High Dimensional Extension of Determinant in Multiple Alternating Linear Space

Xingyuan Li

Guangzhou College of South China University of Technology, Guangzhou Guangdong
Email: 742096830@qq.com

Received: Mar.16th, 2020, published: Mar.19th, 2020

Abstract

From another angle different from tensor space, we construct a horizontal, vertical and lateral direction with n elements, on each slice along the horizontal, vertical and lateral directions have n^2 elements respectively, cube matrix functions similar to determinant with n^3 elements. It is called a cubic determinant and its order is n. For convenience of distinguishing, determinants with only two subscripts are called narrow determinant. [1] Generalize all properties of narrow determinant to cubic determinant and higher dimensional hypercube determinant. In the end, the transformation relation between the cubic determinant and the hypercube determinant corresponding to the narrow determinant is given, and make a more deeper expression of the determinant on the general domain.

Keywords

Determinant, Symbolic Vector, Cofactor, Section, Laplace's Theorem

行列式在多重交替线性空间上的高维推广

李兴源

华南理工大学广州学院，广州，中国
Email: 742096830@qq.com

收稿日期：2020年3月16日；发布日期：2020年3月19日

摘　要

从与张量不同的另外角度构造出水平、竖直、侧面三个方向各有n个元素，且沿水平、竖直、侧面三个方向的切片上各有n^2个元素，共n^3个元素的立方体数阵函数，称为立方行列式，其阶数为n。为方便区分，对只有两个下标的行列式称为狭义行列式[1]。把狭义行列式的全部性质推广至立方行列式以及更高

维的超立方行列式。最终给出立方行列式与超立方行列式对应狭义行列式的转化关系和各种变换，并对一般域上的行列式作更深层次的表述。

关键词

行列式，符号向量，余子式，切片，拉普拉斯定理

1. 引言

特别说明：本文规定维数相同的任意两向量$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$与$(y_1,y_2,\cdots,y_n)$相乘全部使用 Hadamard 积[2]运算。即$(x_1,x_2,\cdots,x_n)(y_1,y_2,\cdots,y_n)=(x_1y_1,x_2y_2,\cdots,x_ny_n)$。Hadamard 积满足乘法交换律、结合律、分配律。

定义 1.1 对阶数为的 n 立方行列式 A 记作 $\mathrm{dec}_n(A)$ 或简写成【A】。在 $\mathrm{dec}_n(A)$ 中，把经过元素 a_{111}、a_{211}、$\cdots$、a_{n11} 的直线称为 I 轴；把经过元素 a_{111}、a_{121}、$\cdots$、a_{1n1} 的直线称为 J 轴；把经过元素 a_{111}、a_{112}、$\cdots$、a_{11n} 的直线称为 K 轴。K 轴称为【A】的主轴或主方向，I 轴和 J 轴称为【A】的副轴或副方向。规定 I 轴、J 轴、K 轴两两垂直。

定义 1.2 对 $\mathrm{dec}_n(A)$ 垂直于 I 轴的第 i 个切片矩阵记作 $A_{i::}$，垂直于 J 轴的第 j 个切片矩阵记作，垂直于 K 轴的第个 k 切片矩阵记作 $A_{::k}$。$A_{i::}$、$A_{:j:}$、$A_{::k}$ 这三个切片交点处的元素记作 a_{ijk}，$1\le i,j,k\le n$。

定义 1.3 在 $\mathrm{dec}_n(A)$ 中，把经过元素 a_{111}、a_{222}、$\cdots$、a_{nnn} 的直线称为【A】的主对角线。

2. 立方行列式的拉普拉斯展开

当 $n\ge 2$ 时，对于任意 n 级排列 $i_1,i_2,\cdots,i_n$、$j_1,j_2,\cdots,j_n$、$k_1,k_2,\cdots,k_n$，三个全排列各自对应的逆序数分别为 $N(i_1,i_2,\cdots,i_n)$、$N(j_1,j_2,\cdots,j_n)$、$N(k_1,k_2,\cdots,k_n)$。

假设 $a_{1,j'_1,k_1}a_{2,j'_2,k_2}\cdots a_{n,j'_n,k_n}$ 是由 $a_{i_1,j_1,1}a_{i_2,j_2,2}\cdots a_{i_n,j_n,n}$ 运用乘法交换律经 s 次因子换位得到。即排列 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 经 s 次对换变成排列 $1,2,\cdots,n$，排列 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 经 s 次对换变成排列 $j'_1,j'_2,\cdots,j'_n$，排列 $1,2,\cdots,n$ 经 s 次对换变成排列 $k_1,k_2,\cdots,k_n$。显然：

$$(-1)^{N(i_1,i_2,\cdots,i_n)}=(-1)^{N(k_1,k_2,\cdots,k_n)}=(-1)^s;$$

$$\begin{aligned}(-1)^{N(j_1,j_2,\cdots,j_n)}&=(-1)^{N(j_1,j_2,\cdots,j_n)+N(1,2,\cdots,n)}=(-1)^{N(j_1,j_2,\cdots,j_n)+s+N(1,2,\cdots,n)+s}\\&=(-1)^{N(j'_1,j'_2,\cdots,j'_n)+N(k_1,k_2,\cdots,k_n)}\end{aligned}。$$

同理，令 $a_{i_1,j_1,1}a_{i_2,j_2,2}\cdots a_{i_n,j_n,n}=a_{i'_1,1,k_1}a_{i'_2,2,k_2}\cdots a_{i'_n,n,k_n}$，则有：

$$(-1)^{N(i_1,i_2,\cdots,i_n)}=(-1)^{N(i'_1,i'_2,\cdots,i'_n)+N(k_1,k_2,\cdots,k_n)};$$

$$(-1)^{N(j_1,j_2,\cdots,j_n)}=(-1)^{N(k_1,k_2,\cdots,k_n)}。$$

再令 $a_{i_1,j_1,1}a_{i_2,j_2,2}\cdots a_{i_n,j_n,n}=a_{i'_1,j'_1,k_1}a_{i'_2,j'_2,k_2}\cdots a_{i'_n,j'_n,k_n}$，则有：

$$(-1)^{N(i_1,i_2,\cdots,i_n)}=(-1)^{N(i'_1,i'_2,\cdots,i'_n)+N(k_1,k_2,\cdots,k_n)};$$

$$(-1)^{N(j_1,j_2,\cdots,j_n)}=(-1)^{N(j'_1,j'_2,\cdots,j'_n)+N(k_1,k_2,\cdots,k_n)}。$$

综上所述，可得到以下三式：

$$\begin{aligned}&a_{i_1,j_1,1}a_{i_2,j_2,2}\cdots a_{i_n,j_n,n}\left((-1)^{N(i_1,i_2,\cdots,i_n)},(-1)^{N(j_1,j_2,\cdots,j_n)}\right)\\&=a_{1,j_1',k_1}a_{2,j_2',k_2}\cdots a_{n,j_n',k_n}\left((-1)^{N(k_1,k_2,\cdots,k_n)},(-1)^{N(j_1',j_2',\cdots,j_n')+N(k_1,k_2,\cdots,k_n)}\right);\end{aligned}\tag{2.1}$$

$$\begin{aligned}&a_{i_1,j_1,1}a_{i_2,j_2,2}\cdots a_{i_n,j_n,n}\left((-1)^{N(i_1,i_2,\cdots,i_n)},(-1)^{N(j_1,j_2,\cdots,j_n)}\right)\\&=a_{i_1',1,k_1}a_{i_2',2,k_2}\cdots a_{i_n',n,k_n}\left((-1)^{N(i_1',i_2',\cdots,i_n')+N(k_1,k_2,\cdots,k_n)},(-1)^{N(k_1,k_2,\cdots,k_n)}\right);\end{aligned}\tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}&a_{i_1,j_1,1}a_{i_2,j_2,2}\cdots a_{i_n,j_n,n}\left((-1)^{N(i_1,i_2,\cdots,i_n)},(-1)^{N(j_1,j_2,\cdots,j_n)}\right)\\&=a_{i_1',j_1',k_1}a_{i_2',j_2',k_2}\cdots a_{i_n',j_n',k_n}\left((-1)^{N(i_1',i_2',\cdots,i_n')+N(k_1,k_2,\cdots,k_n)},(-1)^{N(j_1',j_2',\cdots,j_n')+N(k_1,k_2,\cdots,k_n)}\right)。\end{aligned}\tag{2.3}$$

用 $\sum\limits_{i_1,i_2,\cdots,i_n}$ 表示对 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 历遍 $1,2,\cdots,n$ 的所有全排列求和，对(2.1)左边作求和 $\sum\limits_{j_1,j_2,\cdots,j_n}$ ，对(2.1)右边作求和 $\sum\limits_{j_1',j_2',\cdots,j_n'}$ ，则：

$$\begin{aligned}&\sum_{j_1,j_2,\cdots,j_n}a_{i_1,j_1,1}a_{i_2,j_2,2}\cdots a_{i_n,j_n,n}\left((-1)^{N(i_1,i_2,\cdots,i_n)},(-1)^{N(j_1,j_2,\cdots,j_n)}\right)\\&=\sum_{j_1',j_2',\cdots,j_n'}a_{1,j_1',k_1}a_{2,j_2',k_2}\cdots a_{n,j_n',k_n}\left((-1)^{N(k_1,k_2,\cdots,k_n)},(-1)^{N(j_1',j_2',\cdots,j_n')+N(k_1,k_2,\cdots,k_n)}\right)。\end{aligned}\tag{2.4}$$

定义 2.1 用 $\sum\limits_{\binom{i_1,i_2,\cdots,i_n}{j_1,j_2,\cdots,j_n}}$ 表示 $\sum\limits_{i_1,i_2,\cdots,i_n}$ 与 $\sum\limits_{j_1,j_2,\cdots,j_n}$ 的双重求和；用 $\sum\limits_{\binom{i=1}{j=1}}^{n}$ 表示 $\sum\limits_{i=1}^{n}$ 与 $\sum\limits_{j=1}^{n}$ 的双重求和。[3]

根据上面定义，对(2.4)左边作求和 $\sum\limits_{i_1,i_2,\cdots,i_n}$ ，对(2.4)右边作求和 $\sum\limits_{k_1,k_2,\cdots,k_n}$ ，再把(2.4)右边的 $j_1',j_2',\cdots,j_n'$ 分别改为 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ ，则：

$$\begin{aligned}&\sum_{\binom{i_1,i_2,\cdots,i_n}{j_1,j_2,\cdots,j_n}}a_{i_1,j_1,1}a_{i_2,j_2,2}\cdots a_{i_n,j_n,n}\left((-1)^{N(i_1,i_2,\cdots,i_n)},(-1)^{N(j_1,j_2,\cdots,j_n)}\right)\\&=\sum_{\binom{j_1,j_2,\cdots,j_n}{k_1,k_2,\cdots,k_n}}a_{1,j_1,k_1}a_{2,j_2,k_2}\cdots a_{n,j_n,k_n}\left((-1)^{N(k_1,k_2,\cdots,k_n)},(-1)^{N(j_1,j_2,\cdots,j_n)+N(k_1,k_2,\cdots,k_n)}\right)。\end{aligned}$$

对(2.2)和(2.3)使用同样方法，可得出下面定理中的各恒等式，并通过下面定理对立方行列式的展开公式作出定义：

定理 2.1 立方行列式 $\mathrm{dec}_n(A)$ 的展开公式：

$$【A】=\sum_{\binom{i_1,i_2,\cdots,i_n}{j_1,j_2,\cdots,j_n}}a_{i_1,j_1,1}a_{i_2,j_2,2}\cdots a_{i_n,j_n,n}\left((-1)^{N(i_1,i_2,\cdots,i_n)},(-1)^{N(j_1,j_2,\cdots,j_n)}\right);\tag{2.5}$$

$$【A】=\sum_{\binom{j_1,j_2,\cdots,j_n}{k_1,k_2,\cdots,k_n}}a_{1,j_1,k_1}a_{2,j_2,k_2}\cdots a_{n,j_n,k_n}\left((-1)^{N(k_1,k_2,\cdots,k_n)},(-1)^{N(j_1,j_2,\cdots,j_n)+N(k_1,k_2,\cdots,k_n)}\right);\tag{2.6}$$

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51003. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 16 March 2020, publ: 19 March 2020

$$\text{【}A\text{】} = \sum_{\binom{i_1,i_2,\cdots,i_n}{k_1,k_2,\cdots,k_n}} a_{i_1,1,k_1} a_{i_2,2,k_2} \cdots a_{i_n,n,k_n} \left((-1)^{N(i_1,i_2,\cdots,i_n)+N(k_1,k_2,\cdots,k_n)}, (-1)^{N(k_1,k_2,\cdots,k_n)} \right)。 \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned}
\text{【}A\text{】} &= \sum_{\binom{i_1,i_2,\cdots,i_n}{j_1,j_2,\cdots,j_n}} a_{i_1,j_1,k_1} a_{i_2,j_2,k_2} \cdots a_{i_n,j_n,k_n} \left((-1)^{N(i_1,i_2,\cdots,i_n)+N(k_1,k_2,\cdots,k_n)}, (-1)^{N(j_1,j_2,\cdots,j_n)+N(k_1,k_2,\cdots,k_n)} \right) \\
&= \sum_{\binom{i_1,i_2,\cdots,i_n}{k_1,k_2,\cdots,k_n}} a_{i_1,j_1,k_1} a_{i_2,j_2,k_2} \cdots a_{i_n,j_n,k_n} \left((-1)^{N(i_1,i_2,\cdots,i_n)+N(k_1,k_2,\cdots,k_n)}, (-1)^{N(j_1,j_2,\cdots,j_n)+N(k_1,k_2,\cdots,k_n)} \right)。 \\
&= \sum_{\binom{j_1,j_2,\cdots,j_n}{k_1,k_2,\cdots,k_n}} a_{i_1,j_1,k_1} a_{i_2,j_2,k_2} \ldots a_{i_n,j_n,k_n} \left((-1)^{N(i_1,i_2,\cdots,i_n)+N(k_1,k_2,\cdots,k_n)}, (-1)^{N(j_1,j_2,\cdots,j_n)+N(k_1,k_2,\cdots,k_n)} \right)
\end{aligned} \tag{2.8}$$

显然，n 阶立方行列式展开后的值为一个二维向量。

对二阶立方行列式垂直于 K 轴切片排列的各元素作如下记法：

$$\operatorname{dec}_2(A) = \text{【}A\text{】} = \text{【}A_{::1}, A_{::2}\text{】} = \left\{ \begin{vmatrix} a_{111} & a_{121} \\ a_{211} & a_{221} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{112} & a_{122} \\ a_{212} & a_{222} \end{vmatrix} \right\}。$$

即切片 $A_{::1} = \begin{pmatrix} a_{111} & a_{211} \\ a_{121} & a_{221} \end{pmatrix}$，切片 $A_{::2} = \begin{pmatrix} a_{112} & a_{212} \\ a_{122} & a_{222} \end{pmatrix}$。

根据定理 2.1 得：

$$\text{【}A\text{】} = \left(a_{111}a_{222} + a_{121}a_{212} - a_{211}a_{122} - a_{221}a_{112}, a_{111}a_{222} + a_{211}a_{122} - a_{121}a_{212} - a_{221}a_{112} \right)。$$

对于 n 阶立方行列式，根据逆序数的性质，有：[4]

$$(-1)^{N(i_1,i_2,\cdots,i_n)} = (-1)^{N(i_1,\cdots,i_{k-1},i_{k+1},\cdots,i_n)} (-1)^{i_k+k};$$

$$(-1)^{N(j_1,j_2,\cdots,j_n)} = (-1)^{N(j_1,\cdots,j_{k-1},j_{k+1},\cdots,j_n)} (-1)^{j_k+k}。$$

因此，$\left((-1)^{N(i_1,i_2,\cdots,i_n)}, (-1)^{N(j_1,j_2,\cdots,j_n)} \right) = \left((-1)^{N(i_1,\cdots,i_{k-1},i_{k+1},\cdots,i_n)} (-1)^{i_k+k}, (-1)^{N(j_1,\cdots,j_{k-1},j_{k+1},\cdots,j_n)} (-1)^{j_k+k} \right)$。

再根据引言的 Hadamard 积定义把上式右边的 $(-1)^{i_k+k}$ 和 $(-1)^{j_k+k}$ 提取出来得：

$$\left((-1)^{N(i_1,i_2,\cdots,i_n)}, (-1)^{N(j_1,j_2,\cdots,j_n)} \right) = \left((-1)^{N(i_1,\cdots,i_{k-1},i_{k+1},\cdots,i_n)}, (-1)^{N(j_1,\cdots,j_{k-1},j_{k+1},\cdots,j_n)} \right) \left((-1)^{i_k+k}, (-1)^{j_k+k} \right)。 \tag{2.9}$$

定义 2.2 对 $\operatorname{dec}_n(A)$ 的某元素 a_{ijk}，把 a_{ijk} 所在的 $A_{i::}$、$A_{:j:}$、$A_{::k}$ 三个切片上的所有元素删去，组成新的 $n-1$ 阶立方行列式称为 a_{ijk} 对应的立方余子式，记作 A_{ijk}。

根据定义 2.2，

$$A_{i_k,j_k,k} = \sum_{\binom{i_1,\cdots,i_{k-1},i_{k+1},\cdots,i_n}{j_1,\cdots,j_{k-1},j_{k+1},\cdots,j_n}} a_{i_1,j_1,1} \cdots a_{i_{k-1},j_{k-1},k-1} a_{i_{k+1},j_{k+1},k+1} \cdots a_{i_n,j_n,n} \left((-1)^{N(i_1,\cdots,i_{k-1},i_{k+1},\cdots,i_n)}, (-1)^{N(j_1,\cdots,j_{k-1},j_{k+1},\cdots,j_n)} \right)。$$

