Menelaus' Theorem, Ceva's Theorem and Isometry Conjugate Points in Spherical Triangle

—Spreadof Gergonne Point and Nagel Point from Plane Triangle to Spherical Triangle

Xingyuan Li

BOC credit Card (International) L.T.D, HongKong, China
Email: 742096830@qq.com

Received: Jul.19th, 2020, published:Jul.22th, 2020

Abstract

In this paper, the concept of isometry conjugate points in spherical triangles is given by using Menelaus' theorem and Ceva's theorem, the Gergonne point and the Nagel point in plane triangle are spreaded to spherical triangle in the end.

Keywords

Gergonne Point, Nagel Point, Isometry Conjugate Points, Spherical Triangle

球面三角形的梅涅劳斯定理、塞瓦定理与等距共轭点

——平面三角形的切心(热尔岗点)和界心(奈格尔点)在球面三角形上的推广

李兴源

中银信用卡(国际)有限公司，香港，中国
Email: 742096830@qq.com

收稿日期：2020年7月19日；发布日期：2020年7月22日

摘　要

本文利用球面三角形的梅涅劳斯定理与塞瓦定理给出球面三角形的等距共轭点之概念，最后把平面三角形的切心(热尔岗点)和界心(奈格尔点)推广至球面三角形上。

关键词

切心(热尔岗点)，界心(奈格尔点)，等距共轭点，球面三角形

1. 引言

如图 1 所示，在任意三角形 ABC 中，D、D' 在 BC 上，E、E' 在 AC 上，F、F' 在 AB 上。$BD = CD'$，$AE = CE'$，$AF = BF'$。若 AD、BE、CF 在三角形 ABC 内相交于点 G，则 AD'、BE'、CF' 在三角形 ABC 内也必相交于一点。

设 AD'、BE'、CF' 的交点为 H，将点 G 与点 H 称作三角形 ABC 内的一对等距共轭点。

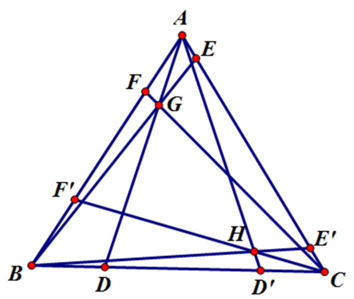

Figure 1. Isometry conjugate points in plane triangle
图 1. 平面三角形的等距共轭点

2. 球面三角形的梅涅劳斯(Menelaus)定理、塞瓦(Ceva)定理与等距共轭点

2.1. 球面三角形的梅涅劳斯(Menelaus)定理

O 为球面三角形 ABC 的球心。D、E、F 三点分别在 $\overset{\frown}{BC}$、$\overset{\frown}{AC}$、$\overset{\frown}{AB}$ 所在的三个大圆圆周上，则 D、E、F 三点都在球面 O 的同一个大圆上的充要条件为

$$\frac{\sin\angle AOF}{\sin\angle BOF}\cdot\frac{\sin\angle BOD}{\sin\angle COD}\cdot\frac{\sin\angle COE}{\sin\angle AOE}=1\text{。}$$

证明：

如图 2 所示，不妨设 D、F 两点分别在 BC、AB 所对的大圆劣弧上，点 E 在 AC 所对的大圆优弧上，且 $\angle AOE = \angle AOC + \angle COE$。

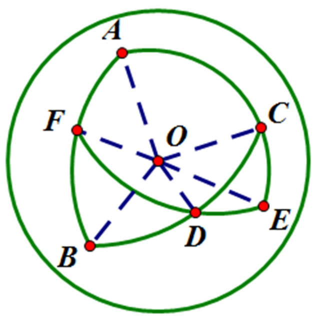

Figure 2. Menelaus' theorem of spherical triangle
图 2. 球面三角形的梅涅劳斯定理

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51022. | CC-BY 4.0 Open Access | rec:19July 2020, publ: 22 July 2020

