把函数表示为三角函数行为的结果，黎曼并没有做到使他满意的程度而公布。人们只能在他未发表的手稿中窥视黎曼的思想。

为了直观，有些分析学家利用三角和方法研究黎曼猜想，他们首先设定相似直角三角形的三边[1]

$$|a_m| \leq 1, |b_n| \leq 1, |c_l| \leq 1$$

式中 a_m, b_n, c_l 为任意三角形的三边长度。

然后设 $x^\epsilon < L < x^{1-\epsilon}, M, N \geq 1$ 和 $LMN = x$, 最后对三角和

$$A(M, N) = \sum_{M < m \leq 2M} a_m \sum_{N < n \leq 2N} b_n \sum_{x-y < lmn \leq x} c_l$$

的主项

$$\sum_{l \leq \lambda} c_l = g(\lambda) + O(L(\log L)^{-A})$$

进行估计, 用来研究相邻素数之差。由此看出, 黎曼假设的精髓是对 n 维流形上可容许的度量关系的研究[13], 即: 需要假定曲线具有与其所在位置无关的度量, 或者说每条曲线均可被其它曲线所度量。具体来说就是, 对于曲率 α , 如果流形上 ds 的表达式取下面的形式

$$\frac{1}{1 + \frac{\alpha}{4} \sum x_i^2} \cdot \sqrt{\sum (dx_i)^2}$$

那么度量关系可以由直角三角形的一个锐角或者等腰三角形的顶角给出, 都可以作为圆弧的单变量函数。

高斯研究了圆周率 π 与素数的关系, 发现并证明了著名的二次互反定理。尽管人们把二次互反定理推广为许多种广义的形式。作者研究了圆周率 π 与素数的关系, 在得到莫来微分三角形定理的基础上, 发现了素数的一些新性质。进一步讨论了黎曼奇异积分的级数表达式问题[7], 用离散方法证明了黎曼猜想。不仅如此, 本文研究的内容也是近代物理学对数学理论研究的现实要求。

我们将以素数性质的新发现为基础, 讨论有限条平行直线(有限的间距)相交于无穷远处的有限个点(即: Helmholtz 和 Clifford 的几何体系, 又称为 Grassmann 代数几何。也可以说是广义的欧几里得第五公设)的问题, 找出圆周上 J 函数的平面表示法。由此建立的数学新理论(包括几何理论和代数理论)可以广泛用于解决黎曼猜想在内的许多问题, 它将带我们进入数学研究的新阶段。

首先, 将拓展第五公设为: 空间有线条平行直线相交于无穷远处的有限个点。在第五公设的拓展下, 寻找新的素数性质, 扩充哥德尔数, 完善元数学理论, 研究莫比乌斯函数的连续性问题, 最终解决 RH 等困难问题。这些内容作为数学发展的第五阶段基本合格。

3. 黎曼猜想的平面构形

3.1. greedy 序列的素数新性质及其 Clifford 链表示

首先阐述一个素数性质的新发现, 其内容如下:

Erdos 和 Turan 定义函数 $r_k(n)$ 为: 使得有 r 个不超过 n 的数的数列 $1 \leq a_1 < a_2 < \dots < a_r \leq n$ 必定包含一个有 k 个项的算术级数的最小的 r 。我们只知道 $r_k(n) = o(n)$, 但是没人能给出它的估计。对此问题的猜想是:

Erdos 猜想: 对任意给定的正整数 t , 存在

$$r_k(n) = o(n(\ln n)^{-t})$$

Odlyzko 和 Stanley 考察了用贪婪算法(greedy slgorithm)构造出了正整数数列 $S_k(m)$: 其中 $a_0 = 1, a_1 = m + 1$, 而后面的每一项 a_{n+1} 是大于 a_n 且使得 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ 不包含有 k 项算术级数的最小的数。为了叙述方便, 我们将原定义的序列前两项 $a_0 = 1, a_1 = m + 1$ 修改为 $a_0 = -m, a_1 = 0$, 使得数列 $S_k(m)$ 的每项的数值均比原来的小 $m + 1$, 也就是把数列 $S_k(m)$ 向负方向平移了 $m + 1$ 个单位, 这种修改使得不包含有

k 项算术级数的性质不变。因此除非特殊需要，仍然用 $S_k(m)$ 表示与序列整体平移无关的这一类数列。例如

$$S_3(1): -1, 0, 2, 3, 8, 9, 11, 12, 26, 27, 29, 30, 35, 36, 38, 39, 80, 81, 83, 84, 89, 90, 92, 93, 107, \dots$$

$$S_3(4): -4, 0, 1, 3, 7, 8, 12, 19, 22, 27, 29, 33, 34, 40, 45, 52, 69, 74, 76, 81, 91, 95, 102, 120, \dots$$

$$S_4(1): -1, 0, 1, 3, 4, 6, 7, 8, 13, 14, 15, 17, 24, 25, 27, 28, 29, 32, 35, 47, 48, 49, 51, 52, 54, \dots$$