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51003. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 16 March 2020, publ: 19 March 2020

根据(2.9)，

$$
\begin{aligned}
【A】&=\sum_{\binom{i_1,i_2,\cdots,i_n}{j_1,j_2,\cdots,j_n}} a_{i_1,j_1,1}a_{i_2,j_2,2}\cdots a_{i_n,j_n,n}\left((-1)^{N(i_1,i_2,\cdots,i_n)},(-1)^{N(j_1,j_2,\cdots,j_n)}\right)\\
&=\sum_{\binom{i_k=1}{j_k=1}}^{n}\left[a_{i_k,j_k,k}\sum_{\binom{i_1,\cdots,i_{k-1},i_{k+1},\cdots,i_n}{j_1,\cdots,j_{k-1},j_{k+1},\cdots,j_n}} a_{i_1,j_1,1}\cdots a_{i_{k-1},j_{k-1},k-1}a_{i_{k+1},j_{k+1},k+1}\cdots a_{i_n,j_n,n}\left((-1)^{N(i_1,i_2,\cdots,i_n)},(-1)^{N(j_1,j_2,\cdots,j_n)}\right)\right]\\
&=\sum_{\binom{i_k=1}{j_k=1}}^{n}\left[a_{i_k,j_k,k}\sum_{\binom{i_1,\cdots,i_{k-1},i_{k+1},\cdots,i_n}{j_1,\cdots,j_{k-1},j_{k+1},\cdots,j_n}} a_{i_1,j_1,1}\cdots a_{i_{k-1},j_{k-1},k-1}a_{i_{k+1},j_{k+1},k+1}\cdots a_{i_n,j_n,n}\left((-1)^{N(i_1,\cdots,i_{k-1},i_{k+1},\cdots,i_n)+i_k+k},(-1)^{N(j_1,\cdots,j_{k-1},j_{k+1},\cdots,j_n)+j_k+k}\right)\right]\\
&=\sum_{\binom{i_k=1}{j_k=1}}^{n}a_{i_k,j_k,k}\left((-1)^{i_k+k},(-1)^{j_k+k}\right)\\
&\quad\times\sum_{\binom{i_1,\cdots,i_{k-1},i_{k+1},\cdots,i_n}{j_1,\cdots,j_{k-1},j_{k+1},\cdots,j_n}} a_{i_1,j_1,1}\cdots a_{i_{k-1},j_{k-1},k-1}a_{i_{k+1},j_{k+1},k+1}\cdots a_{i_n,j_n,n}\left((-1)^{N(i_1,\cdots,i_{k-1},i_{k+1},\cdots,i_n)},(-1)^{N(j_1,\cdots,j_{k-1},j_{k+1},\cdots,j_n)}\right)\\
&=\sum_{\binom{i_k=1}{j_k=1}}^{n}a_{i_k,j_k,k}A_{i_k,j_k,k}\left((-1)^{i_k+k},(-1)^{j_k+k}\right)=\sum_{\binom{i=1}{j=1}}^{n}a_{ijk}A_{ijk}\left((-1)^{i+k},(-1)^{j+k}\right)
\end{aligned}
\text{。} \tag{2.10}
$$

同理可得，

$$【A】=\sum_{\binom{i=1}{k=1}}^{n}a_{ijk}A_{ijk}\left((-1)^{i+k},(-1)^{j+k}\right)=\sum_{\binom{j=1}{k=1}}^{n}a_{ijk}A_{ijk}\left((-1)^{i+k},(-1)^{j+k}\right)\text{。} \tag{2.11}$$

定义 2.3 当 $x=\pm1$ 且 $y=\pm1$ 时，把向量 (x,y) 称作符号向量。在 $\mathrm{dec}_n(A)$ 中，把 $\left((-1)^{N(i_1,i_2,\cdots,i_n)+N(k_1,k_2,\cdots,k_n)},(-1)^{N(j_1,j_2,\cdots,j_n)+N(k_1,k_2,\cdots,k_n)}\right)$ 称为 $a_{i_1,j_1,k_1}a_{i_2,j_2,k_2}\cdots a_{i_n,j_n,k_n}$ 对应的符号向量；把 $\varepsilon_{ijk}=\left((-1)^{i+k},(-1)^{j+k}\right)$ 称为 A_{ijk} 对应的符号向量。符号向量 ε_{ijk} 与 a_{ijk} 的立方余子式 A_{ijk} 的 Hadamard 积 M_{ijk} 称为 a_{ijk} 的向量余子式。即 $M_{ijk}=\varepsilon_{ijk}A_{ijk}$。

显然，a_{ijk} 的向量余子式和立方余子式的值均与 a_{ijk} 的值无关，只与 a_{ijk} 的位置有关。由定义 2.1-2.3 和(2.10)、(2.11)可得以下定理：

定理 2.2 立方行列式 $\mathrm{dec}_n(A)$ 的值等于它垂直于 I 轴、J 轴、K 轴的任一切片上的各元素与其对应的向量余子式的乘积之和。即

按切片 $A_{i::}$ 展开：$【A】=\sum_{\binom{j=1}{k=1}}^{n}a_{ijk}M_{ijk}=\sum_{\binom{j=1}{k=1}}^{n}a_{ijk}A_{ijk}\left((-1)^{i+k},(-1)^{j+k}\right)$；

按切片 $A_{:j:}$ 展开：$【A】=\sum_{\binom{i=1}{k=1}}^{n}a_{ijk}M_{ijk}=\sum_{\binom{i=1}{k=1}}^{n}a_{ijk}A_{ijk}\left((-1)^{i+k},(-1)^{j+k}\right)$；

按切片 $A_{::k}$ 展开：$【A】=\sum_{\binom{i=1}{j=1}}^{n}a_{ijk}M_{ijk}=\sum_{\binom{i=1}{j=1}}^{n}a_{ijk}A_{ijk}\left((-1)^{i+k},(-1)^{j+k}\right)$。

对三阶立方行列式垂直于 K 轴切片排列的各元素作如下记法：

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{dec}_3(A)=【A】=【A_{::1},A_{::2},A_{::3}】\\
&=\left\{\begin{vmatrix}a_{111}&a_{121}&a_{131}\\a_{211}&a_{221}&a_{231}\\a_{311}&a_{321}&a_{331}\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_{112}&a_{122}&a_{132}\\a_{212}&a_{222}&a_{232}\\a_{312}&a_{322}&a_{332}\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_{113}&a_{123}&a_{133}\\a_{213}&a_{223}&a_{233}\\a_{313}&a_{323}&a_{333}\end{vmatrix}\right\}\text{。}
\end{aligned}
$$

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51003. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 16 March 2020, publ: 19 March 2020

在其切片 $A_{::1}=\begin{pmatrix} a_{111} & a_{121} & a_{131} \\ a_{211} & a_{221} & a_{231} \\ a_{311} & a_{321} & a_{331} \end{pmatrix}$ 中，各元素所对应的立方余子式分别为：

$$A_{111}=\left\{\begin{vmatrix} a_{222} & a_{232} \\ a_{322} & a_{332} \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_{223} & a_{233} \\ a_{323} & a_{333} \end{vmatrix}\right\};\quad A_{121}=\left\{\begin{vmatrix} a_{212} & a_{232} \\ a_{312} & a_{332} \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_{213} & a_{233} \\ a_{313} & a_{333} \end{vmatrix}\right\};$$

$$A_{131}=\left\{\begin{vmatrix} a_{212} & a_{222} \\ a_{312} & a_{322} \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_{213} & a_{223} \\ a_{313} & a_{323} \end{vmatrix}\right\};\quad A_{211}=\left\{\begin{vmatrix} a_{122} & a_{132} \\ a_{322} & a_{332} \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_{123} & a_{133} \\ a_{323} & a_{333} \end{vmatrix}\right\};$$

$$A_{221}=\left\{\begin{vmatrix} a_{112} & a_{132} \\ a_{312} & a_{332} \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_{113} & a_{133} \\ a_{313} & a_{333} \end{vmatrix}\right\};\quad A_{231}=\left\{\begin{vmatrix} a_{112} & a_{122} \\ a_{312} & a_{322} \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_{113} & a_{123} \\ a_{313} & a_{323} \end{vmatrix}\right\};$$

$$A_{311}=\left\{\begin{vmatrix} a_{122} & a_{132} \\ a_{222} & a_{232} \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_{123} & a_{133} \\ a_{223} & a_{233} \end{vmatrix}\right\};\quad A_{321}=\left\{\begin{vmatrix} a_{112} & a_{132} \\ a_{212} & a_{232} \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_{113} & a_{133} \\ a_{213} & a_{233} \end{vmatrix}\right\};$$

$$A_{331}=\left\{\begin{vmatrix} a_{112} & a_{122} \\ a_{212} & a_{222} \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_{113} & a_{123} \\ a_{213} & a_{223} \end{vmatrix}\right\}。$$

当 $k=1$ 时，设 $K_{ij}=a_{ij1}\varepsilon_{ij1}A_{ij1}$，则：

$$\begin{aligned}
K_{11}&=a_{111}A_{111}(1,1)=(a_{111},a_{111})A_{111}\\
&=a_{111}a_{222}a_{333}(1,1)+a_{111}a_{232}a_{323}(1,-1)+a_{111}a_{322}a_{233}(-1,1)+a_{111}a_{332}a_{223}(-1,-1);\\
K_{12}&=a_{121}A_{121}(1,-1)=(a_{121},-a_{121})A_{121}\\
&=a_{121}a_{232}a_{313}(1,1)+a_{121}a_{212}a_{333}(1,-1)+a_{121}a_{332}a_{213}(-1,1)+a_{121}a_{312}a_{233}(-1,-1);\\
K_{13}&=a_{131}A_{131}(1,1)=(a_{131},a_{131})A_{131}\\
&=a_{131}a_{212}a_{323}(1,1)+a_{131}a_{222}a_{313}(1,-1)+a_{131}a_{312}a_{223}(-1,1)+a_{131}a_{322}a_{213}(-1,-1);\\
K_{21}&=a_{211}A_{211}(-1,1)=(-a_{211},a_{211})A_{211}\\
&=a_{211}a_{322}a_{133}(1,1)+a_{211}a_{332}a_{123}(1,-1)+a_{211}a_{122}a_{333}(-1,1)+a_{211}a_{132}a_{323}(-1,-1);\\
K_{22}&=a_{221}A_{221}(-1,-1)=(-a_{221},-a_{221})A_{221}\\
&=a_{221}a_{332}a_{113}(1,1)+a_{221}a_{312}a_{133}(1,-1)+a_{221}a_{132}a_{313}(-1,1)+a_{221}a_{112}a_{333}(-1,-1);\\
K_{23}&=a_{231}A_{231}(-1,1)=(-a_{231},a_{231})A_{231}\\
&=a_{231}a_{312}a_{123}(1,1)+a_{231}a_{322}a_{113}(1,-1)+a_{231}a_{112}a_{323}(-1,1)+a_{231}a_{122}a_{313}(-1,-1);\\
K_{31}&=a_{311}A_{311}(1,1)=(a_{311},a_{311})A_{311}\\
&=a_{311}a_{122}a_{233}(1,1)+a_{311}a_{132}a_{223}(1,-1)+a_{311}a_{222}a_{133}(-1,1)+a_{311}a_{232}a_{123}(-1,-1);\\
K_{32}&=a_{321}A_{321}(1,-1)=(a_{321},-a_{321})A_{321}\\
&=a_{321}a_{132}a_{213}(1,1)+a_{321}a_{112}a_{233}(1,-1)+a_{321}a_{232}a_{113}(-1,1)+a_{321}a_{212}a_{133}(-1,-1);\\
K_{33}&=a_{331}A_{331}(1,1)=(a_{331},a_{331})A_{331}\\
&=a_{331}a_{112}a_{223}(1,1)+a_{331}a_{122}a_{213}(1,-1)+a_{331}a_{212}a_{123}(-1,1)+a_{331}a_{222}a_{113}(-1,-1)。
\end{aligned}$$

根据前面定理，把 $\mathrm{dec}_3(A)$ 按切片 $A_{::1}$ 展开得：

$$\mathrm{dec}_3(A)=K_{11}+K_{12}+K_{13}+K_{21}+K_{22}+K_{23}+K_{31}+K_{32}+K_{33}。$$

可以验证，$\mathrm{dec}_3(A)$ 无论从 $A_{::1}$、$A_{::2}$、$A_{::3}$、$A_{1::}$、$A_{2::}$、$A_{3::}$、$A_{:1:}$、$A_{:2:}$、$A_{:3:}$ 中按任何一个切片展开

时，值都一样。

定义 2.4 对 $\mathrm{dec}_n(A)$ 垂直于 I 轴、J 轴、K 轴分别选取任意 p 个平行切片后产生的 p^3 个交点处的所有元素组成的 p 阶立方行列式称为【A】的 p 阶立方子式，$2 \le p \le n-1$。当【A】去掉这个 p 阶立方子式所在的所有切片后得到的 $n-p$ 阶立方行列式称为这个 p 阶立方子式对应的 p 阶立方余子式。

因此，【A】中的 p 阶立方子式与其对应的 p 阶立方余子式各有 $\left(C_n^p\right)^3$ 个。

例如，在

$$\mathrm{dec}_4(A)=\left\{\begin{vmatrix} a_{111} & a_{121} & a_{131} & a_{141} \\ a_{211} & a_{221} & a_{231} & a_{241} \\ a_{311} & a_{321} & a_{331} & a_{341} \\ a_{411} & a_{421} & a_{431} & a_{441} \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_{112} & a_{122} & a_{132} & a_{142} \\ a_{212} & a_{222} & a_{232} & a_{242} \\ a_{312} & a_{322} & a_{332} & a_{342} \\ a_{412} & a_{422} & a_{432} & a_{442} \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_{113} & a_{123} & a_{133} & a_{143} \\ a_{213} & a_{223} & a_{233} & a_{243} \\ a_{313} & a_{323} & a_{333} & a_{343} \\ a_{413} & a_{423} & a_{433} & a_{443} \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_{114} & a_{124} & a_{134} & a_{144} \\ a_{214} & a_{224} & a_{234} & a_{244} \\ a_{314} & a_{324} & a_{334} & a_{344} \\ a_{414} & a_{424} & a_{434} & a_{444} \end{vmatrix}\right\}$$

中，2 阶立方子式 $\left\{\begin{vmatrix} a_{111} & a_{131} \\ a_{311} & a_{331} \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_{113} & a_{133} \\ a_{313} & a_{333} \end{vmatrix}\right\}$ 对应的 2 阶立方余子式为 $\left\{\begin{vmatrix} a_{222} & a_{242} \\ a_{422} & a_{442} \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_{224} & a_{244} \\ a_{424} & a_{444} \end{vmatrix}\right\}$。

定义 2.5 在 $\mathrm{dec}_n(A)$ 中，当某个 p 阶立方子式 A_q 在【A】中所在的各切片为 $A_{i_1::}$、$A_{i_2::}$、$\cdots$、$A_{i_p::}$、$A_{:j_1:}$、$A_{:j_2:}$、$\cdots$、$A_{:j_p:}$、$A_{::k_1}$、$A_{::k_2}$、$\cdots$、$A_{::k_p}$ 时，$1 \le q \le \left(C_n^p\right)^3$，$A_q$ 对应的 p 阶立方余子式 P_q 与 $\varepsilon_q=\left((-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_p+k_1+k_2+\cdots+k_p},(-1)^{j_1+j_2+\cdots+j_p+k_1+k_2+\cdots+k_p}\right)$ 的 Hadamard 积 M_q 称为 P_q 的 p 阶向量余子式，即 $M_q=\varepsilon_q P_q$。ε_q 称为 P_q 对应的符号向量。

定理 2.3 在 $\mathrm{dec}_n(A)$ 中，对垂直于 I 轴、J 轴、K 轴的任一方向选取任意 p 个平行切片，$p \le n-1$。这 p 个切片中的所有 p 阶立方子式为 $A_1,A_2,\cdots,A_r$ 与其对应的 p 阶立方余子式为 $P_1,P_2,\cdots,P_r$，每个 p 阶立方余子式对应的符号向量为 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_r$，$r=\left(C_n^p\right)^2$。$M_q$ 为 P_q 的 p 阶向量余子式，则

$$【A】=\sum_{q=1}^{r} A_q\varepsilon_q P_q=\sum_{q=1}^{r} M_q A_q 。$$

即【A】的值为任意 p 个平行切片中的所有 p 阶立方子式与其对应的 p 阶向量余子式的 Hadamard 积之和。

证明： 在 A_q 中任取一项：$a_{i_1,j_1,k_1}a_{i_2,j_2,k_2}\cdots a_{i_p,j_p,k_p}$，根据定义 2.3，该项在 A_q 内对应的符号向量为

$$\left((-1)^{N(i_1,i_2,\cdots,i_p)+N(k_1,k_2,\cdots,k_p)},(-1)^{N(j_1,j_2,\cdots,j_p)+N(k_1,k_2,\cdots,k_p)}\right)。$$

同理，在 P_q 中的任意一项：$a_{i_{p+1},j_{p+1},k_{p+1}}\cdots a_{i_n,j_n,k_n}$，该项在 P_q 内所对应的符号向量为

$$\left((-1)^{N(i_{p+1},\cdots,i_n)+N(k_{p+1},\cdots,k_n)},(-1)^{N(j_{p+1},\cdots,j_n)+N(k_{p+1},\cdots,k_n)}\right)。$$