1) 先证必要性

根据三面角的正弦定理，有：[1]

$$\frac{\sin\angle AOF}{\sin\angle AOE}=\frac{\sin\angle A-OE-F}{\sin\angle A-OF-E},$$

$$\frac{\sin\angle BOD}{\sin\angle BOF}=\frac{\sin\angle B-OF-D}{\sin\angle B-OD-F},$$

$$\frac{\sin\angle COE}{\sin\angle COD}=\frac{\sin\angle C-OD-E}{\sin\angle C-OE-D};$$

又

$$\angle A-OE-F=\angle C-OE-D,$$

$$\angle B-OD-F=\angle C-OD-E,$$

$$\angle B-OF-D+\angle A-OF-E=\pi;$$

所以

$$\frac{\sin\angle AOF}{\sin\angle BOF}\cdot\frac{\sin\angle BOD}{\sin\angle COD}\cdot\frac{\sin\angle COE}{\sin\angle AOE}=1。$$

2) 再证充分性

设 D、E 所在的大圆圆周与 AB 所对的大圆劣弧相交于点 F'。由必要性可知

$$\frac{\sin\angle AOF'}{\sin\angle BOF'}\cdot\frac{\sin\angle BOD}{\sin\angle COD}\cdot\frac{\sin\angle COE}{\sin\angle AOE}=1,$$

又有

$$\frac{\sin\angle AOF}{\sin\angle BOF}\cdot\frac{\sin\angle BOD}{\sin\angle COD}\cdot\frac{\sin\angle COE}{\sin\angle AOE}=1,$$

因此

$$\frac{\sin\angle AOF'}{\sin\angle BOF'}=\frac{\sin\angle AOF}{\sin\angle BOF}。$$

令 $\angle AOF$、$\angle FOB$、$\angle AOF'$、$\angle F'OB$、$\angle FOF'$ 均为有向角，设 $\angle AOF=\alpha$，$\angle FOB=\beta$，$\angle FOF'=x$。有

$$\frac{\sin\angle AOF}{\sin\angle FOB}=\frac{\sin\angle AOF'}{\sin\angle F'OB}=\frac{\sin\left(\angle AOF+\angle FOF'\right)}{\sin\left(\angle F'OF+\angle FOB\right)}=\frac{\sin\left(\angle AOF+\angle FOF'\right)}{\sin\left(\angle FOB-\angle FOF'\right)},$$

即

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{\sin(\alpha+x)}{\sin(\beta-x)}。$$

解得

$$x=k\pi,\quad k\in Z。$$

若 $\angle FOF'=0$ 即 F' 与 F 两点重合，此时命题充分性显然得证；

若 $\angle FOF'=\pi$ 即 FF' 为球面 O 的直径时，由于 D、E、F' 三点都在球面 O 的同一个大圆上，故 D、E、F 三点也在球面 O 的同一个大圆上，命题充分性同样得证。

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51022. | CC-BY 4.0 Open Access | rec:19July 2020, publ: 22 July 2020

2.2. 球面三角形的塞瓦(Ceva)定理

如图 3 所示，O 为球面三角形 ABC 的球心。D、E、F 三点分别在 BC、AC、AB 所对的三条大圆劣弧上，则 AD、BE、CF 所对的三条大圆劣弧在球面三角形 ABC 内交于一点的充要条件是

$$\frac{\sin\angle AOF}{\sin\angle BOF}\cdot\frac{\sin\angle BOD}{\sin\angle COD}\cdot\frac{\sin\angle COE}{\sin\angle AOE}=1。$$