如果 m 是 3 的幂，或者是 3 的幂的两倍，序列 $S_3(m)$ 的元素刻画起来比较容易，例如 $S_3(1)$ 的通项表示为 $a_0 = -1, a_1 = 0, a_{3^k} = 3^k - 1$ ，在这里 k 表示使项数为整数非负实数。对于任意整数 m ， $S_3(m)$ 的增长率似乎是相同的，但是没人给出证明。Stanley 引入了“对数密度”的概念，称 $S_3(m)$ 项数的增长率为“对数密度”。作者不愿意沿袭旧的术语，原因是采用对数密度的术语，不过是出于习惯而非恰当。作者把“对数密度”应用到圆周上，给出“轴角密度”的新术语。采用新术语不仅仅是词语的选择问题，其揭示的哥德尔数的意义也为后面的许多定理所应用，尽管它与“对数密度”没有本质的区别。顺便指出，轴角密度的定义属于有限置换群的对称性质，而不涉及有限 P 群等离散数学的更多概念。下面就我们就引入轴角密度的概念。

从正 3^r 边形上的任意一个点开始，同方向(例如顺时针)顺序标记自然数 $1, 2, 3, \dots$ ，在反方向标记两个初值 $-m$ 和 0 ，并用同余数表示。当 $r=1$ 时，根据模 3 的同余数把 $S_3(m)$ 的数列分为了三种同余数列。文献[14]已经证实，如果 m 是 3 的幂，或者是 3 的幂的两倍，那么其中一种同余数列不包含 $S_3(m)$ 的任意元素，是空集；其它两种同余数列与 $S_3(1)$ 数列的整数倍仅相差一个确定的整数，称这种性质为线性分类(参见定理 3.8)。例如：

$$S_3(2): -2, 0, 1, 4, 7, 9, 10, 12, 25, 27, 28, 30, 34, 36, 37, 39, 79, 81, 82, 84, 88, 90, 91, 93, 106, \dots$$

模 3 余 2 的同余数列为空集，模 3 余 1 和模 3 余 0 的同余数列分别为上述数列的偶数项和奇数项。例如： $S_3(2)$ 的偶数项同余数列

$$-2, 1, 7, 10, 25, 28, 34, 37, 79, 82, 84, 88, 90, 91, 93, 106, \dots$$

是由 $S_3(1)$ 的每项乘 3 加 1 得到的。即

$$-2 = -1 \times 3 + 1, 1 = 0 \times 3 + 1, 7 = 2 \times 3 + 1, 10 = 3 \times 3 + 1, 25 = 8 \times 3 + 1, \dots$$

由此，Stanley 提出了如下的分类法则，他把序列 $S_3(m)$ 分为两类：第一类的 greedy 序列存在规律的结构形式并满足条件

$$\frac{1}{2} \alpha n^{\log_2 3} \leq a_n \leq \alpha n^{\log_2 3}$$

第二类的 greedy 序列满足

$$a_n = O\left(\frac{n^2}{\log n}\right)$$

Stanley 用指数项描述上述非空分类数，并称 $\log_2 3$ 为第一类的 greedy 序列“对数密度”。显然，存在空集的 $S_3(m)$ 为第一类，不存在空集的 $S_3(m)$ 为第二类。

在正 3^r 边形上表示线性分类，可以把 r 设为充分大，把等差数列的任意差值转换为正 3^r 边形的圆周角(3 为轴， r 为角；简称轴角)。也就是说，Stanley 序列 $S_3(m)$ 的任何分类(包含自身)都不包含有 k 个连续相等的圆周角。这些圆周角既可以对应正 3^r 边形的一个边，也可以对应正 3^r 边形的几个边，或者这些

圆周角再添加上 $2k\pi$ 。因此把一条轴线弯曲成一个圆周，用“轴角密度”替换“对数密度”之后，两者没有区别，仅仅是把等差数列的公差值替换成用角度表示的角度差值。但是，引入正 3^r 边形的新变量 r 又是重要的，因为它能帮助我们研究两种分类的中间状态—分数表示的空集。其中如何构造出所有第一类的 greedy 序列是需要解决的关键问题之一。作者发现和证明了正 3^r 边形上的轴角密度可以推广为正 p^r 边形上的轴角密度，式中 p 为素数。得到了：

定理 3.1(素数的新性质之一)：当 m 为大于 3 的素数且 k 为正整数时， $S_m(m^k)$ 为第一类的 greedy 序列；当 m 为大于 3 的合数且 k 为正整数时， $S_m(m^k)$ 为第二类的 greedy 序列。