这两项的乘积为 $a_{i_1,j_1,k_1}\cdots a_{i_p,j_p,k_p}a_{i_{p+1},j_{p+1},k_{p+1}}\cdots a_{i_n,j_n,k_n}$，设这两项各自对应的符号向量的 Hadamard 积为

$$\xi_q=\left((-1)^{N(i_1,i_2,\cdots,i_p)+N(k_1,k_2,\cdots,k_p)+N(i_{p+1},\cdots,i_n)+N(k_{p+1},\cdots,k_n)},(-1)^{N(j_1,j_2,\cdots,j_p)+N(k_1,k_2,\cdots,k_p)+N(j_{p+1},\cdots,j_n)+N(k_{p+1},\cdots,k_n)}\right)。$$

由于 $i_1,i_2,\cdots,i_n$、$j_1,j_2,\cdots,j_n$、$k_1,k_2,\cdots,k_n$ 均为 n 级排列，有：[5]

$$(-1)^{N(i_1,i_2,\cdots,i_n)+N(k_1,k_2,\cdots,k_n)}=(-1)^{N(i_1,i_2,\cdots,i_p)+N(k_1,k_2,\cdots,k_p)+N(i_{p+1},\cdots,i_n)+N(k_{p+1},\cdots,k_n)+i_1+\cdots+i_p+k_1+\cdots+k_p};$$

$$(-1)^{N(j_1,j_2,\cdots,j_n)+N(k_1,k_2,\cdots,k_n)}=(-1)^{N(j_1,j_2,\cdots,j_p)+N(k_1,k_2,\cdots,k_p)+N(j_{p+1},\cdots,j_n)+N(k_{p+1},\cdots,k_n)+j_1+\cdots+j_p+k_1+\cdots+k_p}。$$

因此 $\varepsilon_q\xi_q=\left((-1)^{N(i_1,i_2,\cdots,i_n)+N(k_1,k_2,\cdots,k_n)},(-1)^{N(j_1,j_2,\cdots,j_n)+N(k_1,k_2,\cdots,k_n)}\right)$。

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51003. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 16 March 2020, publ: 19 March 2020

即 $A_q\varepsilon_q P_q$ 中的各项都是【A】中的一项且其对应的符号向量相同，又 M_sA_s 与 M_tA_t 在 $s\neq t$ 时无公共项，且 $\sum_{q=1}^{r}A_q\varepsilon_q P_q$ 的项数 $=\left(C_n^p\right)^2\left(p!\right)^2\left(n-p\right)!^2=\left(n!\right)^2=$【$A$】的项数。

综上，定理得证。

定理 2.2 是定理 2.3 在 $p=1$ 时的特殊情形。定理 2.2 和定理 2.3 说明拉普拉斯定理推广至立方行列式依然成立，可使用上面定理证明：

定理 2.4

$$\begin{aligned}
&\mathrm{dec}_{m+n}\left(E\right)=【E_{::1},\cdots,E_{::m},E_{::m+1},\cdots,E_{::m+n}】\\
&=\left\{\begin{vmatrix} a_{1,1,1} & \cdots & a_{1,m,1} & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m,1,1} & \cdots & a_{m,m,1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix},\cdots,\begin{vmatrix} a_{1,1,m} & \cdots & a_{1,m,m} & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m,1,m} & \cdots & a_{m,m,m} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix},\right.\\
&\left.\begin{vmatrix} a_{1,1,m+1} & \cdots & a_{1,m,m+1} & c_{1,1,1} & \cdots & c_{1,n,1}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m,1,m+1} & \cdots & a_{m,m,m+1} & c_{m,1,1} & \cdots & c_{m,n,1}\\ d_{1,1,1} & \cdots & d_{1,m,1} & b_{1,1,1} & \cdots & b_{1,n,1}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ d_{n,1,1} & \cdots & d_{n,m,1} & b_{n,1,1} & \cdots & b_{n,n,1} \end{vmatrix},\cdots,\begin{vmatrix} a_{1,1,m+n} & \cdots & a_{1,m,m+n} & c_{1,1,n} & \cdots & c_{1,n,n}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m,1,m+n} & \cdots & a_{m,m,m+n} & c_{m,1,n} & \cdots & c_{m,n,n}\\ d_{1,1,n} & \cdots & d_{1,m,n} & b_{1,1,n} & \cdots & b_{1,n,n}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ d_{n,1,n} & \cdots & d_{n,m,n} & b_{n,1,n} & \cdots & b_{n,n,n} \end{vmatrix}\right\}。\\
&=\mathrm{dec}_m\left(A\right)\mathrm{dec}_n\left(B\right)
\end{aligned}$$

其中，$\mathrm{dec}_m\left(A\right)=\left\{\begin{vmatrix} a_{1,1,1} & \cdots & a_{1,m,1}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{m,1,1} & \cdots & a_{m,m,1}\end{vmatrix},\cdots,\begin{vmatrix} a_{1,1,m} & \cdots & a_{1,m,m}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{m,1,m} & \cdots & a_{m,m,m}\end{vmatrix}\right\}$；

$$\mathrm{dec}_n\left(B\right)=\left\{\begin{vmatrix} b_{1,1,1} & \cdots & b_{1,n,1}\\ \vdots & & \vdots\\ b_{n,1,1} & \cdots & a_{n,n,1}\end{vmatrix},\cdots,\begin{vmatrix} b_{1,1,n} & \cdots & b_{1,n,n}\\ \vdots & & \vdots\\ b_{n,1,n} & \cdots & a_{n,n,n}\end{vmatrix}\right\}。$$

证明：由于 $\mathrm{dec}_{m+n}\left(E\right)$ 等于切片 $E_{::1},E_{::2},\cdots,E_{::m}$ 上的所有 m 阶立方子式与其所对应的 m 阶向量余子式的 Hadamard 积之和。在这些 m 阶立方子式里面，除了 $\mathrm{dec}_m\left(A\right)$，其余的每一个 m 阶立方子式都至少含有一个所有元素均为零的切片，显然这些 m 阶立方子式的向量值为 $\left(0,0\right)$。因此，$\mathrm{dec}_{m+n}\left(E\right)$ 的向量值等于 $\mathrm{dec}_m\left(A\right)$ 与其所对应的 m 阶向量余子式 $\varepsilon_B\mathrm{dec}_n\left(B\right)$ 的 Hadamard 积。因为 $\varepsilon_B=\left(\left(-1\right)^{(1+2+\cdots+m)+(1+2+\cdots+m)},\left(-1\right)^{(1+2+\cdots+m)+(1+2+\cdots+m)}\right)=\left(1,1\right)$。故命题得证。

3. 旋转变换与翻转变换

本节可与狭义行列式的转置进行类比。

对下面 3 个二阶立方行列式【A】、【B】、【C】作从里往外切片排列并展开：

$$【A】=【A_{:1},A_{:2}】=\left\{\begin{vmatrix} a & b\\ c & d\end{vmatrix},\begin{vmatrix} e & f\\ g & h\end{vmatrix}\right\}=\left(ah+bg-cf-de,ah+cf-bg-de\right)；$$

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51003. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 16 March 2020, publ: 19 March 2020

$$【B】=【B_{::1},B_{::2}】=\left\{\begin{vmatrix}a & c\\ e & g\end{vmatrix},\begin{vmatrix}b & d\\ f & h\end{vmatrix}\right\}=\left(ah+cf-bg-de,ah+de-bg-cf\right)；$$

$$【C】=【C_{::1},C_{::2}】=\left\{\begin{vmatrix}a & e\\ b & f\end{vmatrix},\begin{vmatrix}c & g\\ d & h\end{vmatrix}\right\}=\left(ah+de-bg-cf,ah+bg-cf-de\right)。$$

令 $u=ah+bg-cf-de$， $v=ah+cf-bg-de$， $w=ah+de-bg-cf$，则有：

$$【A】=(u,v)；【B】=(v,w)；【C】=(w,u)。$$

显然：【B】的各元素 $b_{ijk}=a_{jki}$，【C】的各元素 $c_{ijk}=a_{kij}$，$1\le i,j,k\le 2$。

定义 3.1 对于 $\mathrm{dec}_n(A)$、$\mathrm{dec}_n(B)$、$\mathrm{dec}_n(C)$ 中的各元素 a_{ijk}、b_{ijk}、c_{ijk}，若有 $b_{ijk}=a_{jki}$ 与 $c_{ijk}=a_{kij}$，$1\le i,j,k\le n$。则称：【B】是【A】的前旋立方行列式，记作【B】=【$A^{+\Omega}$】；【C】是【A】的后旋立方行列式，记作【C】=【$A^{-\Omega}$】。【B】和【C】是【A】以主对角线为轴的旋转变换。

对于【B】=【$A^{+\Omega}$】，【C】=【$A^{-\Omega}$】，设 B_{ijk} 与 C_{ijk} 分别为 b_{ijk} 与 c_{ijk} 的立方余子式。根据定理 2.2，分别对其切片 $A_{i::}$、$B_{k::}$、$C_{j::}$ 展开得：

$$【A】=\sum_{\binom{j=1}{k=1}}^{n}a_{ijk}\varepsilon_{ijk}A_{ijk}=\sum_{\binom{j=1}{k=1}}^{n}a_{ijk}A_{ijk}\left((-1)^{i+k},(-1)^{j+k}\right)；$$

$$【B】=【A^{+\Omega}】=\sum_{\binom{i=1}{j=1}}^{n}b_{kij}\varepsilon_{kij}B_{kij}=\sum_{\binom{j=1}{k=1}}^{n}a_{ijk}A_{ijk}\left((-1)^{k+j},(-1)^{i+j}\right)；$$

$$【C】=【A^{-\Omega}】=\sum_{\binom{k=1}{i=1}}^{n}c_{jki}\varepsilon_{jki}C_{jki}=\sum_{\binom{j=1}{k=1}}^{n}a_{ijk}A_{ijk}\left((-1)^{j+i},(-1)^{k+i}\right)。$$

因此有下面定理：

定理 3.1 若【A】=【$B^{-\Omega}$】=【$C^{+\Omega}$】，则存在 u、v、w 使下面各式成立：

【A】$=(u,v)$；【B】$=(v,w)$；【C】$=(w,u)$。

定义 3.2 对于 $\mathrm{dec}_n(A)$、$\mathrm{dec}_n(B)$、$\mathrm{dec}_n(C)$、$\mathrm{dec}_n(D)$ 的各元素 a_{ijk}、b_{ijk}、c_{ijk}、d_{ijk}，分别有 $b_{ijk}=a_{jik}$、$c_{ijk}=a_{ikj}$、$d_{ijk}=a_{kji}$，$1\le i,j,k\le n$。则称：【B】是【A】关于 I 轴和 J 轴的翻转变换，记作【B】=【$A^{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{J}}$】；【$C$】是【$A$】关于 J 轴和 K 轴的翻转变换，记作【$C$】=【$A^{\mathrm{J}\leftrightarrow\mathrm{K}}$】；【$D$】是【$A$】关于 I 轴和 K 轴的翻转变换，记作【$D$】=【$A^{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{K}}$】。

根据定理 2.2 并类比定理 3.1，可以得出：

定理 3.2 若【A】=【$B^{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{J}}$】=【$C^{\mathrm{J}\leftrightarrow\mathrm{K}}$】=【$D^{\mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{K}}$】，则存在 u、v、w 使：

【A】$=(u,v)$；【B】$=(v,u)$；【C】$=(w,v)$；【D】$=(u,w)$。

4. 立方行列式的切片性质

由定理 2.2，可得出下面两定理，因证明过程极简单，此处省略证明，可参考文献[6]。

定理 4.1 立方行列式【A】中某个切片的各元素均乘以同一常数 x，得出的新立方行列式的值为【A】的 x 倍。

定理 4.2 对 $\mathrm{dec}_n(A)$、$\mathrm{dec}_n(B)$、$\mathrm{dec}_n(C)$ 分别垂直于同一方向相同位置的某一切片矩阵 A_i、B_i、C_i，若 $A_i=B_i+C_i$，$1\le i\le n$，且垂直于该方向的其他平行切片对应相等，则【A】=【B】+【C】。

定理 4.3 对【A】$=(u,v)$，交换【A】垂直于 K 轴的任意两个平行切片得到【B】，则【B】=–【A】；交

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51003. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 16 March 2020, publ: 19 March 2020

换【A】垂直于 J 轴的任意两个平行切片得到【C】，则【C】$=(u,-v)$；交换【A】垂直于 I 轴的任意两个平行切片得到【D】，则【D】$=(-u,v)$。

证明： 假设 $\mathrm{dec}_n(A)$ 通过交换 $A_{::p}$ 和 $A_{::q}$ 得到新的立方行列式 $\mathrm{dec}_n(B)$，$1\le p<q\le n$。

当 $k\ne p$ 且 $k\ne q$ 则：$a_{ijk}=b_{ijk}$，$a_{ijp}=b_{ijq}$，$a_{ijq}=b_{ijp}$。

根据(2.5)有 ：

$$
\begin{aligned}
【B】&=\sum_{\binom{i_1,\cdots,i_p,\cdots,i_q,\cdots,i_n}{j_1,\cdots,j_p,\cdots,j_q,\cdots,j_n}} b_{i_1,j_1,1}\cdots b_{i_p,j_p,p}\cdots b_{i_q,j_q,q}\cdots b_{i_n,j_n,n}\left((-1)^{N(i_1,\cdots,i_p,\cdots,i_q,\cdots,i_n)},(-1)^{N(j_1,\cdots,j_p,\cdots,j_q,\cdots,j_n)}\right)\\
&=\sum_{\binom{i_1,\cdots,i_q,\cdots,i_p,\cdots,i_n}{j_1,\cdots,j_q,\cdots,j_p,\cdots,j_n}} a_{i_1,j_1,1}\cdots a_{i_q,j_q,p}\cdots a_{i_p,j_p,q}\cdots a_{i_n,j_n,n}\left((-1)^{N(i_1,\cdots,i_q,\cdots,i_p,\cdots,i_n)},(-1)^{N(j_1,\cdots,j_q,\cdots,j_p,\cdots,j_n)}\right)。
\end{aligned}
$$

根据定义 2.3，$a_{i_1,j_1,1}\cdots a_{i_q,j_q,p}\cdots a_{i_p,j_p,q}\cdots a_{i_n,j_n,n}$ 在【A】中所对应的符号向量为：

$$\left((-1)^{N(i_1,\cdots,i_q,\cdots,i_p,\cdots,i_n)},(-1)^{N(j_1,\cdots,j_q,\cdots,j_p,\cdots,j_n)}\right)。$$

由于一个全排列调换任意两个元素的顺序后排列的奇偶性改变，因此：[7]

$$\left((-1)^{N(i_1,\cdots,i_p,\cdots,i_q,\cdots,i_n)},(-1)^{N(j_1,\cdots,j_p,\cdots,j_q,\cdots,j_n)}\right)=-\left((-1)^{N(i_1,\cdots,i_q,\cdots,i_p,\cdots,i_n)},(-1)^{N(j_1,\cdots,j_q,\cdots,j_p,\cdots,j_n)}\right)。$$

所以【B】$=-$【A】。

同理，根据(2.6)和(2.7)可分别证得：【C】$=(u,-v)$，【D】$=(-u,v)$。

根据上面定理很容易得出下面定理：

定理 4.4 对【A】$=(u,v)$，若【A】有两个垂直于 K 轴的切片相同或对应元素成比例，则【A】$=(0,0)$；若【A】有两个垂直于 I 轴的切片相同或对应元素成比例，则 $u=0$；若【A】有两个垂直于 J 轴的切片相同或对应元素成比例，则 $v=0$。

定理 4.4 还存在其他特殊情形，详见下节定理 5.4、5.6。

利用定理 4.4，对于 $\mathrm{dec}_n(A)$，分别令 $A_{::p}=A_{::k}$、$A_{p::}=A_{i::}$、$A_{:p:}=A_{:j:}$ 可得：

定理 4.5 $\mathrm{dec}_n(A)$ 中，若 $1\le p\ne k\le n$，则 $\sum\limits_{\binom{i=1}{j=1}}^{n} a_{ijp}M_{ijk}=(0,0)$；若 $1\le p\ne i\le n$，$\sum\limits_{\binom{j=1}{k=1}}^{n} a_{pjk}M_{ijk}=(u_1,v_1)$，则 $u_1=0$；若 $1\le p\ne j\le n$，$\sum\limits_{\binom{i=1}{k=1}}^{n} a_{ipk}M_{ijk}=(u_2,v_2)$，则 $v_2=0$。

再由定理 4.1、4.2、4.4 可得：

定理 4.6 对【A】垂直于 K 轴的任一切片矩阵加上另一平行切片矩阵的 x 倍得到【B】，则【A】=【B】。当【A】$=(u_1,v_1)$，对【A】垂直于 I 轴的任一切片矩阵加上另一平行切片矩阵的 x 倍得到【C】$=(u_2,v_2)$，则 $u_1=u_2$；对【A】垂直于 J 轴的任一切片矩阵加上另一平行切片矩阵的 x 倍得到【D】$=(u_3,v_3)$，则 $v_1=v_3$。