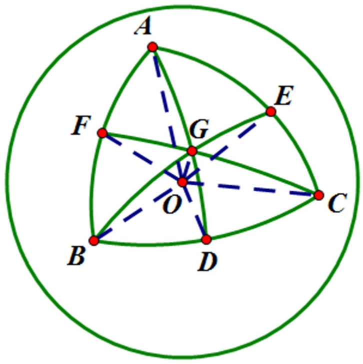

Figure 3. Ceva's theorem of spherical triangle
图 3. 球面三角形的塞瓦定理

证明：

1) 先证必要性

设 AD、BE、CF 所对的三条大圆劣弧在球面三角形 ABC 内交于点 G。

因为 B、G、E 三点都在同一大圆上，且这三点分别在球面三角形 ACD 的三条大圆弧所在的大圆圆周上，由球面三角形的梅涅劳斯定理可得

$$\frac{\sin\angle AOE}{\sin\angle COE}\cdot\frac{\sin\angle BOC}{\sin\angle BOD}\cdot\frac{\sin\angle DOG}{\sin\angle AOG}=1。$$

再有 C、G、F 三点都在同一大圆上，且这三点分别在球面三角形 ABD 的三条大圆弧所在的大圆圆周上，由球面三角形的梅涅劳斯定理可得

$$\frac{\sin\angle AOG}{\sin\angle DOG}\cdot\frac{\sin\angle COD}{\sin\angle BOC}\cdot\frac{\sin\angle BOF}{\sin\angle AOF}=1。$$

将上面两式相乘并整理可得：

$$\frac{\sin\angle AOF}{\sin\angle BOF}\cdot\frac{\sin\angle BOD}{\sin\angle COD}\cdot\frac{\sin\angle COE}{\sin\angle AOE}=1。$$

2) 再证充分性

设 CG 所在的大圆与 AB 所对的大圆劣弧相交于点 F'。由必要性可知

$$\frac{\sin\angle AOF'}{\sin\angle BOF'}=\frac{\sin\angle AOF}{\sin\angle BOF}。$$

设 $\angle AOF=\alpha$，$\angle BOF=\beta$，$\angle FOF'=x$。由于点 F 与点 F' 都在 AB 所对的大圆劣弧上，若点 F 在 AF' 所对的大圆劣弧上，有

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{\sin(\alpha+x)}{\sin(\beta-x)};$$

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51022. | CC-BY 4.0 Open Access | rec:19July 2020, publ: 22 July 2020

同理，若点 F 在 BF' 所对的大圆劣弧上，有

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{\sin(\alpha-x)}{\sin(\beta+x)}。$$

无论是上面两种情况中的任何一种，均可解得

$$x=k\pi，\ k\in Z。$$

若 $\angle FOF'=\pi$ 即 FF' 为球面 O 的直径时，由 $\angle AOB<\pi$ 可知点 F 与点 F' 不可能都在 AB 所对的大圆劣弧上，与题设矛盾。故点 F 与点 F' 必然重合。充分性得证。

2.3. 球面三角形的等距共轭点

如图 4 所示，O 为球面三角形 ABC 的球心。D、D' 在 BC 所对的大圆劣弧上，E、E' 在 AC 所对的大圆劣弧上，F、F' 在 AB 所对的大圆劣弧上。$BD=CD'$，$AE=CE'$，$AF=BF'$。若 AD、BE、CF 所对的三条大圆劣弧在球面三角形 ABC 内相交于点 G，则 AD'、BE'、CF' 所对的三条大圆劣弧在球面三角形 ABC 内也必相交于一点。

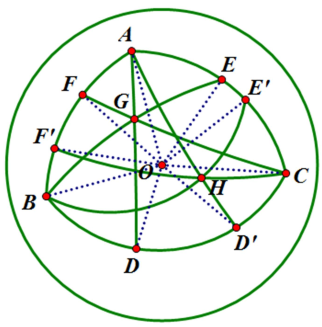

Figure 4. Isometry conjugate points in spherical triangle
图 4. 球面三角形的等距共轭点

证明：

若 AD、BE、CF 所对的三条大圆劣弧在球面三角形 ABC 内相交于点 G，则由球面三角形的塞瓦定理可得

$$\frac{\sin\angle BOD}{\sin\angle COD}\cdot\frac{\sin\angle COE}{\sin\angle AOE}\cdot\frac{\sin\angle AOF}{\sin\angle BOF}=1。$$