第一类 greedy 序列 $S_p(0)$ 的表达式是简单的。方法是：首先把数列 $S_p(0)$ 的任意项 $a_{i_{p-1},k} = p^k$ 的下标用进位数 $(p-1)$ 表示出来，即：

$$(\dots b_k \dots b_2 b_1 b_0)_{p-1} = b_0 + b_1(p-1) + b_2(p-1)^2 + \dots + b_k(p-1)^k + \dots$$

式中 $0 \leq b_i \leq p-2$ ，为整数。

然后计算下标为 $(\dots b_i \dots b_2 b_1 b_0)_{p-1}$ 项数的 a_i 值。即：

$$(\dots b_k \dots b_2 b_1 b_0)_p \rightarrow b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_k p^k + \dots$$

例如：当 $p=5$ 时，可以简单给出数列 $S_p(0)$ 的前面几项的十进制数是：

0,1,2,3,5,6,7,8,10,11,12,13,15,16,17,18, 25,26,27,28,30,31,32,33,35,36,37,38,40,41,42,43,
45,46,47,48,50,51,52,53,55,56,57,58,60,61,62,63,65,66,67,68,70,71,72,73,75,76,77,78,80,81,82,83,
105,106,107,108,110,111,112,113,115,116,117,118,120,121,122,123,125,126,...

由轴角密度的定义我们发现，序列 $S_{(p-1)}(p^k)$ 与 $S_{(p-1)}(0)$ 的区别只是 b_k 项的完全剩余类的标注不同而已，或者说，模 p^k 同余为零的那些 a_i 数值均减去了 p^k (见蓝色的数值)，其余 a_i 数值不变。当 $p=5, k=2$ 时，数列 $S_p(p^k)$ 为：

-25,0,1,2,3,5,6,7,8,10,11,12,13,15,16,17,18, 25,26,27,28,30,31,32,33,35,36,37,38,40,41, 42,43,
45,46,47,48, 50,51,52,53,55,56,57,58,60,61,62,63,65,66,67,68,70,71,72,73,76,77,78,80,81,82,83,
100,105,106,107,108,110,111,112,113,115,116,117,118,120,121,122,123,126,...

容易证明，由线性分类得到的这个数列满足贪婪算法，由此我们可以将第一类 greedy 数列的条件改进为²。

$$\frac{1}{2} \alpha n^{\log_{(p-1)} p} \leq a_n \leq \alpha n^{\log_{(p-1)} p}$$

利用轴角密度的定义，我们从第二类 greedy 序列 $S_p(m)$ 中剥离出了一些满足 $a_n = o\left(\frac{n^\epsilon}{\dots}\right)$ 条件的第一类 greedy 数列。也就是说，如果 r 充分大，序列 $S_p(m)$ 的每一分类或者存在分类空集，或者存在项数小于与素数密度成正比的一个无穷小函数 $\epsilon(r)$ 。进一步，可以研究 m 为向量时 greedy 序列 $S_p(m)$ 的分类³。

Euler 发现了分拆公式：

$$\frac{2}{1} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{6}{5} \times \frac{6}{7} \times \frac{9}{8} \times \frac{10}{9} \times \frac{11}{12} \times \dots = 1 \tag{3.1}$$

式中的分式由连续的奇素数构成，方法是，分奇素数成相差为 1 的两个数之和，4 除得尽的偶数做分母，4 除不尽的偶数做分子。

²利用轴角密度的定义，可以比较容易给出的数列 $S_p(p^k)$ 属于第一类 greedy 数列的证明。

³等价于研究项数为素数的归纳法—代数形式的第五公设。

它揭示了第一类 greedy 数列的轴角密度的同余性质。即：

定理 3.2(素数的新性质之二)：如果把 Euler 的素数分拆公式改写为

$$\frac{3+1}{3-1} \times \frac{5-1}{5+1} \times \frac{7-1}{7+1} \times \frac{11+1}{11-1} \times \frac{13-1}{13+1} \times \frac{17+1}{17-1} \times \frac{19+1}{19-1} \times \frac{23-1}{23+1} \times \dots = 1$$

那么，当素数 $p_i \equiv 3^r \pmod{2^4}$ 时，分子取 $p_i + 1$ ，分母取 $p_i - 1$ 。当素数 $p_i \not\equiv 3^r \pmod{2^4}$ ，分子取 $p_i - 1$ ，分母取 $p_i + 1$ ；式中 r 在这里表示自然数。