根据定理 4.6 可以得出定理 4.4 更强的形式：

定理 4.7 在 $\mathrm{dec}_n(A)=(u,v)$ 中，$1\le p\le n$：

若存在 $A_{::p}$ 与其他的平行切片线性相关，则【A】$=(0,0)$；若存在 $A_{p::}$ 与其他的平行切片线性相关，则 $u=0$；若存在 $A_{:p:}$ 与其他的平行切片线性相关，则 $v=0$。

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51003. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 16 March 2020, publ: 19 March 2020

对于 $\mathrm{dec}_3(A)=\left\{\begin{vmatrix}a&b&c\\a&b&0\\0&0&0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a&b&0\\a&b&c\\0&0&0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}d&d&0\\e&e&0\\0&0&c\end{vmatrix}\right\}$，按 $A_{3::}$ 展开可知 $\mathrm{dec}_3(A)=(0,0)$。

若 a、b、c、d、e 均不为零且各不相等，则 $\mathrm{dec}_3(A)$ 垂直于 I 轴、J 轴、K 轴任一方向的所有平行切片均线性无关。因此，定理 4.7 的成立只是充分条件，并非必要条件。故本文不对立方行列式的秩进行定义。

定理 4.3 还可以有以下变换：

定理 4.8 对 $\mathrm{dec}_n(A)$ 垂直于 I 轴、J 轴、K 轴的所有切片均作倒序排列组成 $\mathrm{dec}_n(B)$，即 $\mathrm{dec}_n(B)$ 中各元素 $b_{i,j,k}=a_{n+1-i,n+1-j,n+1-k}$，$1\le i,j,k\le n$，则 $\mathrm{dec}_n(A)=\mathrm{dec}_n(B)$。

5. 立方行列式的纤维性质

定义 5.1 在 $\mathrm{dec}_n(A)$ 中，选定 j、k，$a_{1jk},a_{2jk},\cdots,a_{njk}$ 组成与 I 轴平行的一个纤维，记作 $A_{\cdot jk}=(a_{1jk},a_{2jk},\cdots,a_{njk})^{-\Omega}$；选定 i、k，$a_{i1k},a_{i2k},\cdots,a_{ink}$ 组成与 J 轴平行的一个纤维，记作 $A_{i:k}=(a_{i1k},a_{i2k},\cdots,a_{ink})$；选定 i、j，$a_{ij1},a_{ij2},\cdots,a_{ijn}$ 组成与 K 轴平行的一个纤维，记作 $A_{ij:}=(a_{ij1},a_{ij2},\cdots,a_{ijn})^{+\Omega}$。对所有元素均为零的纤维称作零纤维。

定义 5.2 在 n 阶狭义行列式 $\det(A)$ 中，若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同为该行列式的每一行(列),对 $\det(A)$ 及其转置行列式 $\det(A^{\mathrm{T}})$ 均记作 $\det(A^{\mathrm{T}})=\det(A)=\det(A_1,A_2,\cdots,A_n)$，$A_i$ 表示该行列式的第 i 行(列)。

可验证下面两式：

$$\begin{aligned}\mathrm{dec}_2(A)&=\left\{\begin{vmatrix}a_{111}&a_{121}\\a_{211}&a_{221}\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_{112}&a_{122}\\a_{212}&a_{222}\end{vmatrix}\right\}\\&=(a_{111}a_{222}+a_{121}a_{212}-a_{211}a_{122}-a_{221}a_{112},a_{111}a_{222}+a_{211}a_{122}-a_{121}a_{212}-a_{221}a_{112})\\&=\left(\begin{vmatrix}a_{111}&a_{112}\\a_{221}&a_{222}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{121}&a_{122}\\a_{211}&a_{212}\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_{111}&a_{221}\\a_{112}&a_{222}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{211}&a_{121}\\a_{212}&a_{122}\end{vmatrix}\right)\\&=\left(\begin{vmatrix}a_{111}&a_{112}\\a_{221}&a_{222}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{121}&a_{122}\\a_{211}&a_{212}\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_{111}&a_{112}\\a_{221}&a_{222}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}a_{121}&a_{122}\\a_{211}&a_{212}\end{vmatrix}\right)\end{aligned};\qquad(5.1)$$

$$\begin{aligned}\mathrm{dec}_3(A)&=\left\{\begin{vmatrix}a_{111}&a_{211}&a_{311}\\a_{121}&a_{221}&a_{321}\\a_{131}&a_{231}&a_{331}\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_{112}&a_{212}&a_{312}\\a_{122}&a_{222}&a_{322}\\a_{132}&a_{232}&a_{332}\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_{113}&a_{213}&a_{313}\\a_{123}&a_{223}&a_{323}\\a_{133}&a_{233}&a_{333}\end{vmatrix}\right\}\\&=\left(\begin{vmatrix}a_{111}&a_{112}&a_{113}\\a_{221}&a_{222}&a_{223}\\a_{331}&a_{332}&a_{333}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{111}&a_{112}&a_{113}\\a_{231}&a_{232}&a_{233}\\a_{321}&a_{322}&a_{323}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{121}&a_{122}&a_{123}\\a_{211}&a_{212}&a_{213}\\a_{331}&a_{332}&a_{333}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{121}&a_{122}&a_{123}\\a_{231}&a_{232}&a_{233}\\a_{311}&a_{312}&a_{313}\end{vmatrix}\right.\\&\quad+\begin{vmatrix}a_{131}&a_{132}&a_{133}\\a_{211}&a_{212}&a_{213}\\a_{321}&a_{322}&a_{323}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{131}&a_{132}&a_{133}\\a_{221}&a_{222}&a_{223}\\a_{311}&a_{312}&a_{313}\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_{111}&a_{221}&a_{331}\\a_{112}&a_{222}&a_{332}\\a_{113}&a_{223}&a_{333}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{111}&a_{321}&a_{231}\\a_{112}&a_{322}&a_{232}\\a_{113}&a_{323}&a_{233}\end{vmatrix}\\&\quad\left.+\begin{vmatrix}a_{211}&a_{121}&a_{331}\\a_{212}&a_{122}&a_{332}\\a_{213}&a_{123}&a_{333}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{211}&a_{321}&a_{131}\\a_{212}&a_{322}&a_{132}\\a_{213}&a_{323}&a_{133}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{311}&a_{121}&a_{231}\\a_{312}&a_{122}&a_{232}\\a_{313}&a_{123}&a_{233}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{311}&a_{221}&a_{131}\\a_{312}&a_{222}&a_{132}\\a_{313}&a_{223}&a_{133}\end{vmatrix}\right)\end{aligned}。$$

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51003. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 16 March 2020, publ: 19 March 2020

定理 5.1 在 $\operatorname{dec}_n(A)=(u,v)$ 中：

$$\begin{aligned}u&=\sum_{j_1,j_2,\cdots,j_n}\det\left(A_{1,j_1:},A_{2,j_2:},\cdots,A_{n,j_n:}\right)=\sum_{j_1,j_2,\cdots,j_n}\det\left(A_{:j_1,1},A_{:j_2,2},\cdots,A_{:j_n,n}\right)\\&=\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_n}(-1)^{N(i_1,i_2,\cdots,i_n)}\det\left(A_{i_1,1:},A_{i_2,2:},\cdots,A_{i_n,n:}\right)\\&=\sum_{k_1,k_2,\cdots,k_n}(-1)^{N(k_1,k_2,\cdots,k_n)}\det\left(A_{:1,k_1},A_{:2,k_2},\cdots,A_{:n,k_n}\right)\end{aligned}\quad; \tag{5.2}$$

$$\begin{aligned}v&=\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_n}\det\left(A_{i_1,1:},A_{i_2,2:},\cdots,A_{i_n,n:}\right)=\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_n}\det\left(A_{i_1:1},A_{i_2:2},\cdots,A_{i_n:n}\right)\\&=\sum_{j_1,j_2,\cdots,j_n}(-1)^{N(j_1,j_2,\cdots,j_n)}\det\left(A_{1,j_1:},A_{2,j_2:},\cdots,A_{n,j_n:}\right)\\&=\sum_{k_1,k_2,\cdots,k_n}(-1)^{N(k_1,k_2,\cdots,k_n)}\det\left(A_{1:k_1},A_{2:k_2},\cdots,A_{n:k_n}\right)\end{aligned}\quad。 \tag{5.3}$$

即对于 $\operatorname{dec}_n(A)=(u,v)$，$u$、$v$ 分别等于 $n!$ 个各异的 n 阶狭义行列式之和，而这些狭义行列式的各行或各列都为 $\operatorname{dec}_n(A)$ 中的纤维。

证明：根据(2.5)和(2.6)，可以把 u 写成：

$$u=\sum_{j_1,j_2,\cdots,j_n}\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_n}a_{i_1,j_1,1}\cdots a_{i_n,j_n,n}(-1)^{N(i_1,i_2,\cdots,i_n)}=\sum_{j_1,j_2,\cdots,j_n}\sum_{k_1,k_2,\cdots,k_n}a_{1,j_1,k_1}\cdots a_{n,j_n,k_n}(-1)^{N(k_1,k_2,\cdots,k_n)}。$$

当 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 被选定为任意一种 n 级排列时，$\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_n}a_{i_1,j_1,1}\dots a_{i_n,j_n,n}(-1)^{N(i_1,i_2,\cdots,i_n)}$ 与 $\sum_{k_1,k_2,\cdots,k_n}a_{1,j_1,k_1}\cdots a_{n,j_n,k_n}(-1)^{N(k_1,k_2,\cdots,k_n)}$ 同为某个 n 阶狭义行列式 $\det(B)$：

若 $\det(B)$ 满足 $b_{ik}=a_{i,j_k,k}$ 或 $b_{ki}=a_{i,j_k,k}$，则 $\det(B)$ 的第 k 行或第 k 列 B_k 为 $\operatorname{dec}_n(A)$ 中与 I 轴平行的纤维 $A_{:j_k,k}$；

若 $\det(B)$ 满足 $b_{ik}=a_{i,j_i,k}$ 或 $b_{ki}=a_{i,j_i,k}$，则 $\det(B)$ 的第 i 行或第 i 列 B_i 为 $\operatorname{dec}_n(A)$ 中与 K 轴平行的纤维 $A_{i,j_i:}$。

再根据(2.7)或对每个 $\det\left(A_{1,j_1:},A_{2,j_2:},\cdots,A_{n,j_n:}\right)$ 与 $\det\left(A_{:j_1,1},A_{:j_2,2},\cdots,A_{:j_n,n}\right)$ 分别作有限多次行交换或列交换可分别证得(5.2)中各等式。

由于 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 的全排列共有 $n!$ 种，所以 u 可以表示为 $n!$ 个这样的狭义行列式之和。同理可证得(5.3)中各等式，v 也可以表示为 $n!$ 个类似的 n 阶狭义行列式之和，这些狭义行列式的各行或各列都为 $\operatorname{dec}_n(A)$ 的纤维 $A_{i_j,j:}$ 或 $A_{i_k:k}$。故命题得证。

利用定理 5.1，可以证明下面定理：

定理 5.2 在 $\operatorname{dec}_n(A)=(u,v)$ 中：

对同垂直于 J 轴或 K 轴的任意两平行切片，若这两个切片中所有与 I 轴平行的纤维相等或对应元素成比例，则 $u=0$；

对同垂直于 I 轴或 K 轴的任意两平行切片，若这两个切片中所有与 J 轴平行的纤维相等或对应元素成比例，则 $v=0$；

对同垂直于 I 轴或 J 轴的任意两平行切片，若这两个切片中所有与 K 轴平行的纤维相等或对应元素

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51003. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 16 March 2020, publ: 19 March 2020

成比例，则 $\operatorname{dec}_n(A)=(0,0)$。

证明：当 $1\le p<q\le n$，令 $i_s=p$，$i_t=q$，若 $1\le s<t\le n$，利用定理 5.1，则：

$$\operatorname{dec}_n(A)=\left(\sum_{j_1,j_2,\cdots,j_n}\det\left(A_{1,j_1:},\cdots,A_{p,j_p:},\cdots,A_{q,j_q:},\cdots,A_{n,j_n:}\right),\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_n}\det\left(A_{i_1,1:},\cdots,A_{i_s,s:},\cdots,A_{i_t,t:},\cdots,A_{i_n,n:}\right)\right)。$$

假设在 $\operatorname{dec}_n(A)$ 中，$A_{p::}$ 和 $A_{q::}$ 中任意两个与 K 轴平行的纤维相等或对应元素成比例，对于任意的 n 级排列 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 与 $j_1,j_2,\cdots,j_n$，则：

$$\det\left(A_{1,j_1:},\cdots,A_{p,j_p:},\cdots,A_{q,j_q:},\cdots,A_{n,j_n:}\right)=\det\left(A_{i_1,1:},\cdots,A_{i_s,s:},\cdots,A_{i_t,t:},\cdots,A_{i_n,n:}\right)=0。$$

若 $1\le t<s\le n$，同样有 $\det\left(A_{i_1,1:},\cdots,A_{i_t,t:},\cdots,A_{i_s,s:},\cdots,A_{i_n,n:}\right)=0$。

因此，$\operatorname{dec}_n(A)=(0,0)$。

同理可证，若 $\operatorname{dec}_n(A)$ 有两个平行切片同垂直于 J 轴，且这两切片中的任意两个与 K 轴平行的纤维相等或对应元素成比例时，$\operatorname{dec}_n(A)=(0,0)$。

再利用定理 5.1 的其余各式可证本定理的其他情形，故定理成立。

定理 5.3 在 $\operatorname{dec}_n(A)=(u,v)$ 中：

对同垂直于 I 轴的任意两平行切片，当位于同一切片中所有与 J 轴平行的纤维全部相等时，则 $\operatorname{dec}_n(A)=(0,0)$；对同垂直于 J 轴的任意两平行切片，当位于同一切片中所有与 I 轴平行的纤维全部相等时，则 $\operatorname{dec}_n(A)=(0,0)$；

对同垂直于 J 轴的任意两平行切片，当位于同一切片中所有与 K 轴平行的纤维全部相等时，则 $u=0$；对同垂直于 K 轴的任意两平行切片，当位于同一切片中所有与 J 轴平行的纤维全部相等时，则 $u=0$；

对同垂直于 I 轴的任意两平行切片，当位于同一切片中所有与 K 轴平行的纤维全部相等时，则 $v=0$；对同垂直于 K 轴的任意两平行切片，当位于同一切片中所有与 I 轴平行的纤维全部相等时，则 $v=0$。

证明：当 $1\le p<q\le n$，假设在 $\operatorname{dec}_n(A)$ 中，$A_{p::}$ 和 $A_{q::}$ 中所有与 J 轴平行的纤维满足：$A_{p:1}=A_{p:2}=\cdots=A_{p:n}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 且 $A_{q:1}=A_{q:2}=\cdots=A_{q:n}=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$。则这两个切片中所有与 K 轴平行的纤维：$A_{pj:}=b_j(1,\cdots,1)^{+\Omega}$，$A_{qj:}=c_j(1,\cdots,1)^{+\Omega}$，$1\le j\le n$。

由定理 5.2 可得，$\operatorname{dec}_n(A)=(0,0)$。同理可证，若 $\operatorname{dec}_n(A)$ 同垂直于 J 轴存在两平行切片，当位于同一切片中所有与 I 轴平行的纤维全部相等时，$\operatorname{dec}_n(A)=(0,0)$。

继续利用定理 5.2 的其他情形可证本定理的其他情形，故命题得证。

由定理 4.4 以及定理 5.2-5.3，可得：

定理 5.4 对于 $\operatorname{dec}_n(A)$ 中的任意两平行切片，若这两个切片中所有平行于其中一个相同方向的纤维全部相等，则 $\operatorname{dec}_n(A)=(0,0)$。

定义 5.3 在 $\operatorname{dec}_n(A)$ 中，$b_1,b_2,\cdots,b_n$ 为任意特定数列，c_1、c_2 为任意常数：

若 $A_{i_1,j_1:}=c_1(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{+\Omega}$ 且 $A_{i_2,j_2:}=c_2(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{+\Omega}$，则称 $A_{i_1,j_1:}$ 与 $A_{i_2,j_2:}$ 可比，记作 $A_{i_1,j_1:}:A_{i_1,j_1:}=c_1:c_2$，把 $c_1:c_2$ 称作 $A_{i_1,j_1:}$ 与 $A_{i_2,j_2:}$ 的纤维比；

若 $A_{:j_1,k_1}=c_1(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{-\Omega}$ 且 $A_{:j_2,k_2}=c_2(b_1,b_2,\cdots,b_n)^{-\Omega}$，则称 $A_{:j_1,k_1}$ 与 $A_{:j_2,k_2}$ 可比，记作 $A_{:j_1,k_1}:A_{:j_2,k_2}=c_1:c_2$，把 $c_1:c_2$ 称作 $A_{:j_1,k_1}$ 与 $A_{:j_2,k_2}$ 的纤维比；

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51003. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 16 March 2020, publ: 19 March 2020

若 $A_{i_1:k_1}=c_1\left(b_1,b_2,\cdots,b_n\right)$ 且 $A_{i_2:k_2}=c_2\left(b_1,b_2,\cdots,b_n\right)$，则称 $A_{i_1:k_1}$ 与 $A_{i_2:k_2}$ 可比，记作 $A_{i_1:k_1}:A_{i_2:k_2}=c_1:c_2$，把 $c_1:c_2$ 称作 $A_{i_1:k_1}$ 与 $A_{i_2:k_2}$ 的纤维比。

两个纤维可比的前提条件是这两纤维的位置相互平行且对应元素成比例。对于两个位置相互平行的零纤维，规定其纤维比为 $0:0$。

根据上面定义可将定理 5.3 推广至更强的形式，证明从略：

定理 5.5 在 $\operatorname{dec}_n\left(A\right)=\left(u,v\right)$ 中，$1\le p<q\le n$：