因为

$$BD=CD'，\ AE=CE'，\ AF=BF'；$$

所以

$$\angle BOD=\angle COD'，\ \angle AOE=\angle COE'，\ \angle AOF=\angle BOF'；$$
$$\angle BOD'=\angle COD，\ \angle AOE'=\angle COE，\ \angle AOF'=\angle BOF；$$

故

$$\frac{\sin\angle BOD'}{\sin\angle COD'}\cdot\frac{\sin\angle COE'}{\sin\angle AOE'}\cdot\frac{\sin\angle AOF'}{\sin\angle BOF'}=1。$$

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51022. | CC-BY 4.0 Open Access | rec:19July 2020, publ: 22 July 2020

即 AD'、BE'、CF' 所对的三条大圆劣弧在球面三角形 ABC 内也必相交于一点。命题得证。

设 AD'、BE'、CF' 所对的三条大圆劣弧在球面三角形 ABC 内相交于点 H，将点 G 与点 H 称作球面三角形 ABC 内的一对等距共轭点。

3. 球面三角形的切心(Gergonne 点)与界心(Nagel 点)

3.1. 球面三角形的切心(Gergonne 点)

如图 5 所示，AA' 为球面 O 的直径。球面三角形 ABC 的内切圆分别与 BC、AC、AB 所对的三条大圆劣弧相切于 D、E、F 三点；球面三角形 ABC 的顶点 A 所对的旁切圆分别与 BC、$A'B$、$A'C$ 所对的三条大圆劣弧相切于 D'、H、I 三点。则 AD、BE、CF 所对的三条大圆劣弧在球面三角形 ABC 内必交于一点，且三个大圆的所在面 AOD'、BOI、COH 在球面三角形 $A'BC$ 内也必交于一点。

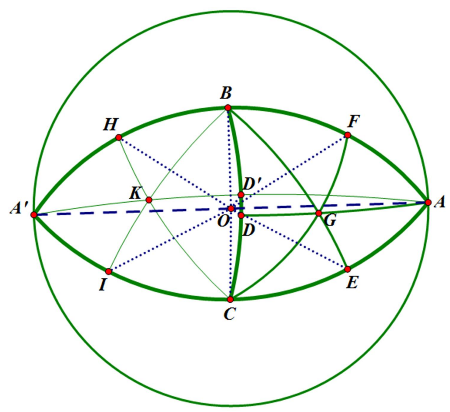

Figure 5. Interior gergonne point and exterior gergonne point in spherical triangle
图 5. 球面三角形的内切心和旁切心

证明：

根据球面三角形内切圆的性质[2]，在球面三角形 ABC 中，有

$$\angle AOE = \angle AOF\text{，}\quad \angle BOD = \angle BOF\text{，}\quad \angle COD = \angle COE\text{。}$$

因此

$$\frac{\sin\angle BOD}{\sin\angle COD}\cdot\frac{\sin\angle COE}{\sin\angle AOE}\cdot\frac{\sin\angle AOF}{\sin\angle BOF}=1\text{，}$$

即 AD、BE、CF 所对的三条大圆劣弧在球面三角形 ABC 内必交于一点。

又球面三角形 ABC 的顶点 A 所对的旁切圆就是球面三角形 $A'BC$ 的内切圆，同理可得

$$\angle A'OH = \angle A'OI\text{，}\quad \angle BOD' = \angle BOH\text{，}\quad \angle COD' = \angle COI\text{。}$$

因此

$$\frac{\sin\angle BOD'}{\sin\angle COD'}\cdot\frac{\sin\angle COI}{\sin\angle A'OI}\cdot\frac{\sin\angle A'OH}{\sin\angle BOH}=1\text{，}$$

即 $A'D'$、BI、CH 所对的三条大圆劣弧在球面三角形 $A'BC$ 内也必交于一点，设交点为 K。由于 AA' 为球面 O 的直径，则 A、D'、K、A' 四点必在同一个大圆的半圆周上，故面 AOD'、面 BOI、面 COH 在球面三角形 $A'BC$ 内必交于点 K。命题已得证。