利用同余性质可以只选取 $r \equiv 0, 1, 2, 3 \pmod{4}$ 四个数。进一步研究无穷乘积函数

$$F(\varepsilon(r)) = \frac{3+\varepsilon(r)}{3-\varepsilon(r)} \times \frac{5-\varepsilon(r)}{5+\varepsilon(r)} \times \frac{7-\varepsilon(r)}{7+\varepsilon(r)} \times \frac{11+\varepsilon(r)}{11-\varepsilon(r)} \times \frac{13-\varepsilon(r)}{13+\varepsilon(r)} \times \frac{17+\varepsilon(r)}{17-\varepsilon(r)} \times \frac{19+\varepsilon(r)}{19-\varepsilon(r)} \times \dots$$

的敛散性质是证明黎曼猜想的关键问题之一，公式中 r 为与 π 相关的实数。

顺便说，无穷乘积的项通常是不可交换的。但是根据交错级数的性质，在与素数相伴的单变量符号 $\pm\varepsilon(r)$ 不发生变化的、且有确定乘积长度的内部，乘积的项是可以随意组合的。利用这个性质，可以对整数分拆进行插值，用单变量 $\varepsilon(r)$ 替换 1 就属于这种(插值后)连续的分拆函数。当然，我们也可以把证明黎曼猜想的离散方法完全转化为(分拆函数的)微积分的证明方法，证明过程采用微积分虽然显得很深奥，其结果也只是画蛇添足而已。因为分拆函数的微积分表达式需要引入(分析学的)大量的定义和概念，远不如直接用分拆函数的限制条件表示微积分来的简单。

Clifford 定理是说，若平面上任意三线不共点的 4 条直线两两相交，由此形成 4 个三角形；那么，分别过这 4 个三角形顶点的 4 个圆共点(简称 4 级点)，记为 P4；若平面上任意三线不共点的 5 条直线两两相交，由此形成 5 个 P4 点，那么这 5 个 P4 点共圆(简称 5 级圆)，记为 Q5；进一步的，若平面上任意三线不共点的 6 条直线两两相交，由此形成的 6 个 Q5 圆共点；7 个 P6 点共圆；等等。这种点或圆可能不止一个，因此符号 P_n, Q_n 表示的是某一级(n 级)的点或圆。

上述过程又称为 Clifford 链定理，即：对任意正整数 $n > 1$ ，平面内任意三条都不共点且两两相交的 $2n$ 条直线产生的所有 $2n-1$ 级 Clifford 圆共点，称为这些直线的 $2n$ 级 Clifford 点；平面内任意三条都不共点且两两相交的 $2n+1$ 条直线产生的所有 $2n$ 级 Clifford 点共圆，称为这些直线的 $2n+1$ 级 Clifford 圆。

作者进一步研究了包含 $n=1$ 的 Clifford 链定理。在这种情形下，Clifford 链定理的条件“平面内任意三条都不共点且两两相交的 N 条直线”相应的修改为：“三维空间中任意三条都不共点的有限条直线且在平行平面内相交于有限个点(包括 ∞ 表示的点)”。它属于第五公设的一种拓展，作者由此开辟一条证明黎曼猜想的新途径。

当 $n=2$ 时，可以用 $k=0, 1, 2, 3$ 四个数分别表示平面上的四条轴线，如果再添加一条轴线，那么使得五个这种点确定了一个五点共圆，添加的第五条轴线的方向可以用圆周的顺时针或逆时针表示。如图 1 和图 2 所示；作者的研究表明，Euler 的素数分拆公式(公式 3.1)可以用 Clifford 定理进行解释和推广。

当轴线较多时，继续利用平面几何理论研究 Clifford 链定理的更多性质变得越来越困难，因此人们逐步把 Clifford 链定理的研究方向拓展到用代数形式表示几何量的各种数学分支之中，特别是上世纪七十年代，文献[16]和[17]把 Clifford 链定理与维数的递减和欧几里得度量空间的上界联系在了一起，由此演化出许多新理论。令人意外的是，作者在简化黎曼猜想的证明过程中，又发现了有关 Clifford 链的一些新几何性质，发现了对已知几何性质的代数新解释，由此也极大的简化了黎曼猜想的证明过程。为了叙述方便，我们沿用哥德尔数的记法和表示法原理，进一步阐述 Clifford 链的新性质。