若 $A_{p:1}:A_{p:2}:\cdots:A_{p:n}=A_{q:1}:A_{q:2}:\cdots:A_{q:n}$ 或 $A_{:p1}:A_{:p2}:\cdots:A_{:pn}=A_{:q1}:A_{:q2}:\cdots:A_{:qn}$，则 $\operatorname{dec}_n\left(A\right)=\left(0,0\right)$；

若 $A_{1:p}:A_{2:p}:\cdots:A_{n:p}=A_{1:q}:A_{2:q}:\cdots:A_{n:q}$ 或 $A_{1p:}:A_{2p:}:\cdots:A_{np:}=A_{1q:}:A_{2q:}:\cdots:A_{nq:}$，则 $u=0$；

若 $A_{:1p}:A_{:2p}:\cdots:A_{:np}=A_{:1q}:A_{:2q}:\cdots:A_{:nq}$ 或 $A_{p1:}:A_{p2:}:\cdots:A_{pn:}=A_{q1:}:A_{q2:}:\cdots:A_{qn:}$，则 $v=0$。

利用定理 5.1 和定理 4.4，还可以得到下面各定理的恒等式，证明从略：

定理 5.6 在 $\operatorname{dec}_n\left(A\right)$ 中：

若垂直于 I 轴的各切片其狭义行列式都为 $\det\left(B\right)$，则 $\operatorname{dec}_n\left(A\right)=\left(0,n!\right)\det\left(B\right)$；

$$\text{即}\left\{\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\end{vmatrix},\cdots,\begin{vmatrix}a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\right\}=\left(0,n!\right)\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix};$$

若垂直于 J 轴的各切片其狭义行列式都为 $\det\left(B\right)$，则 $\operatorname{dec}_n\left(A\right)=\left(n!,0\right)\det\left(B\right)$；

$$\text{即}\left\{\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&\cdots&a_{11}\\a_{21}&\cdots&\cdots&a_{21}\\\vdots&\cdots&\cdots&\vdots\\a_{n1}&\cdots&\cdots&a_{n1}\end{vmatrix},\cdots,\begin{vmatrix}a_{1n}&\cdots&\cdots&a_{1n}\\a_{2n}&\cdots&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\cdots&\cdots&\vdots\\a_{nn}&\cdots&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\right\}=\left(n!,0\right)\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}。$$

定理 5.7

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}a_{111}&a_{112}&\cdots&a_{11n}\\a_{221}&a_{222}&\cdots&a_{22n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{nn1}&a_{nn2}&\cdots&a_{nnn}\end{vmatrix}\left(1,1\right)&=\left\{\begin{vmatrix}a_{111}&0&\cdots&0\\a_{211}&a_{221}&\ddots&\vdots\\\vdots&\vdots&\ddots&0\\a_{n11}&a_{n21}&\cdots&a_{nn1}\end{vmatrix},\cdots,\begin{vmatrix}a_{11n}&0&\cdots&0\\a_{21n}&a_{22n}&\ddots&\vdots\\\vdots&\vdots&\ddots&0\\a_{n1n}&a_{n2n}&\cdots&a_{nnn}\end{vmatrix}\right\}\\&=\left\{\begin{vmatrix}a_{111}&a_{121}&\cdots&a_{1n1}\\0&a_{221}&\cdots&a_{2n1}\\\vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&\ldots&0&a_{nn1}\end{vmatrix},\cdots,\begin{vmatrix}a_{11n}&a_{12n}&\cdots&a_{1nn}\\0&a_{22n}&\cdots&a_{2nn}\\\vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&0&a_{nnn}\end{vmatrix}\right\}\end{aligned}。$$

此外，还可以验证得出下面的各个恒等式：

$$\left\{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & b_1 \\ b_1 & a_{12} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b_1 \\ b_1 & \cdots & b_1 & a_{1n}\end{vmatrix}, \cdots, \begin{vmatrix} a_{n1} & b_n & \cdots & b_n\\ b_n & a_{n2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots&\ddots & b_n \\ b_n & \cdots & b_n & a_{nn}\end{vmatrix}\right\} = \begin{vmatrix} a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}(1,1)$$

$$=\left\{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & & \cdots & \cdots & & b_1 \\ b_1 & a_{12} & \ddots & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ b_1 & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & b_1 \\ 0 & \cdots & 0 & b_1 & \cdots & b_1 & a_{1n}\end{vmatrix}, \cdots, \begin{vmatrix} a_{n1} & b_n & & \cdots & \cdots & & b_n \\ b_n & a_{n2} & \ddots & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ b_n & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & b_n \\ 0 & \cdots & 0 & b_n & \cdots & b_n & a_{nn}\end{vmatrix}\right\}$$

$$=\left\{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & a_{12} & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & 0 \\ b_1 & & \ddots & \ddots & \ddots & & b_1 \\ 0 & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & b_1 \\ 0 & \cdots & 0 & b_1 & \cdots & b_1 & a_{1n}\end{vmatrix}, \cdots, \begin{vmatrix} a_{n1} & b_n & \cdots & b_n & 0 & \cdots & 0 \\ b_n & a_{n2} & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & 0 \\ b_n & & \ddots & \ddots & \ddots & & b_n \\ 0 & \ddots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \ddots & \ddots & b_n \\ 0 & \cdots & 0 & b_n & \cdots & b_n & a_{nn}\end{vmatrix}\right\}$$

$$=\left\{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \cdots & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & a_{12} & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & b_1 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & \ddots & \ddots & b_1 \\ b_1 & & \cdots & \cdots & & b_1 & a_{1n}\end{vmatrix}, \cdots, \begin{vmatrix} a_{n1} & b_n & \cdots & b_n & 0 & \cdots & 0 \\ b_n & a_{n2} & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & b_n \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & \ddots & \ddots & b_n \\ b_n & & \cdots & \cdots & & b_n & a_{nn}\end{vmatrix}\right\}。$$

上面只是列举了几种简单情形，当 n 越大时，$\begin{vmatrix} a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}(1,1)$ 还可以演变出更多其他的情形，通过定理 5.1，下面给出更广泛的情形：

定理 5.8

对于 $\operatorname{dec}_n(A)=\left\{\begin{vmatrix} a_{111}&a_{121}&\cdots&a_{1n1}\\ a_{211}&a_{221}&\cdots&a_{2n1}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ a_{n11}&a_{n21}&\cdots&a_{nn1}\end{vmatrix},\cdots,\begin{vmatrix} a_{11n}&a_{12n}&\cdots&a_{1nn}\\ a_{21n}&a_{22n}&\cdots&a_{2nn}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ a_{n1n}&a_{n2n}&\cdots&a_{nnn}\end{vmatrix}\right\}$，在 $i\neq j$ 时，每一个 $A_{ij:}$ 全部相等或对应元素成比例，则有：

$$\operatorname{dec}_n(A)=\begin{vmatrix} a_{111}&a_{112}&\cdots&a_{11n}\\ a_{221}&a_{222}&\cdots&a_{22n}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ a_{nn1}&a_{nn2}&\cdots&a_{nnn}\end{vmatrix}(1,1)。$$

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51003. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 16 March 2020, publ: 19 March 2020

上面定理中，若 $i \neq j$ 时所有的 $A_{ij:}$ 上的各元素均为零，则为定理 5.7 的特殊情形。

类比定理 5.7-5.8 可得下面两定理：

定理 5.9 当 $n \geq 3$：

$$
\begin{vmatrix}
a_{121} & a_{211} & a_{331} & \cdots & a_{nn1} \\
a_{122} & a_{212} & a_{332} & \cdots & a_{nn2} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{12n} & a_{21n} & a_{33n} & \cdots & a_{nnn}
\end{vmatrix}(1,-1)
$$

$$
=\left(\begin{vmatrix}
a_{121} & a_{211} & a_{331} & \cdots & a_{nn1} \\
a_{122} & a_{212} & a_{332} & \cdots & a_{nn2} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{12n} & a_{21n} & a_{33n} & \cdots & a_{nnn}
\end{vmatrix},\begin{vmatrix}
a_{211} & a_{121} & a_{331} & \cdots & a_{nn1} \\
a_{212} & a_{122} & a_{332} & \cdots & a_{nn2} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{21n} & a_{12n} & a_{33n} & \cdots & a_{nnn}
\end{vmatrix}\right)
$$

$$
=\left\{\begin{vmatrix}
0 & a_{121} & \cdots & \cdots & a_{1n1} \\
a_{211} & 0 & a_{231} & \cdots & a_{2n1} \\
0 & 0 & a_{331} & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{nn1}
\end{vmatrix},\cdots,\begin{vmatrix}
0 & a_{12n} & \cdots & \cdots & a_{1nn} \\
a_{21n} & 0 & a_{23n} & \cdots & a_{2nn} \\
0 & 0 & a_{33n} & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{nnn}
\end{vmatrix}\right\}
$$

$$
=\left\{\begin{vmatrix}
0 & a_{121} & 0 & \cdots & 0 \\
a_{211} & 0 & 0 & & \vdots \\
\vdots & a_{321} & a_{331} & \ddots & \vdots \\
\vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\
a_{n11} & a_{n21} & \cdots & \cdots & a_{nn1}
\end{vmatrix},\cdots,\begin{vmatrix}
0 & a_{12n} & 0 & \cdots & 0 \\
a_{21n} & 0 & 0 & & \vdots \\
\vdots & a_{32n} & a_{33n} & \ddots & \vdots \\
\vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\
a_{n1n} & a_{n2n} & \cdots & \cdots & a_{nnn}
\end{vmatrix}\right\}。
$$

定理 5.10 当 $n \geq 3$：

对于 $\operatorname{dec}_n(A)=\left\{\begin{vmatrix}
0 & a_{121} & \cdots & \cdots & a_{1n1} \\
a_{211} & 0 & a_{231} & \cdots & a_{2n1} \\
\vdots & a_{321} & a_{331} & & \vdots \\
\vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\
a_{n11} & a_{n21} & \cdots & \cdots & a_{nn1}
\end{vmatrix},\cdots,\begin{vmatrix}
0 & a_{12n} & \cdots & \cdots & a_{1nn} \\
a_{21n} & 0 & a_{23n} & \cdots & a_{2nn} \\
\vdots & a_{32n} & a_{33n} & & \vdots \\
\vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\
a_{n1n} & a_{n2n} & \cdots & \cdots & a_{nnn}
\end{vmatrix}\right\}$，在 $i \neq j$ 且 i 或 $j \geq 3$ 时，每一个 $A_{ij:}$ 全部相等或对应元素成比例，则有：

$$
\operatorname{dec}_n(A)=\begin{vmatrix}
a_{121} & a_{211} & a_{331} & \cdots & a_{nn1} \\
a_{122} & a_{212} & a_{332} & \cdots & a_{nn2} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{12n} & a_{21n} & a_{33n} & \cdots & a_{nnn}
\end{vmatrix}(1,-1)。
$$

再由定理 5.7-5.10 可得下面两定理：

定理 5.11 当 $n \geq 3$：

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51003. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 16 March 2020, publ: 19 March 2020

$$\begin{vmatrix} a_{111} & a_{221} & a_{331} & \cdots & a_{nn1}\\ a_{112} & a_{222} & a_{332} & \cdots & a_{nn2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{11n} & a_{22n} & a_{33n} & \cdots & a_{nnn}\end{vmatrix}(1,1)+\begin{vmatrix} a_{121} & a_{211} & a_{331} & \cdots & a_{nn1}\\ a_{122} & a_{212} & a_{332} & \cdots & a_{nn2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{12n} & a_{21n} & a_{33n} & \cdots & a_{nnn}\end{vmatrix}(1,-1)$$

$$=\left\{\begin{vmatrix} a_{111} & a_{121} & \cdots & \cdots & a_{1n1}\\ a_{211} & a_{221} & \cdots & \cdots & a_{2n1}\\ 0 & 0 & a_{331} & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{nn1}\end{vmatrix},\cdots,\begin{vmatrix} a_{11n} & a_{12n} & \cdots & \cdots & a_{1nn}\\ a_{21n} & a_{22n} & \cdots & \cdots & a_{2nn}\\ 0 & 0 & a_{33n} & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{nnn}\end{vmatrix}\right\}。$$

$$=\left\{\begin{vmatrix} a_{111} & a_{121} & 0 & \cdots & 0\\ a_{211} & a_{221} & 0 & & \vdots\\ \vdots & \vdots & a_{331} & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0\\ a_{n11} & a_{n21} & \cdots & \cdots & a_{nn1}\end{vmatrix},\cdots,\begin{vmatrix} a_{11n} & a_{12n} & 0 & \cdots & 0\\ a_{21n} & a_{22n} & 0 & & \vdots\\ \vdots & \vdots & a_{33n} & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0\\ a_{n1n} & a_{n2n} & \cdots & \cdots & a_{nnn}\end{vmatrix}\right\}$$

定理 5.12 当 $n\ge 3$：

对于 $\mathrm{dec}_n(A)=\left\{\begin{vmatrix} a_{111} & a_{121} & \cdots & a_{1n1}\\ a_{211} & a_{221} & \cdots & a_{2n1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n11} & a_{n21} & \cdots & a_{nn1}\end{vmatrix},\cdots,\begin{vmatrix} a_{11n} & a_{12n} & \cdots & a_{1nn}\\ a_{21n} & a_{22n} & \cdots & a_{2nn}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1n} & a_{n2n} & \cdots & a_{nnn}\end{vmatrix}\right\}$，在 $i\ne j$ 且 i 或 $j\ge 3$ 时，每一个 $A_{ij:}$ 全部相等或对应元素成比例，则有：

$$\mathrm{dec}_n(A)=\begin{vmatrix} a_{111} & a_{221} & a_{331} & \cdots & a_{nn1}\\ a_{112} & a_{222} & a_{332} & \cdots & a_{nn2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{11n} & a_{22n} & a_{33n} & \cdots & a_{nnn}\end{vmatrix}(1,1)+\begin{vmatrix} a_{121} & a_{211} & a_{331} & \cdots & a_{nn1}\\ a_{122} & a_{212} & a_{332} & \cdots & a_{nn2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{12n} & a_{21n} & a_{33n} & \cdots & a_{nnn}\end{vmatrix}(1,-1)。$$

定理 5.11-5.12 综合了定理 5.7-5.10 以及其余各种情形，在定理 5.11-5.12 中：

当 $A_{11:}=(0,\cdots,0)^{+\Omega}$ 或 $A_{22:}=(0,\cdots,0)^{+\Omega}$， $\mathrm{dec}_n(A)=\begin{vmatrix} a_{121} & a_{211} & a_{331} & \cdots & a_{nn1}\\ a_{122} & a_{212} & a_{332} & \cdots & a_{nn2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{12n} & a_{21n} & a_{33n} & \cdots & a_{nnn}\end{vmatrix}(1,-1)$；

当 $A_{12:}=(0,\cdots,0)^{+\Omega}$ 或 $A_{21:}=(0,\cdots,0)^{+\Omega}$， $\mathrm{dec}_n(A)=\begin{vmatrix} a_{111} & a_{112} & \cdots & a_{11n}\\ a_{221} & a_{222} & \cdots & a_{22n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{nn1} & a_{nn2} & \cdots & a_{nnn}\end{vmatrix}(1,1)$；

当 $A_{11:}=A_{12:}$ 且 $A_{21:}=A_{22:}$， $\mathrm{dec}_n(A)=\begin{vmatrix} a_{111} & a_{112} & \cdots & a_{11n}\\ a_{221} & a_{222} & \cdots & a_{22n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{nn1} & a_{nn2} & \cdots & a_{nnn}\end{vmatrix}(2,0)$；

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51003. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 16 March 2020, publ: 19 March 2020

当 $A_{11:}=A_{21:}$ 且 $A_{12:}=A_{22:}$， $\operatorname{dec}_n(A)=\begin{vmatrix} a_{111} & a_{112} & \cdots & a_{11n} \\ a_{221} & a_{222} & \cdots & a_{22n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nn1} & a_{nn2} & \cdots & a_{nnn} \end{vmatrix}(0,2)$。

利用(5.1)式，还可以构造出平面直角坐标系中的某些特定函数及参数方程的轨迹：

一般函数的轨迹： $\frac{1}{2}\left\{\begin{vmatrix} x & x \\ 1 & -1 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} b & b \\ 1-a & 1+a \end{vmatrix}\right\}=(x,ax+b)$；

直线的轨迹： $\frac{1}{2}\left\{\begin{vmatrix} x & x \\ 1 & -1 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} b & b \\ 1-a & 1+a \end{vmatrix}\right\}=(x,ax+b)$；

圆和椭圆的轨迹， $ab\neq 0$： $\frac{1}{2}\left\{\begin{vmatrix} \cos\theta & \cos\theta \\ \sin\theta & \sin\theta \end{vmatrix},\begin{vmatrix} -b & b \\ a & a \end{vmatrix}\right\}=(a\cos\theta,b\sin\theta)$；

双曲线的轨迹， $ab\neq 0$： $\frac{1}{4}\left\{\begin{vmatrix} e^{x} & e^{-x} \\ e^{x} & e^{-x} \end{vmatrix},\begin{vmatrix} b-a & b-a \\ a+b & a+b \end{vmatrix}\right\}=(a\cosh x,b\sinh x)$。