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51022. | CC-BY 4.0 Open Access | rec:19July 2020, publ: 22 July 2020

设 AD、BE、CF 所对的三条大圆劣弧在球面三角形 ABC 内相交于点 G，将点 G 称作球面三角形 ABC 的内切心，将点 K 称作球面三角形 ABC 的顶点 A 所对的旁切心。

显然，对于任意的球面三角形均存在四个切心(Gergonne 点)，包括一个内切心和三个旁切心。

3.2. 球面三角形的界心(Nagel 点)

如图 6 所示，AA' 为球面 O 的直径。球面三角形 ABC 的内切圆分别与 BC、AC、AB 所对的三条大圆劣弧相切于 D、E、F 三点。球面三角形 ABC 的顶点 A 所对的旁切圆与 BC、$A'B$、$A'C$ 所对的三条大圆劣弧分别相切于 D'、H、I 三点；球面三角形 ABC 的顶点 B、C 所对的旁切圆分别与 AC、AB 所对的两条大圆劣弧相切于 E'、F' 两点。则 AD'、BE'、CF' 所对的三条大圆劣弧在球面三角形 ABC 内也必相交于一点。

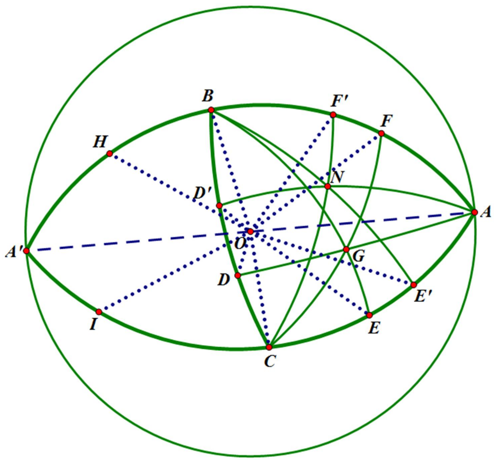

Figure 6. Nagel point in spherical triangle
图 6. 球面三角形的界心

证明：

因为

$$\angle FOH = \pi - \angle A'OH - \angle AOF = \pi - \angle A'OI - \angle AOE = \angle EOI,$$

所以

$$\begin{aligned}&\angle BOD + \angle BOD' = \angle BOF + \angle BOH = \angle FOH \\ &= \angle EOI = \angle COE + \angle COI = \angle COD + \angle COD'\end{aligned}。$$

又

$$\angle BOD + \angle COD = \angle BOD' + \angle COD' = \angle BOC,$$

因此

$$\angle BOD = \angle COD', \quad \angle BOD' = \angle COD。$$

同理

$$\angle BOF = \angle AOF', \quad \angle BOF' = \angle AOF;$$

$$\angle AOE = \angle COE', \quad \angle AOE' = \angle COE。$$

由于 AD、BE、CF 所对的三条大圆劣弧在球面三角形 ABC 内相交于一点，设交点为 G，则 G 为球

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51022. | CC-BY 4.0 Open Access | rec:19July 2020, publ: 22 July 2020

面三角形 ABC 的内切心。因此 AD'、BE'、CF' 所对的三条大圆劣弧在球面三角形 ABC 内也相交于一点，设交点为 N，N 即为 G 的等距共轭点。命题得证。

把 N 称作球面三角形 ABC 的界心(Nagel 点)。可知任意球面三角形的界心与其内切心组成该球面三角形内的一对等距共轭点。

致　谢

敬请各位读者对于本文给予纠错指正。

参考文献

[1] 沈惠祥. 三面角的正弦定理及其应用[J]. 中学数学, 1996, 7: 13-15.
[2] 亢红道. 关于球面几何的一些问题[J]. 大理师专学报(自然科学版), 1996, 1: 20-24.