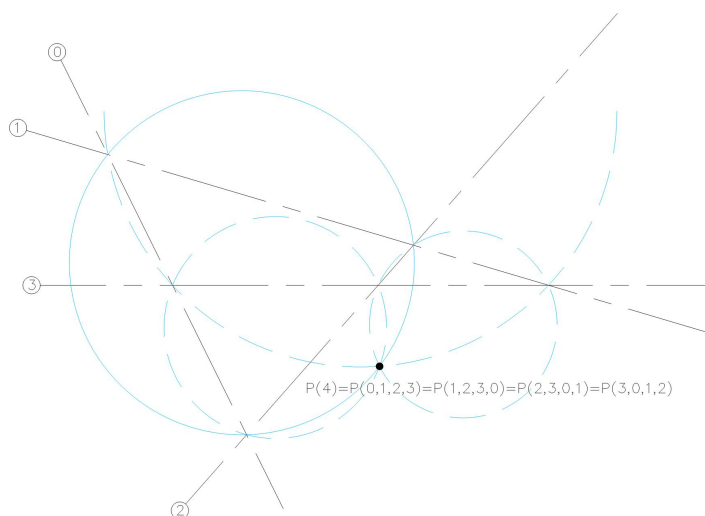


Figure 1. Four circles in common and their numbers
图 1. 四圆共点及其编号

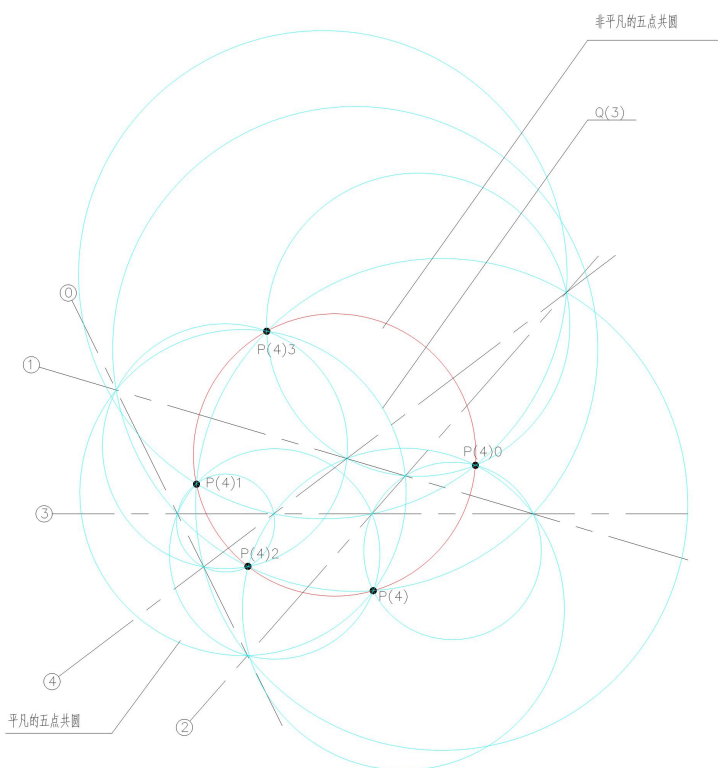


Figure 2. Five point common circle and its number
图 2. 五点共圆及其编号

为了研究 $n \geq 1$ (包括了 $n = 1$) 的 Clifford 链定理, 称过任意 3 轴线所成三角形顶点的圆为三角圆, 称仅有两个三角圆(包括仅有两轴线相交的点)相交的交点为三角点。三角圆和三角点统称为平凡的圆点(平凡圆或平凡点的简称); 否则称为非平凡的圆点。显然, Clifford 点或 Clifford 圆均为非平凡的圆点。

为了研究平凡的圆点与非平凡的圆点之间的联系, 需要把 Clifford 圆点划分为两类。轴线不过

Clifford 点而形成的新 Clifford 圆点称为**第一类圆点**，轴线过(一个或两个)Clifford 点而形成的新 Clifford 圆点称为**第二类圆点**。

第二类圆点是 Clifford 圆点的特殊情形，可以用来研究两个变量的曲面参数方程。高斯证明了三维坐标 x, y, z 可以表为两个变量 p, q 的一阶和二阶偏导数，并推导出“曲率测度在曲面上等距不变”的重要结论。黎曼吸收和发展了高斯的曲率学说，建立了非欧黎曼几何理论、高维流形的一般理论和复平面上的解析理论；RH 就是这些理论指引下的直观发现。

为了说清楚包括了 $n=1$ 的 Clifford 链拓展定理，首先需要说清楚平凡的圆点与非平凡的圆点之间的联系。在图 1 中，我们用 $Q(0,1,2)$ 表示过轴线号 0,1,2 的交点所成的三角圆，三角圆简记为 $Q(3)3$ 或 $Q(3)$ ，圆心记为 O_3 ；用 $P(0,1,2,3)$ 表示添加第 4 条轴线(轴线号 3)所成四个三角圆 $Q(0,1,2), Q(0,1,3), Q(0,2,3), Q(1,2,3)$ 的共点。由于四圆共点，因此有 $P(0,1,2,3) = P(1,2,3,0) = P(2,3,0,1) = P(3,0,1,2)$ ，简记为 $P(4)4$ 或 $P(4)$ 。添加第 5 条轴线(轴线号 4)后，可以分为 5 组 4 轴线。在图 2 中，用 $P(4)0$ 表示用 0 号轴线替换 4 号轴线后的四圆共点，用 $P(4)1$ 表示用 1 号轴线替换 4 号轴线后的四圆共点，等等。由此形成的 5 组四圆共点又在同一个圆周上，简记此圆周为 $Q(5)5$ 或 $Q(5)$ ，其余类推。这种编号方式可以通过逐步添加轴线的办法表示出更多不在轴线上的 Clifford 圆点。称由某种轴线顺序确定的点为**主共点**，由某种轴线顺序确定的圆为**主共圆**。