当 $n\geq 2$ 且 $a_0\neq 0$，利用定理 5.11-5.12，还可以得到：

$$\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \cdots & & \cdots & 0 \\ a_1 & x & -1 & \ddots & & & \vdots \\ a_2 & 0 & x & -1 & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n-2} & \vdots & & \ddots & x & -1 & 0 \\ 1+a_{n-1} & 0 & & & 0 & x & -1 \\ a_n & 0 & \cdots & & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)+\begin{vmatrix} -a_0 & -1 & 0 & \cdots & & \cdots & 0 \\ -a_1 & x & -1 & \ddots & & & \vdots \\ -a_2 & 0 & x & -1 & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -a_{n-2} & \vdots & & \ddots & x & -1 & 0 \\ 1-a_{n-1} & 0 & & & 0 & x & -1 \\ -a_n & 0 & \cdots & & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\begin{vmatrix} a_0 & -a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_1 & -a_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ x & x & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & 0 & & \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & & \cdots & 0 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_2 & -a_2 & 0 & \cdots & & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & & & \\ & 0 & x & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & 0 & -1 & 0 & & \\ \vdots & & & 0 & 0 & & \vdots \\ & & & & & \ddots & \\ 0 & & \cdots & & \cdots & & 0 \end{vmatrix},\cdots,\right.$$

$$\left.\begin{vmatrix} a_{n-2} & -a_{n-2} & 0 & \cdots & & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & & & \vdots \\ & 0 & \ddots & \ddots & & & \\ \vdots & & \ddots & 0 & 0 & & \\ \vdots & & & 0 & x & 0 & \vdots \\ & & & & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \cdots & & & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} 1+a_{n-1} & 1-a_{n-1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & 0 & 0 & \vdots \\ \vdots & & & 0 & x & 0 \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_n & -a_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}\right\}$$。

$$=\left(x,a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n\right)$$

至此，对于平面直角坐标系中的每个点，都可以通过构造立方行列式进行表示。

对任意的 $\operatorname{dec}_n(A)=(u_1,v_1)$ 与 $\operatorname{dec}_n(B)=(u_2,v_2)$，尝试定义其对应的同型 n 阶立方体矩阵 A、B，以及

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51003. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 16 March 2020, publ: 19 March 2020

A、B 之间乘法运算 $*$。通过乘法运算 $*$ 确定唯一的 n 阶立方体矩阵 C，使 $A*B=C$ 且 $\mathrm{dec}_n(C)=\mathrm{dec}_n(A*B)=\mathrm{dec}_n(A)\mathrm{dec}_n(B)=(u_1u_2,v_1v_2)$。$c_{ijk}$ 为 C 中的各元素，$1\le i,j,k\le n$。

根据定理 5.1，分别令：

$$u_1=\sum_{j_1,j_2,\cdots,j_n}\det\left(A_{1,j_1:},A_{2,j_2:},\cdots,A_{n,j_n:}\right);$$

$$u_2=\sum_{k_1,k_2,\cdots,k_n}(-1)^{N(k_1,k_2,\cdots,k_n)}\det\left(B_{:1,k_1},B_{:2,k_2},\cdots,B_{:n,k_n}\right);$$

$$v_1=\sum_{j_1,j_2,\cdots,j_n}(-1)^{N(j_1,j_2,\cdots,j_n)}\det\left(A_{1,j_1:},A_{2,j_2:},\cdots,A_{n,j_n:}\right);$$

$$v_2=\sum_{k_1,k_2,\cdots,k_n}(-1)^{N(k_1,k_2,\cdots,k_n)}\det\left(B_{1:k_1},B_{2:k_2},\cdots,B_{n:k_n}\right)。$$

再根据(2.6)，有：

$$\begin{aligned}u_1u_2&=\sum_{\binom{j_1,j_2,\cdots,j_n}{k_1,k_2,\cdots,k_n}}(-1)^{N(k_1,k_2,\cdots,k_n)}\det\left(A_{1,j_1:},A_{2,j_2:},\cdots,A_{n,j_n:}\right)\det\left(B_{:1,k_1},B_{:2,k_2},\cdots,B_{:n,k_n}\right)\\&=\sum_{\binom{j_1,j_2,\cdots,j_n}{k_1,k_2,\cdots,k_n}}c_{1,j_1,k_1}c_{2,j_2,k_2}\cdots c_{n,j_n,k_n}(-1)^{N(k_1,k_2,\cdots,k_n)}\end{aligned};$$

$$\begin{aligned}v_1v_2&=\sum_{\binom{j_1,j_2,\cdots,j_n}{k_1,k_2,\cdots,k_n}}(-1)^{N(j_1,j_2,\cdots,j_n)+N(k_1,k_2,\cdots,k_n)}\det\left(A_{1,j_1:},A_{2,j_2:},\cdots,A_{n,j_n:}\right)\det\left(B_{1:k_1},B_{2:k_2},\cdots,B_{n:k_n}\right)\\&=\sum_{\binom{j_1,j_2,\cdots,j_n}{k_1,k_2,\cdots,k_n}}c_{1,j_1,k_1}c_{2,j_2,k_2}\cdots c_{n,j_n,k_n}(-1)^{N(j_1,j_2,\cdots,j_n)+N(k_1,k_2,\cdots,k_n)}\end{aligned}。$$

假设对任意 n 级排列 $j_1,j_2,\cdots,j_n$、$k_1,k_2,\cdots,k_n$，上面两式各自的后两个等式分别去掉双重求和 $\sum_{\binom{j_1,j_2,\cdots,j_n}{k_1,k_2,\cdots,k_n}}$ 之后依然各自相等。分别去掉上面两式中的 $\sum_{\binom{j_1,j_2,\cdots,j_n}{k_1,k_2,\cdots,k_n}}$，并分别消去两式中的 $(-1)^{N(j_1,j_2,\cdots,j_n)}$、$(-1)^{N(k_1,k_2,\cdots,k_n)}$，则有：

$$\det\left(A_{1,j_1:},A_{2,j_2:},\cdots,A_{n,j_n:}\right)\det\left(B_{:1,k_1},B_{:2,k_2},\cdots,B_{:n,k_n}\right)=c_{1,j_1,k_1}c_{2,j_2,k_2}\cdots c_{n,j_n,k_n};\tag{5.4}$$

$$\det\left(A_{1,j_1:},A_{2,j_2:},\cdots,A_{n,j_n:}\right)\det\left(B_{1:k_1},B_{2:k_2},\cdots,B_{n:k_n}\right)=c_{1,j_1,k_1}c_{2,j_2,k_2}\cdots c_{n,j_n,k_n}。\tag{5.5}$$

即(5.4)和(5.5)分别可以组成一个关于 n^3 个未知数 c_{ijk} 的 n 次不定方程组，每个方程组含有 $(n!)^2$ 个方程。C 存在且唯一的充要条件是这两个方程组均有解且仅存在一组 n^3 个一一对应的共根 c_{ijk}。

对任意的 $j_1,j_2,\cdots,j_n$、$k_1,k_2,\cdots,k_n$，若 $\det\left(A_{1,j_1:},A_{2,j_2:},\cdots,A_{n,j_n:}\right)\ne 0$，要使两个方程组存在共根必须满足：$\det\left(B_{:1,k_1},B_{:2,k_2},\cdots,B_{:n,k_n}\right)=\det\left(B_{1:k_1},B_{2:k_2},\cdots,B_{n:k_n}\right)$。

即使分别令 u_1、u_2、v_1、v_2 为定理 5.1 中的其余各式然后利用定理 2.1 列作另外两个型如(5.4)和(5.5)的方程组，同样需要满足其他约束条件才能使两个方程组有共根。

因此，对任意的 n 阶立方体矩阵 A、B，并非一定存在唯一的 n 阶立方体矩阵 C，使其满足：$\mathrm{dec}_n(C)=\mathrm{dec}_n(A*B)=\mathrm{dec}_n(A)\mathrm{dec}_n(B)$。

即狭义行列式与矩阵之间的转化关系：$\det(MN)=\det(M)\det(N)$，无法类比到立方行列式上。故本文不对立方体矩阵与立方行列式的伴随行列式等作出定义。

本节给出了立方行列式与狭义行列式之间的转化关系。对于更高维的超立方行列式，都可以把其转化为含有多个狭义行列式之和的向量表示。

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51003. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 16 March 2020, publ: 19 March 2020

6. 超立方行列式

本节以四维超立方行列式映射到三维向量空间为例，更高维度的可依此类推。相关定理不再重复证明，可参考前面立方行列式在二维向量空间的情形。

定义 6.1 对于由 m 个 m 阶立方体数阵有序排列所组成的数阵函数，称为四维 m 阶超立方行列式。对于由 m 个 m 阶 n 维超立方体数阵有序排列所组成的数阵函数，称为 $n+1$ 维 m 阶超立方行列式，$n\geq 3$，$m\geq 2$。

定义 6.2 把 n 维 m 阶超立方行列式 A 记作 $\mathrm{dex}_{[n]m}(A)$ 或简写成【$A_{[n]}$】，$n\geq 3$。把 I_n 轴称作该 n 维超立方行列式的主轴或主方向，I_1 轴、I_2 轴、$\cdots$、I_{n-1} 轴称作该 n 维超立方行列式的副轴或副方向。规定 I_1 轴、I_2 轴、$\cdots$、I_n 轴各个方向两两垂直。

定义 6.3 在 $\mathrm{dex}_{[n]m}(A)$ 中，把垂直于 I_1 轴的第 i_1 个切片记作 $A_{i_1:\cdots:}$、垂直于 I_2 轴的第 i_2 个切片记作 $A_{:i_2:\cdots:}$、$\cdots$、垂直于 I_n 轴的第 i_n 个切片记作 $A_{:\cdots:i_n}$，这 n 个切片交点处的元素记作 $a_{i_1,i_2,\cdots,i_n}$，$1\leq i_1,i_2,\cdots,i_n\leq m$。

综上所述，m 阶的四维超立方行列式可以看作是 I_1 轴、I_2 轴、I_3 轴、I_4 轴任意一个方向上 m 个立方体数阵的有序排列，其垂直于每个方向的切片都是一个 m 阶立方体数阵；m 阶的 $n+1$ 维超立方行列式可以看作是 I_1 轴、I_2 轴、$\cdots$、I_{n+1} 轴任意一个方向上 m 个 n 维超立方体数阵的有序排列，其垂直于每个方向的切片都是一个 m 阶 n 维超立方体数阵。

使用开头的方法，对 m 级排列 $p_1,p_2,\cdots,p_m$、$q_1,q_2,\cdots,q_m$、$r_1,r_2,\cdots,r_m$、$s_1,s_2,\cdots,s_m$，

令 $a_{p_1,q_1,r_1,1}a_{p_2,q_2,r_2,2}\cdots a_{p_m,q_m,r_m,m}=a_{1,q_1',r_1',s_1}a_{2,q_2',r_2',s_2}\cdots a_{m,q_m',r_m',s_m}$，有：

$$\begin{aligned}&a_{p_1,q_1,r_1,1}a_{p_2,q_2,r_2,2}\cdots a_{p_m,q_m,r_m,m}\left((-1)^{N(p_1,p_2,\cdots,p_m)},(-1)^{N(q_1,q_2,\cdots,q_m)},(-1)^{N(r_1,r_2,\cdots,r_m)}\right)\\&=a_{1,q_1',r_1',s_1}a_{2,q_2',r_2',s_2}\cdots a_{m,q_m',r_m',s_m}\left((-1)^{N(s_1,s_2,\cdots,s_m)},(-1)^{N(q_1',q_2',\cdots,q_m')+N(s_1,s_2,\cdots,s_m)},(-1)^{N(r_1',r_2',\cdots,r_m')+N(s_1,s_2,\cdots,s_m)}\right)\end{aligned};\tag{6.1}$$

令 $a_{p_1,q_1,r_1,1}a_{p_2,q_2,r_2,2}\cdots a_{p_m,q_m,r_m,m}=a_{p_1',1,r_1',s_1}a_{p_2',2,r_2',s_2}\cdots a_{p_m',m,r_m',s_m}$，有：

$$\begin{aligned}&a_{p_1,q_1,r_1,1}a_{p_2,q_2,r_2,2}\cdots a_{p_m,q_m,r_m,m}\left((-1)^{N(p_1,p_2,\cdots,p_m)},(-1)^{N(q_1,q_2,\cdots,q_m)},(-1)^{N(r_1,r_2,\cdots,r_m)}\right)\\&=a_{p_1',1,r_1',s_1}a_{p_2',2,r_2',s_2}\cdots a_{p_m',m,r_m',s_m}\left((-1)^{N(p_1',p_2',\cdots,p_m')+N(s_1,s_2,\cdots,s_m)},(-1)^{N(s_1,s_2,\cdots,s_m)},(-1)^{N(r_1',r_2',\cdots,r_m')+N(s_1,s_2,\cdots,s_m)}\right)\end{aligned};\tag{6.2}$$

令 $a_{p_1,q_1,r_1,1}a_{p_2,q_2,r_2,2}\cdots a_{p_m,q_m,r_m,m}=a_{p_1',q_1',1,s_1}a_{p_2',q_2',2,s_2}\cdots a_{p_m',q_m',m,s_m}$，有：

$$\begin{aligned}&a_{p_1,q_1,r_1,1}a_{p_2,q_2,r_2,2}\cdots a_{p_m,q_m,r_m,m}\left((-1)^{N(p_1,p_2,\cdots,p_m)},(-1)^{N(q_1,q_2,\cdots,q_m)},(-1)^{N(r_1,r_2,\cdots,r_m)}\right)\\&=a_{p_1',q_1',1,s_1}a_{p_2',q_2',2,s_2}\cdots a_{p_m',q_m',m,s_m}\left((-1)^{N(p_1',p_2',\cdots,p_m')+N(s_1,s_2,\cdots,s_m)},(-1)^{N(q_1',q_2',\cdots,q_m')+N(s_1,s_2,\cdots,s_m)},(-1)^{N(s_1,s_2,\cdots,s_m)}\right)\end{aligned}。\tag{6.3}$$

定义 6.4 对任意 m 级排列 $j_1,j_2,\cdots,j_m$，可将 $(-1)^{N(j_1,j_2,\cdots,j_m)}$ 写成 $\mathrm{sgn}(\sigma(j))$，其中 $\mathrm{sgn}(\sigma(j))=(-1)^{\sigma(j)}$，即 $\sigma(j)$ 为 m 级排列 $1,2,\cdots,m$ 的一个置换 [8]。

先用 i_1、i_2、i_3、i_4、i_1'、i_2'、i_3' 分别替换(6.1)-(6.3)中的 p、q、r、s、p'、q'、r'；再根据上面定义，设集合 T_m 是 m 级排列 $1,2,\cdots,m$ 上置换的全体，用 $\sum\limits_{\sigma(i_1)\in T_m}$ 表示 $\sigma(i_1)$ 历遍 T_m 中每一个元素的求和，并用 $\sum\limits_{\begin{pmatrix}\sigma(i_1)\in T_m\\\sigma(i_2)\in T_m\\\sigma(i_3)\in T_m\end{pmatrix}}$ 表示三重求和 $\sum\limits_{\sigma(i_1)\in T_m}\sum\limits_{\sigma(i_2)\in T_m}\sum\limits_{\sigma(i_3)\in T_m}$。

综上所述，根据(6.1)-(6.3)并类比前面定理 2.1 的，有：

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51003. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 16 March 2020, publ: 19 March 2020

$$
\begin{aligned}
\mathrm{dex}_{[4]m}(A) &= \sum_{\begin{pmatrix}\sigma(i_1)\in T_m\\ \sigma(i_2)\in T_m\\ \sigma(i_3)\in T_m\end{pmatrix}} \prod_{j=1}^{m} a_{i_{1_j},i_{2_j},i_{3_j},j}\left(\mathrm{sgn}\left(\sigma(i_1)\right),\mathrm{sgn}\left(\sigma(i_2)\right),\mathrm{sgn}\left(\sigma(i_3)\right)\right)\\
&= \sum_{\begin{pmatrix}\sigma(i_2)\in T_m\\ \sigma(i_3)\in T_m\\ \sigma(i_4)\in T_m\end{pmatrix}} \prod_{j=1}^{m} a_{j,i_{2_j},i_{3_j},i_{4_j}}\left(\mathrm{sgn}\left(\sigma(i_4)\right),\mathrm{sgn}\left(\sigma(i_2)+\sigma(i_4)\right),\mathrm{sgn}\left(\sigma(i_3)+\sigma(i_4)\right)\right)\\
&= \sum_{\begin{pmatrix}\sigma(i_1)\in T_m\\ \sigma(i_3)\in T_m\\ \sigma(i_4)\in T_m\end{pmatrix}} \prod_{j=1}^{m} a_{i_{1_j},j,i_{3_j},i_{4_j}}\left(\mathrm{sgn}\left(\sigma(i_1)+\sigma(i_4)\right),\mathrm{sgn}\left(\sigma(i_4)\right),\mathrm{sgn}\left(\sigma(i_3)+\sigma(i_4)\right)\right)\\
&= \sum_{\begin{pmatrix}\sigma(i_1)\in T_m\\ \sigma(i_2)\in T_m\\ \sigma(i_4)\in T_m\end{pmatrix}} \prod_{j=1}^{m} a_{i_{1_j},i_{2_j},j,i_{4_j}}\left(\mathrm{sgn}\left(\sigma(i_1)+\sigma(i_4)\right),\mathrm{sgn}\left(\sigma(i_2)+\sigma(i_4)\right),\mathrm{sgn}\left(\sigma(i_4)\right)\right)
\end{aligned}
\text{。} \quad (6.4)
$$

定义 6.5 用 $\sum\limits_{\begin{pmatrix}\sigma(i_1)\in T_m\\ \vdots\\ \sigma(i_n)\in T_m\end{pmatrix}}$ 表示 n 重求和 $\sum\limits_{\sigma(i_1)\in T_m}\sum\limits_{\sigma(i_2)\in T_m}\cdots\sum\limits_{\sigma(i_n)\in T_m}$；用 $\sum\limits_{\begin{pmatrix}i_1=1\\ \vdots\\ i_n=1\end{pmatrix}}^{m}$ 表示 n 重求和 $\sum\limits_{i_1=1}^{m}\sum\limits_{i_2=1}^{m}\cdots\sum\limits_{i_n=1}^{m}$。

根据上面定义，可类比(6.4)推广出 n 维 m 阶超立方行列式的展开公式：

定理 6.1 当 $n\geq 3$ 时，$2\leq p\leq n-1$：

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{dex}_{[n]m}(A) = \sum_{\begin{pmatrix}\sigma(i_1)\in T_m\\ \vdots\\ \sigma(i_{n-1})\in T_m\end{pmatrix}} \prod_{j=1}^{m} a_{i_{1_j},i_{2_j},\cdots,i_{n-1_j},j}\left(\mathrm{sgn}\left(\sigma(i_1)\right),\mathrm{sgn}\left(\sigma(i_2)\right),\cdots,\mathrm{sgn}\left(\sigma(i_{n-1})\right)\right)\\
&= \sum_{\begin{pmatrix}\sigma(i_2)\in T_m\\ \vdots\\ \sigma(i_n)\in T_m\end{pmatrix}} \prod_{j=1}^{m} a_{j,i_{2_j},\cdots,i_{n_j}}\left(\mathrm{sgn}\left(\sigma(i_n)\right),\mathrm{sgn}\left(\sigma(i_2)+\sigma(i_n)\right),\cdots,\mathrm{sgn}\left(\sigma(i_{n-1})+\sigma(i_n)\right)\right)\\
&=\cdots= \sum_{\begin{pmatrix}\sigma(i_1)\in T_m\\ \vdots\\ \sigma(i_{p-1})\in T_m\\ \sigma(i_{p+1})\in T_m\\ \vdots\\ \sigma(i_n)\in T_m\end{pmatrix}} \prod_{j=1}^{m} a_{i_{1_j},\cdots,i_{p-1_j},j,i_{p+1_j},\cdots,i_{n_j}}\left(\mathrm{sgn}\left(\sigma(i_1)+\sigma(i_n)\right),\cdots,\mathrm{sgn}\left(\sigma(i_{p-1})+\sigma(i_n)\right),\mathrm{sgn}\left(\sigma(i_n)\right),\right.\\
&\qquad\left.\mathrm{sgn}\left(\sigma(i_{p+1})+\sigma(i_n)\right),\cdots,\mathrm{sgn}\left(\sigma(i_{n-1})+\sigma(i_n)\right)\right)\\
&=\cdots= \sum_{\begin{pmatrix}\sigma(i_1)\in T_m\\ \vdots\\ \sigma(i_{n-2})\in T_m\\ \sigma(i_n)\in T_m\end{pmatrix}} \prod_{j=1}^{m} a_{i_{1_j},\cdots,i_{n-2_j},j,i_{n_j}}\left(\mathrm{sgn}\left(\sigma(i_1)+\sigma(i_n)\right),\cdots,\mathrm{sgn}\left(\sigma(i_{n-2})+\sigma(i_n)\right),\mathrm{sgn}\left(\sigma(i_n)\right)\right)
\end{aligned}
\text{。}
$$

对二阶的四维超立方行列式作如下记法：

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{dex}_{[4]2}(A) = 【A_{[4]}】 = 【A_{::1},A_{::2}】 = \left\{\left\{\begin{vmatrix}a_{1111} & a_{1211}\\ a_{2111} & a_{2211}\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_{1121} & a_{1221}\\ a_{2121} & a_{2221}\end{vmatrix}\right\},\left\{\begin{vmatrix}a_{1112} & a_{1212}\\ a_{2112} & a_{2212}\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_{1122} & a_{1222}\\ a_{2122} & a_{2222}\end{vmatrix}\right\}\right\}\\
&= a_{1111}a_{2222}(1,1,1)+a_{2111}a_{1222}(-1,1,1)+a_{1211}a_{2122}(1,-1,1)\\
&\quad + a_{2211}a_{1122}(-1,-1,1)+a_{1121}a_{2212}(1,1,-1)+a_{2121}a_{1212}(-1,1,-1)\\
&\quad + a_{1221}a_{2112}(1,-1,-1)+a_{2221}a_{1112}(-1,-1,-1)
\end{aligned}
\text{。}
$$

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51003. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 16 March 2020, publ: 19 March 2020

显然，四维超立方行列式展开后为一个三维向量。$n\ge 3$ 时，n 维超立方行列式展开后为一个 $n-1$ 维向量。对狭义行列式也可称作二维行列式，映射到一维线性空间。

定义 6.6 对 $\mathrm{dex}_{[n]m}(A)$ 的某元素 $a_{i_1,i_2,\cdots,i_n}$，把该元素所在各切片上的所有元素删去，组成新的 $m-1$ 阶 n 维超立方行列式称为 $a_{i_1,i_2,\cdots,i_n}$ 的 n 维超立方余子式，记作 $A_{i_1,i_2,\cdots,i_n}$。

定义 6.7 把 $\varepsilon_{i_1,i_2,\cdots,i_n}=\left((-1)^{i_1+i_n},(-1)^{i_2+i_n},\cdots,(-1)^{i_{n-1}+i_n}\right)$ 称为 $A_{i_1,i_2,\cdots,i_n}$ 的符号向量。符号向量 $\varepsilon_{i_1,i_2,\cdots,i_n}$ 与 $a_{i_1,i_2,\cdots,i_n}$ 的 n 维超立方余子式 $A_{i_1,i_2,\cdots,i_n}$ 的 Hadamard 积 $M_{i_1,i_2,\cdots,i_n}$ 称为 $a_{i_1,i_2,\cdots,i_n}$ 的向量余子式。即：$M_{i_1,i_2,\cdots,i_n}=\varepsilon_{i_1,i_2,\cdots,i_n}A_{i_1,i_2,\cdots,i_n}$。

由于每个 $\sigma(i_1),\sigma(i_2),\cdots,\sigma(i_n)$ 都是各自在 m 级排列 $1,2,\cdots,m$ 上的置换，故拉普拉斯定理在 n 维超立方行列式依然成立，具体证明参考定理 2.2-2.3。有下面定理：

定理 6.2 $\mathrm{dex}_{[n]m}(A)$ 的值等于任一切片上的各元素与其对应的向量余子式的乘积之和，$n\ge 3$。

按切片 $A_{i_1:\cdots:}$ 展开：

$$【A_{[n]}】=\sum_{\begin{pmatrix}i_2=1\\ \vdots\\ i_n=1\end{pmatrix}}^{m} a_{i_1,i_2,\cdots,i_n}M_{i_1,i_2,\cdots,i_n}=\sum_{\begin{pmatrix}i_2=1\\ \vdots\\ i_n=1\end{pmatrix}}^{m} a_{i_1,i_2,\cdots,i_n}A_{i_1,i_2,\cdots,i_n}\left((-1)^{i_1+i_n},(-1)^{i_2+i_n},\cdots,(-1)^{i_{n-1}+i_n}\right);\ \cdots$$

按切片 $A_{\cdots:i_p:\cdots:}$ 展开，$2\le p\le n-1$：

$$【A_{[n]}】=\sum_{\begin{pmatrix}i_1=1\\ \vdots\\ i_{p-1}=1\\ i_{p+1}=1\\ \vdots\\ i_n=1\end{pmatrix}}^{m} a_{i_1,i_2,\cdots,i_n}M_{i_1,i_2,\cdots,i_n}=\sum_{\begin{pmatrix}i_1=1\\ \vdots\\ i_{p-1}=1\\ i_{p+1}=1\\ \vdots\\ i_n=1\end{pmatrix}}^{m} a_{i_1,i_2,\cdots,i_n}A_{i_1,i_2,\cdots,i_n}\left((-1)^{i_1+i_n},(-1)^{i_2+i_n},\cdots,(-1)^{i_{n-1}+i_n}\right);\ \cdots$$

按切片 $A_{\cdots:i_n}$ 展开：

$$【A_{[n]}】=\sum_{\begin{pmatrix}i_1=1\\ \vdots\\ i_{n-1}=1\end{pmatrix}}^{m} a_{i_1,i_2,\cdots,i_n}M_{i_1,i_2,\cdots,i_n}=\sum_{\begin{pmatrix}i_1=1\\ \vdots\\ i_{n-1}=1\end{pmatrix}}^{m} a_{i_1,i_2,\cdots,i_n}A_{i_1,i_2,\cdots,i_n}\left((-1)^{i_1+i_n},(-1)^{i_2+i_n},\cdots,(-1)^{i_{n-1}+i_n}\right)。$$

定义 6.8 对 $\mathrm{dex}_{[n]m}(A)$ 垂直于各个方向同时分别选取任意 p 个平行切片后产生的 p^n 个交点处的所有元素组成的 p 阶 n 维超立方行列式称为【$A_{[n]}$】的 p 阶 n 维超立方子式，$2\le p\le m-1$。当【$A_{[n]}$】去掉这个 p 阶 n 维超立方子式所在的所有切片后得到的 $m-p$ 阶 n 维超立方行列式称为这个 p 阶 n 维超立方子式对应的 p 阶 n 维超立方余子式。

因此，【$A_{[n]}$】的 p 阶 n 维超立方子式与 p 阶 n 维超立方余子式各有 $\left(C_m^p\right)^n$ 个。

定义 6.9 在 $\mathrm{dex}_{[n]m}(A)$ 中，当某个 p 阶 n 维超立方子式 A_q 在【$A_{[n]}$】中所在的各切片为 $A_{i_{1q_1}:\cdots:}$、$A_{i_{1q_2}:\cdots:}$、$\cdots$、$A_{i_{1q_p}:\cdots:}$、$A_{:i_{2q_1}:\cdots:}$、$A_{:i_{2q_2}:\cdots:}$、$\cdots$、$A_{:i_{2q_p}:\cdots:}$、$\cdots$、$A_{\cdots:i_{nq_1}}$、$A_{\cdots:i_{nq_2}}$、$\cdots$、$A_{\cdots:i_{nq_p}}$ 时，$1\le q\le\left(C_m^p\right)^n$，其对应的 p 阶 n 维超立方余子式 P_q 与 P_q 对应的符号向量 ε_q 的 Hadamard 积 M_q 称为 P_q 的 p 阶向量余子式。即

$$M_q=\varepsilon_q P_q,$$

$$\varepsilon_q=\left((-1)^{i_{1q_1}+i_{1q_2}+\cdots+i_{1qp}+i_{nq_1}+i_{nq_2}+\cdots+i_{nqp}},(-1)^{i_{2q_1}+i_{2q_2}+\cdots+i_{2qp}+i_{nq_1}+i_{nq_2}+\cdots+i_{nqp}},\cdots,\right.$$
$$\left.(-1)^{i_{n-1q_1}+i_{n-1q_2}+\cdots+i_{n-1qp}+i_{nq_1}+i_{nq_2}+\cdots+i_{nqp}}\right)。$$

拉普拉斯定理在 n 维超立方行列式可推广至 p 阶 n 维超立方子式的情形：

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51003. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 16 March 2020, publ: 19 March 2020

定理 6.3 在 $\mathrm{dex}_{[n]m}(A)$ 中，选取任意 p 个平行切片，$p\le m-1$。这 p 个切片中的所有 p 阶 n 维超立方子式为 $A_1,A_2,\cdots,A_r$ 与其对应的 p 阶 n 维超立方余子式为 $P_1,P_2,\cdots,P_r$，每个 p 阶 n 维超立方余子式对应的符号向量为 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_r$，$r=\left(C_m^p\right)^{n-1}$。$M_q$ 为 P_q 的 p 阶向量余子式，则【$A_{[n]}$】$=\sum_{q=1}^{r}A_q\varepsilon_qP_q=\sum_{q=1}^{r}M_qA_q$。

即【$A_{[n]}$】的值为任意 p 个平行切片中的所有 p 阶 n 维超立方子式与其对应的 p 阶向量余子式的 Hadamard 积之和。

定义 6.10 对【$A_{[n]}$】的任意两轴 I_p 和 I_q 交换位置得到新的 n 维超立方行列式【$B_{[n]}$】，将【$B_{[n]}$】称作是【$A_{[n]}$】关于 I_p 轴和 I_q 轴的翻转变换，记作【$B_{[n]}$】=【$A_{[n]}^{\mathrm{I}_p\leftrightarrow\mathrm{I}_q}$】，$1\le p<q\le n$。

定理 6.4 对于【$A_{[n]}$】$=\left(u_1,\cdots,u_p,\cdots,u_q,\cdots,u_{n-1}\right)$，$1\le p<q\le n-1$，有：

若【$B_{[n]}$】=【$A_{[n]}^{\mathrm{I}_p\leftrightarrow\mathrm{I}_q}$】，则【$B_{[n]}$】$=\left(u_1,\cdots,u_q,\cdots,u_p,\cdots,u_{n-1}\right)$；

若【$C_{[n]}$】=【$A_{[n]}^{\mathrm{I}_p\leftrightarrow\mathrm{I}_n}$】$=\left(v_1,\cdots,v_p,\cdots,v_{n-1}\right)$，则 $u_p=v_p$。

以下是 n 维超立方行列式的切片性质，可以与狭义行列式进行类比：

定理 6.5 【$A_{[n]}$】中某个切片的各元素均乘以同一常数 x，得出新的 n 维超立方行列式的值为【$A_{[n]}$】的 x 倍。

定理 6.6 对 $\mathrm{dex}_{[n]m}(A)$、$\mathrm{dex}_{[n]m}(B)$、$\mathrm{dex}_{[n]m}(C)$ 分别垂直于同一方向相同位置的某一切片 A_i、B_i、C_i，若 A_i 上的每个元素均为 B_i 与 C_i 上的对应元素之和，$1\le i\le m$，且垂直于该方向的其他平行切片对应相等，则【$A_{[n]}$】=【$B_{[n]}$】+【$C_{[n]}$】。

定理 6.7 对于【$A_{[n]}$】$=\left(u_1,u_2,\cdots,u_{n-1}\right)$，若交换【$A_{[n]}$】垂直于 I_n 轴的任意两平行切片得到【$B_{[n]}$】，则【$B_{[n]}$】=−【$A_{[n]}$】；当 $1\le p\ne q\le n-1$，若交换【$A_{[n]}$】垂直于 I_p 轴的任意两平行切片得到【$C_{[n]}$】$=\left(v_1,v_2,\cdots,v_{n-1}\right)$，则 $v_p=-u_p$ 且 $v_q=u_q$。

定理 6.8 对于【$A_{[n]}$】$=\left(u_1,u_2,\cdots,u_{n-1}\right)$，若【$A_{[n]}$】垂直于 I_n 轴有两个平行切片相同或对应元素成比例，则【$A_{[n]}$】$=\left(0,\cdots,0\right)$；当 $1\le p\le n-1$ 时，若【$A_{[n]}$】垂直于 I_p 轴有两个平行切片相同或对应元素成比例，则 $u_p=0$。

定理 6.9 在【$A_{[n]}$】$=\left(u_1,u_2,\cdots,u_{n-1}\right)$ 中，$1\le p\le n-1$：

对【$A_{[n]}$】垂直于 I_n 轴的任一切片上各元素分别加上另一个平行切片上对应元素的 x 倍得到【$B_{[n]}$】，则【$B_{[n]}$】=【$A_{[n]}$】；

对【$A_{[n]}$】垂直于 I_p 轴的任一切片上各元素分别加上另一个平行切片上对应元素的 x 倍得到【$C_{[n]}$】$=\left(v_1,v_2,\cdots,v_{n-1}\right)$，则 $v_p=u_p$。

根据定义 6.7、定理 6.2 和定理 6.8，并类比前面的定理 4.5，有：

定理 6.10 在 $\mathrm{dex}_{[n]m}(A)$ 中，$2\le q\le n-1$，$n\ge 3$：

若 $1\le p\ne i_1\le m$，$\sum\limits_{\begin{pmatrix} i_2=1\\ \vdots\\ i_n=1\end{pmatrix}}^{m} a_{p,i_2,\cdots,i_n}M_{i_1,i_2,\cdots,i_n}=\left(u_1,u_2,\cdots,u_{n-1}\right)$，则 $u_1=0$；$\cdots$

若 $1\le p\ne i_q\le m$，$\sum\limits_{\begin{pmatrix} i_1=1\\ \vdots\\ i_{q-1}=1\\ i_{q+1}=1\\ \vdots\\ i_n=1\end{pmatrix}}^{m} a_{i_1,\cdots,i_{q-1},p,i_{q+1},\cdots,i_n}M_{i_1,i_2,\cdots,i_n}=\left(u_1,u_2,\cdots,u_{n-1}\right)$，则 $u_q=0$；$\cdots$

若 $1\le p\ne i_n\le m$，则 $\sum\limits_{\begin{pmatrix} i_1=1\\ \vdots\\ i_{n-1}=1\end{pmatrix}}^{m} a_{i_1,\cdots,i_{n-1},p}M_{i_1,i_2,\cdots,i_n}=\left(0,\cdots,0\right)$。