主共圆点(主共圆或主共点的简称)是由逐步添加轴线得到的，与具体轴线的编号相关。因此可以按照轴线编号的偶置换或奇置换分 Clifford 圆点(主共圆或主共点)为**两种**。人们通常说这两种圆点的奇偶置换为**同调**，类似于左手系和右手系的关系。这个问题过于复杂，需要时我们用 $\pm Q(n)m$ 和 $\pm P(n)m$ 加以区分。主共圆点与 Clifford 圆点的两种分类无关，与“高斯曲率不随曲面的弯曲而变”相当，刻画了高维流形的内在秉性。

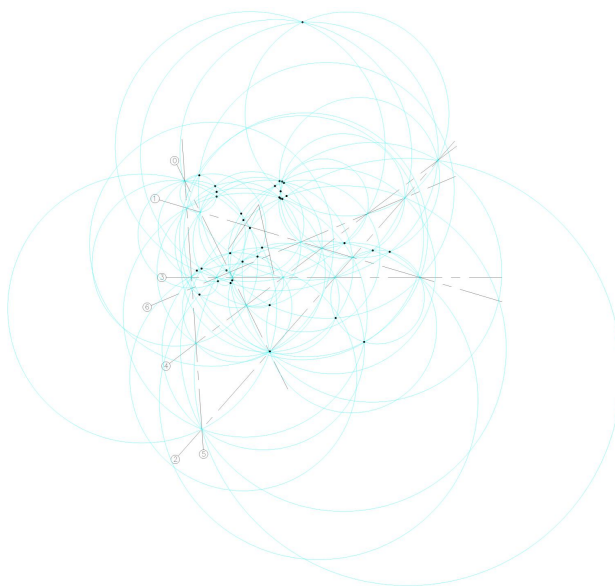


Figure 3. Trigonometric circles of seven axes and their ordinary intersections
图 3. 七条轴线的三角圆及其平凡交点

显然，主共圆点是由轴线排列确定的 Clifford 圆点的一个“分枝”，其中最大主共圆点是唯一的。最大主共圆点的唯一性与代数基本定理相当，非常重要⁴；但是，由于最大主共圆点的唯一性不像代数基

⁴主共圆点的唯一性是代数基本定理的对偶定理。参见本文定理 4.1。

本定理那样被广泛应用[18], 因此没有引起人们足够的重视。

为了说清楚上面的这些新概念, 我们标记出有 7 条轴线(参见图 3 和图 4)的圆点和九条轴线的圆点(参见图 5)及其相关名词。

有了上述这些定义, 包括了 $n=1$ 的 Clifford 点和 Clifford 圆的所有信息都可以表示在了实平面上。尽管随轴线数的增加, 平面图变得越来越复杂; 但是在这个实平面上可以将积分函数 $\int_n^\infty J(x)x^{-s-1}dx$ 转化为平面分层的级数形式, 用来研究实的整函数只有实零点的几个充要条件, 并将这些条件应用于 RH, 直观的说明用歌德尔数表示的 RH 的证明过程。

由于函数 $\int_n^\infty J(x)x^{-s-1}dx$ 的可积性依赖于 s 的有限个余项

$$\frac{1}{\log x} - 2 \sum_{\alpha} \frac{\cos(\alpha \log x)x^{-1/2}}{\log x}$$

的求和, 因此第二类 Clifford 圆点具有“周期”性(这一点也是需要详细证明的⁵)。第二类 Clifford 圆点揭示的是平凡圆点与非平凡圆点之间的联系, 我们的研究对象均限定为第二类 Clifford 圆点。