定理 6.11 对【$A_{[n]}$】$=(u_1,u_2,\cdots,u_{n-1})$，若垂直于 I_n 轴的某一切片与其他平行切片线性相关，则【$A_{[n]}$】$=(0,\cdots,0)$；当 $1\le p\le n-1$ 时，若垂直于 I_p 轴的某一切片与其他平行切片线性相关，则 $u_p=0$

类比定理 4.7 可知，定理 6.11 的成立只是充分条件，并非必要条件。

把前面的定理 4.8 推广至 n 维超立方行列式：

定理 6.12 对 $\mathrm{dex}_{[n]m}(A)$ 垂直于 I_1轴、I_2轴、$\cdots$、I_n 轴的所有切片均作倒序排列重新组成 $\mathrm{dex}_{[n]m}(B)$，即 $\mathrm{dex}_{[n]m}(B)$ 中的所有元素 $b_{i_1,i_2,\cdots,i_n}$ 满足 $b_{i_1,i_2,\cdots,i_n}=a_{m+1-i_1,m+1-i_2,\cdots,m+1-i_n}$，$1\le i_1,i_2,\cdots,i_n\le m$，则 $\mathrm{dex}_{[n]m}(A)=\mathrm{dex}_{[n]m}(B)$。

定义 6.11 在 $\mathrm{dex}_{[n]m}(A)$ 中，$2\le p\le n-1$，$n\ge 4$：

选定 $i_2,\cdots,i_n$，$a_{1,i_2,\cdots,i_n},a_{2,i_2,\cdots,i_n},\cdots,a_{m,i_2,\cdots,i_n}$ 组成与 I_1 轴平行的一个纤维，记作

$$A_{:i_2,\cdots,i_n}=\left(a_{1,i_2,\cdots,i_n},a_{2,i_2,\cdots,i_n},\cdots,a_{m,i_2,\cdots,i_n}\right);\ \cdots$$

选定 $i_1,\cdots,i_{p-1},i_{p+1},\cdots,i_n$，$a_{i_1,\cdots,i_{p-1},1,i_{p+1},\cdots,i_n},a_{i_1,\cdots,i_{p-1},2,i_{p+1},\cdots,i_n},\cdots,a_{i_1,\cdots,i_{p-1},m,i_{p+1},\cdots,i_n}$ 组成与 I_p 轴平行的一个纤维，记作

$$A_{i_1,\cdots,i_{p-1}:i_{p+1},\cdots,i_n}=\left(a_{i_1,\cdots,i_{p-1},1,i_{p+1},\cdots,i_n},a_{i_1,\cdots,i_{p-1},2,i_{p+1},\cdots,i_n},\cdots,a_{i_1,\cdots,i_{p-1},m,i_{p+1},\cdots,i_n}\right)^{p-1(\mathrm{mod}\,n)};\ \cdots$$

选定 $i_1,\cdots,i_{n-1}$，$a_{i_1,\cdots,i_{n-1},1},a_{i_1,\cdots,i_{n-1},2},\cdots,a_{i_1,\cdots,i_{n-1},m}$ 组成与 I_n 轴平行的一个纤维，记作

$$A_{i_1,\cdots,i_{n-1}:}=\left(a_{i_1,\cdots,i_{n-1},1},a_{i_1,\cdots,i_{n-1},2},\cdots,a_{i_1,\cdots,i_{n-1},m}\right)^{n-1(\mathrm{mod}\,n)}。$$

定理 6.13 在 $\mathrm{dex}_{[n]m}(A)=(u_1,u_2,\cdots,u_{n-1})$ 中，$n\ge 3$：

$$\begin{aligned}u_1&=\sum_{\left(\begin{smallmatrix}\sigma(i_2)\in T_m\\ \vdots\\ \sigma(i_{n-1})\in T_m\end{smallmatrix}\right)}\det\left(A_{:i_{2_1},\cdots,i_{n-1_1},1},A_{:i_{2_2},\cdots,i_{n-1_2},2},\cdots,A_{:i_{2_m},\cdots,i_{n-1_m},m}\right)\\&=\sum_{\left(\begin{smallmatrix}\sigma(i_2)\in T_m\\ \vdots\\ \sigma(i_{n-1})\in T_m\end{smallmatrix}\right)}\det\left(A_{1,i_{2_1},\cdots,i_{n-1_1}:},A_{2,i_{2_2},\cdots,i_{n-1_2}:},\cdots,A_{m,i_{2_m},\cdots,i_{n-1_m}:}\right);\ \cdots\end{aligned}$$

当 $n\ge 4$ 时，$2\le p\le n-2$，

$$\begin{aligned}u_p&=\sum_{\left(\begin{smallmatrix}\sigma(i_1)\in T_m\\ \vdots\\ \sigma(i_{p-1})\in T_m\\ \sigma(i_{p+1})\in T_m\\ \vdots\\ \sigma(i_{n-1})\in T_m\end{smallmatrix}\right)}\det\left(A_{i_{1_1},\cdots,i_{p-1_1}:i_{p+1_1},\cdots,i_{n-1_1},1},A_{i_{1_2},\cdots,i_{p-1_2}:i_{p+1_2},\cdots,i_{n-1_2},2},\cdots,A_{i_{1_m},\cdots,i_{p-1_m}:i_{p+1_m},\cdots,i_{n-1_m},m}\right)\\&=\sum_{\left(\begin{smallmatrix}\sigma(i_1)\in T_m\\ \vdots\\ \sigma(i_{p-1})\in T_m\\ \sigma(i_{p+1})\in T_m\\ \vdots\\ \sigma(i_{n-1})\in T_m\end{smallmatrix}\right)}\det\left(A_{i_{1_1},\cdots,i_{p-1_1},1,i_{p+1_1},\cdots,i_{n-1_1}:},A_{i_{1_2},\cdots,i_{p-1_2},2,i_{p+1_2},\cdots,i_{n-1_2}:},\cdots,A_{i_{1_m},\cdots,i_{p-1_m},m,i_{p+1_m},\cdots,i_{n-1_m}:}\right);\ \cdots\end{aligned}$$

$$u_{n-1}=\sum_{\left(\begin{smallmatrix}\sigma(i_1)\in T_m\\ \vdots\\ \sigma(i_{n-2})\in T_m\end{smallmatrix}\right)}\det\left(A_{i_{1_1},\cdots,i_{n-2_1}:1},A_{i_{1_2},\cdots,i_{n-2_2}:2},\cdots,A_{i_{1_m},\cdots,i_{n-2_m}:m}\right)=\sum_{\left(\begin{smallmatrix}\sigma(i_1)\in T_m\\ \vdots\\ \sigma(i_{n-2})\in T_m\end{smallmatrix}\right)}\det\left(A_{i_{1_1},\cdots,i_{n-2_1},1:},A_{i_{1_2},\cdots,i_{n-2_2},2:},\cdots,A_{i_{1_m},\cdots,i_{n-2_m},m:}\right)。$$

即对于 $\mathrm{dex}_{[n]m}(A)=(u_1,u_2,\cdots,u_{n-1})$，$u_1,u_2,\cdots,u_{n-1}$ 分别等于 $(m!)^{n-2}$ 个各异的狭义行列式之和，而这些狭义行列式的各行或各列都为 $\mathrm{dex}_{[n]m}(A)$ 中的纤维，$n\ge 3$。

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51003. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 16 March 2020, publ: 19 March 2020

再根据定理 6.13 并类比前节的定理 5.2 有：

定理 6.14 在 $\mathrm{dex}_{[n]m}(A)=(u_1,u_2,\cdots,u_{n-1})$ 中，$2\le p\le n-1$，$n\ge 3$：

对同垂直于 I_2 轴、$\cdots$、I_n 轴任一方向的任意两平行切片，若这两个切片中所有与 I_1 轴平行的纤维全部相等或对应元素成比例，则 $u_1=0$；$\cdots$

对同垂直于 I_1 轴、$\cdots$、I_{p-1} 轴、I_{p+1} 轴、$\cdots$、I_n 轴任一方向的任意两平行切片，若这两个切片中所有与 I_p 轴平行的纤维全部相等或对应元素成比例，则 $u_p=0$；$\cdots$

对同垂直于 I_1 轴、$\cdots$、I_{n-1} 轴任一方向的任意两平行切片，若这两个切片中所有与 I_n 轴平行的纤维全部相等或对应元素成比例，则 $\mathrm{dex}_{[n]m}(A)=(0,\cdots,0)$。

对前面的定理 5.3、5.6 进行推广：

定理 6.15 在 $\mathrm{dex}_{[n]m}(A)=(u_1,u_2,\cdots,u_{n-1})$ 中，$1\le p\ne q\le n-1$，$n\ge 3$：

对同垂直于 I_p 轴的任意两平行切片，当位于同一切片中所有与 I_n 轴平行的纤维全部相等时，则 $u_q=0$；

对同垂直于 I_n 轴的任意两平行切片，当位于同一切片中所有与 I_p 轴平行的纤维全部相等时，则 $u_q=0$；

对同垂直于 I_p 轴的任意两平行切片，当位于同一切片中所有与 I_q 轴平行的纤维全部相等时，则 $\mathrm{dex}_{[n]m}(A)=(0,\cdots,0)$。

定理 6.16 当 $n\ge 3$，$1\le p\ne q\le n-1$，$1\le j\le m$，有 $\mathrm{dex}_{[n]m}(A)=(u_1,u_2,\cdots,u_{n-1})$，$\det(B)=\det(B_1,B_2,\cdots,B_m)$：

在垂直于 I_p 轴的所有切片中，其第 j 个切片上所有与 I_n 轴平行的纤维全部等于 B_j，则 $u_p=(m!)^{n-2}\det(B)$ 且 $u_q=0$；

在垂直于 I_n 轴的所有切片中，其第 j 个切片上所有与 I_p 轴平行的纤维全部等于 B_j，则 $u_p=(m!)^{n-2}\det(B)$ 且 $u_q=0$。

综合定理 6.8、6.14、6.15，推广前面的定理 5.4：

定理 6.17 对于 $\mathrm{dex}_{[n]m}(A)$ 中的任意两平行切片，若这两个切片中所有平行于其中一个相同方向的纤维全部相等，则 $\mathrm{dex}_{[n]m}(A)=(0,\cdots,0)$。

类比前节的定理 5.5，给出定理 6.15 更强的形式：

定理 6.18 在 $\mathrm{dex}_{[n]m}(A)=(u_1,u_2,\cdots,u_{n-1})$ 中，$1\le p\ne q\le n-1$，$n\ge 3$：

对垂直于 I_p 轴的任意两平行切片，若在同一切片中所有与 I_n 轴平行的纤维全部可比且其纤维比等于另一切片中所有与 I_n 轴平行的对应纤维的纤维比，则 $u_q=0$；

对垂直于 I_n 轴的任意两平行切片，若在同一切片中所有与 I_p 轴平行的纤维全部可比且其纤维比等于另一切片中所有与 I_p 轴平行的对应纤维的纤维比，则 $u_q=0$；

对垂直于 I_p 轴的任意两平行切片，若在同一切片中所有与 I_q 轴平行的纤维全部可比且其纤维比等于另一切片中所有与 I_p 轴平行的对应纤维的纤维比，则 $\mathrm{dex}_{[n]m}(A)=(0,\cdots,0)$。

7. 总结

关于一般域上维数为 m 且阶数为 n 的任意行列式，其性质可用以下满足多重线性和交替性的函数 D 来表述，$n\ge 3$，$1\le p\ne q\le n$，$r=n^{m-2}$：

1) 多重线性：

$$D(A_1,\cdots,bA_p+C,\cdots,A_n)=bD(A_1,\cdots,A_p,\cdots,A_n)+D(A_1,\cdots,C,\cdots,A_n)。\tag{6.5}$$

$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为任意维数的行列式垂直于相同方向的各切片，b 为任意常数，C 为任意与 A_i 具有相同

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51003. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 16 March 2020, publ: 19 March 2020

维数和阶数的切片方阵。

2) 交替性：

$$D\left(A_1,\ldots,A_p,\ldots,A_q,\ldots,A_n\right)=-D\left(A_1,\ldots,A_q,\ldots,A_p,\ldots,A_n\right)。\tag{6.6}$$

对于 m 维超立方行列式，上式的 $A_1,A_2,\ldots,A_n$ 在一般情况下仅为垂直于主方向的各切片；

对于狭义行列式，上式的 $A_1,A_2,\ldots,A_n$ 可以同为狭义行列式的各行或各列。

① 若 $A_p=A_q$，则：

$$D\left(A_1,\ldots,A_p,\ldots,A_q,\ldots,A_n\right)=0。\tag{6.7}$$

对于狭义行列式，(6.7)式的右边为零；

对于 m 维超立方行列式，(6.7)式的右边为零向量。

② 对于 m 维超立方行列式同垂直于任一方向的各切片 $A_1,A_2,\ldots,A_n$，若 A_p 和 A_q 中平行于另一相同方向的纤维全部相等，即 $A_{p1}=A_{p2}=\cdots=A_{pr}=A_{q1}=A_{q2}=\cdots=A_{qr}$，则(6.7)式成立，即定理 5.4 和定理 6.17。

③ 在任意狭义行列式 $\det(A)$ 中，若满足：$a_{p1}:a_{p2}:\cdots:a_{pn}=a_{q1}:a_{q2}:\cdots:a_{qn}$ 或 $a_{1p}:a_{2p}:\cdots:a_{np}=a_{1q}:a_{2q}:\cdots:a_{nq}$，显然(6.7)式成立；

对于 m 维超立方行列式同垂直于任一相同副方向的所有平行切片 $A_1,A_2,\ldots,A_n$，若 A_p 和 A_q 中所有平行于另外一个相同副方向的各个一一对应的纤维满足：$A_{p1}:A_{p2}:\cdots:A_{pr}=A_{q1}:A_{q2}:\cdots:A_{qr}$，则(6.7)式成立，即定理 5.5 和定理 6.18。

④ 综合定理 4.8 和定理 6.12，若使用 $\left|a_{i_1,i_2,\ldots,i_m}\right|$ 表示各元素分别为 $a_{i_1,i_2,\ldots,i_m}$ 的 m 维 n 阶超立方行列式，$1\le i_1,i_2,\ldots,i_m\le n$，则 $\left|a_{i_1,i_2,\ldots,i_m}\right|=\left|a_{n+1-i_1,n+1-i_2,\ldots,n+1-i_m}\right|$；对 n 阶狭义行列式的各行和各列均作倒序排列，则 $\left|a_{i,j}\right|=\left|a_{n+1-i,n+1-j}\right|$ 同样成立，$1\le i,j\le n$。

⑤ 根据(6.5)和(6.7)，定理 6.9 可以描述为，b 为任意常数：

$$D\left(A_1,\ldots,A_p+bA_q,\ldots,A_n\right)=D\left(A_1,\ldots,A_p,\ldots,A_n\right)。\tag{6.8}$$

对于 m 维超立方行列式，上式的 $A_1,A_2,\ldots,A_n$ 在一般情况下仅为垂直于主方向的各切片；

对于狭义行列式，上式的 $A_1,A_2,\ldots,A_n$ 可以同为狭义行列式的各行或各列。

在笔者构造立方行列式的时候，尝试过多种方法都无法构造出垂直于任一方向的平行切片同时满足(6.6)式交替性的立方行列式。笔者考虑过引用张量空间里面的置换符号，但根据置换符号定义，只要某项有两个下标值相同，则该项置换符号为零。若使用置换符号对二阶立方行列式进行拉普拉斯展开，值必为零，如此一来就失去了研究的价值。笔者也尝试过令立方行列式的展开值为一数值而非向量，发现某些项会出现代数符号为零的情形，或者不满足拉普拉斯定理，甚至不满足交替性。故 m 维超立方行列式在 $m\ge 3$ 时，只有主方向的各切片能满足交替性。

本文虽提出了一些前人没提出过的概念及创造了一些新的符号，但鉴于笔者水平有限，本文未能在立方行列式中类比狭义行列式的特征值等作出定义并给出相关性质。本文存在诸多可推广之处(如把第五节中的其余定理推广至 m 维超立方行列式的情形等)，笔者愿与广大数学爱好者进行探讨，期望将来能创造出新的空间体系。

致　谢

由于笔者学术水平有限。如本文最终未能发表，也希望各位尊敬的审稿人能指出本文的不足及错误之处，笔者在此致以真诚的感谢！

参考文献

[1] 王立志.一般矩阵的广义行列式[J].山西大学学报(自然科学版), 1995,18(3):254-258.

[2] 贾政华.Hadamard 乘积矩阵的一些性质[J].工科数学, 1998,14(3):150-154.

[3] 胡云,火博丰.双重求和可交换公式的推广及在组合中的应用[J].青海师范大学学报(自然科学版), 2012,28(3):10-15.

[4] 刘洁玉.逆序数的若干性质及应用[J].吉安师专学报, 1999,20(6):30-34.

[5] 彭雪梅.拉普拉斯(Laplace)定理的简化证明[J].数学通报, 1993,12:37-38.

[6] Lee W.Johnson , R.Dean Riess , Jimmy T.Arnold.Introduction to Linear Algebra[M].北京:机械工业出版社, 2015.4(5): 373-374.

[7] 郝秀梅,姜庆华.线性代数[M].北京:经济科学出版社, 2016.1(3):12-14.

[8] 冯荣权,宋春伟.组合数学[M].北京:北京大学出版社, 2015.8(3):121-123.

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51003. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 16 March 2020, publ: 19 March 2020