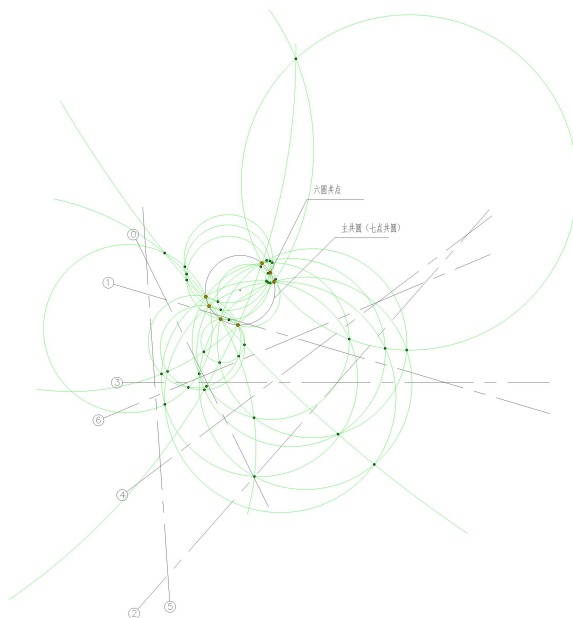


Figure 4. Nontrivial clifford points of seven axes
图 4. 七条轴线的非平凡 Clifford 圆点

我们可以用组合数 $\binom{2n}{1}$ 或 $\binom{2n+1}{1}$ 表示奇数或偶数的轴线数量, 并用 $\binom{m}{2}$ 或 $\binom{m}{3}$ 表示 m 条轴线的三角点和三角圆的数量。通过繁琐的作图, 容易发现(给出包括 ∞ 点的严格证明并不容易):

定理 3.3(Clifford 链的计数定理): 如图 4 所示, $2n$ 条轴线的 4 级 Clifford 点的数量为 $\binom{2n}{2n-4} = \binom{2n}{4}$ 。

$2n+1$ 条轴线的 5 级 Clifford 圆的数量为 $\binom{2n+1}{2n-5} = \binom{2n+1}{5}$ 。

⁵ 高斯在[算术探索]一书中对周期性质进行了类似的说明; 但是既不直观, 也不严密。实际上, 作者在严密证明周期性的过程中, 发现证明了许多重要的定理。

更易一般的, 当轴线数量不分奇偶时, 由 $\binom{n}{1}$ 条轴线上的任意三角圆的交点总数为 $\binom{n}{2}$ 个, 不在 $\binom{n}{1}$ 条轴线上的所有三角圆所成的 4 级 Clifford 点的总数为 $\binom{n}{4}$ 个。类似的, 不过 $\binom{n}{1}$ 条轴线交点的所有 5 级 Clifford 圆的总数为 $\binom{n}{5}$ 个。

综上所述, 添加轴线的方向确定共圆的半径, 添加轴线的平移确定共圆上的弧角。对于整数轴线, Clifford 点或 Clifford 圆的性质给出了组合恒等式 $\binom{m}{r} = \binom{m}{m-r}$ 成立的事实; 然而, 三角圆的推论 3.1 涉及到有理数幂和负整数幂的二项式定理。因此, 在 Clifford 链上解释组合恒等式 $\binom{m}{r} = \binom{m}{m-r}$ 恒成立 (m, r 在这里为有理数) 的情形并不是简单的, 作者已经对此作了前期研究。相关的问题是:

A. $2n$ 条轴线的 $2m$ 级非平凡 Clifford 点的数量怎样计算? $2n+1$ 条轴线的 $2m+1$ 级非平凡 Clifford 圆的数量怎样计算?

B. 如果 A 存在计算公式, 计算公式中的数组变量 (m, n) 如何拓展为有理数组或者拓展为高斯整数?

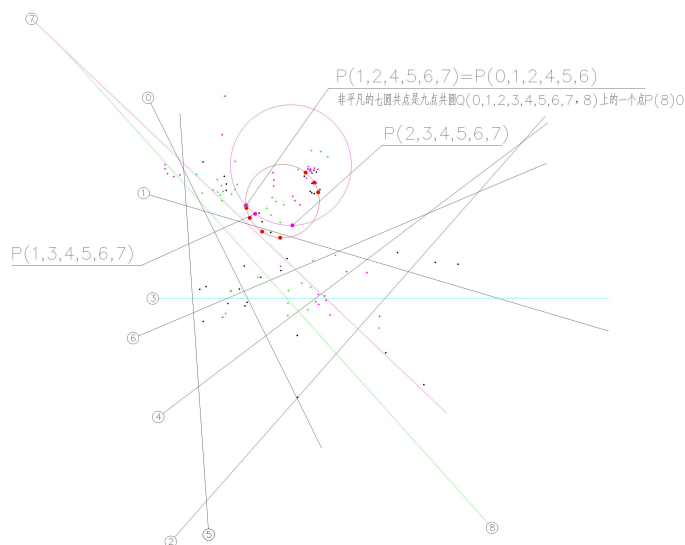


Figure 5. Ordinary intersection of nine axes and their eight circles in common
图 5. 九条轴线的平凡交点及其八圆共点

对于问题 A, 为了用线性(包括指数线性)的方法在两个组合数 $\binom{2n}{4}$ 和 $\binom{2n+1}{5}$ 中间插值, 我们将共点

或共圆表述为: 设 $\binom{\frac{q}{2}}{1}$ 表示轴线的数量为 $\lfloor \frac{q}{2} \rfloor$, 将 $\lfloor \frac{q}{2} \rfloor$ 条轴线形成的 $\lfloor \frac{q}{2} \rfloor$ 级三角圆点的数量统一表示

为 $\binom{\frac{q}{2}}{1,2}$, 将 $\lfloor \frac{q}{2} \rfloor$ 条轴线形成的 $\lfloor \frac{q}{2} \rfloor$ 级 Clifford 圆点的数量统一表示为一个变量 $\binom{\frac{q}{2}}{4,5}$ 。以后在定理 3.5

中我们将看到, 这种表示法是非常恰当的。

对于问题 B, 如果用 p^γ 表示 γ 级 Clifford 圆, 用 g^π 表示 π 级 Clifford 点, 需要研究如何拓展整数组 (γ, π) 的问题。当 (γ, π) 拓展为有理数组时, Clifford 链与超 Catalan 数为偶数的猜想相关; 当 (γ, π) 拓展为高斯整数组时, Clifford 链与函数 $\zeta(s)$ 的平凡零点和非平凡零点的对应性质相关。由于拓展过程极为复杂, 因此将在后面继续讨论这部分内容。

参考文献

- [1] Choi K K S, Borwein P, Rooney B , et al. The Riemann Hypothesis - A Resource for Afficionado and Virtuoso Alike [M]. 2007.
- [2] Brian C J , Farmer D W , Imamoglu Özlem. The Nontrivial Zeros of Period Polynomials of Modular Forms Lie on the Unit Circle[J]. International Mathematics Research Notices(20):20.
- [3] Csordas G , Norfolk T S , Varga R S . The Riemann Hypothesis and the Turan Inequalities[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1986, 296(2).
- [4] 郭铭浩, 郭志成. 勾股定理离散性质的推广和应用—Pythagorean 方程和特殊的 M 角数[J]. 理论数学, 2017, 7(4): 255-261. <https://doi.org/10.12677/PM.2017.74033>
- [5] 郭铭浩, 郭志成. M 角数恒等式及其应用 — 从 M 角数谈起 [J]. 理论数学, 2017, 7(4): 250-254. <https://doi.org/10.12677/PM.2017.74032>
- [6] 郭铭浩, 郭志成. 超 Bell 多项式的一般性质——2-循环级数的 Bell 多项式[J]. 汉斯预印本, 2017, 2(1): 1-10. <https://doi.org/10.12677/HANSPrePrints.2017.21018>
- [7] 郭铭浩, 郭志成. 高维线性分拆理论及其应用——Ramsey 数 $R(5,5;2)=47$ 的注记[J]. 汉斯预印本, 2017, 2(1): 1-42. <https://doi.org/10.12677/HANSPrePrints.2017.21034><https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1021-4>
- [8] 郭志成, 杨军. 基于双限制高斯多项式的二元组合恒等式 [J]. 汉斯预印本, 2018, 3(1): 1-4. <https://doi.org/10.12677/HANSPrePrints.2018.31015>
- [9] 郭志成, 杨军. 基于三维递推算法的牛顿二项式定理研究 [J]. 汉斯预印本, 2019, 4(1): 1-6. <https://doi.org/10.12677/HANSPrePrints.2019.41008>
- [10] 杨军, 郭志成. 证明 D-Finite 类数学猜想的新方法 [J]. 理论数学, 2019, 9(3): 344-350. <https://doi.org/10.12677/PM.2019.93046>
- [11] Yehuda R B , Fogel S . Partitioning a sequence into few monotone subsequences[J]. Acta Informatica, 1998, 35(5):421-440.
- [12] Raymond M. Smullyan. Recursion theory for metamathematics[J]. 2013.
- [13] Weber H, Dedekind R. (eds.). Bernhard Riemann's Gesammelte mathematische Werke und Wissenschaftlicher Nachlass[J]. 2013.
- [14] Stanley, Richard P, Stembridge, John R. On immanants of Jacobi-Trudi matrices and permutations with restricted position[J]. Journal of Combinatorial Theory, Series A, 1993, 62(2):261-279.
- [15] Ramsey J L G T . Sets of Integers With No Long Arithmetic Progressions Generated by the Greedy Algorithm[J]. Mathematics of Computation, 1979, 33(148):1353-1359.
- [16] Roweis S T , Saul L K . Nonlinear Dimensionality Reduction by Locally Linear Embedding[J]. ence, 290.
- [17] Zhao, Y, Teng, 等. Combinatorial and spectral aspects of nearest neighbor graphs in doubling dimensional and nearly-Euclidean spaces[J]. Theoretical Computer Science Amsterdam, 2009.
- [18] Baylis W E . Clifford (Geometric) Algebras: With Applications to Physics, Mathematics, and Engineering[M]. Birkhüser, 1996.