

# Proof of Riemann Hypothesis(一)

## —The Way, Method and Main Steps of Proving Riemann Hypothesis(2/3)

Zhicheng Guo, Jun Yang

Beijing institute of Technology, Zhuhai, Zhuhai Guangdong, China

Email: 13833116000@139.com, yj621015@163.com

Received: Jul. 14<sup>th</sup>, 2020, published: Jul. 17<sup>th</sup>, 2020

### Abstract

In view of the problem of zero point theory of periodic polynomials and its abnormal phenomenon near the peak of  $|\zeta|$ , this paper relates the periodic zero point of function  $f$  defined on interval  $[-a, a]$  and its odd order at  $\pm a$  with the new properties of cliffor chain and prime number, which are the author's research results, and makes a reasonable explanation of Riemann's hypothesis by using Godel number, and then completes the proof of Riemann's conjecture. At the same time, 21 basic new theorems, lemmas and corollaries which are closely related to the proof of Riemann conjecture are given. The concrete idea of proof: first, set the formula  $\frac{1}{2}[\zeta(3) - \zeta(-3)]$  of

$\zeta(3) = \frac{2}{7}\pi^2 \log 2 + \frac{16}{7} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \log(\sin x) dx$  and  $\zeta(-3) = \frac{1}{120}$  as "special unit"  $I$  expressed by M-Gonal

number, then decompose the set of all nontrivial zeros into the path combination of "special unit"  $I$ , and then by studying the geometry system of Helmholtz and Clifford, we can get the method of transforming Riemannian analytic extension of  $\zeta$  function into discrete series extension. The main steps are as follows: 1) Transform the integral function  $\int_0^{\infty} J(x) x^{-s-1} dx$  into a series form based on plane stratification, study the two necessary and sufficient conditions that the real integral function has only real zero point, and apply these conditions in the study of Riemann function; 2) Apply the reduction principle of Fermat method to prove the zero point distribution conclusion of the whole periodic function related to the Riemann  $\zeta$  function; 3) Study the 16th problem of Hilbert and hel Mholdz and Clifford's geometric system equivalence problem. Based on the research of the simplest calculation method of the recurrence theory of metamathematics, this paper briefly proves that the 16th problem of Hilbert is equivalent to the finite points where the space finite parallel lines (finite distance) intersect at infinity; 4) The basic principle of proving Riemann conjecture and two key conclusions are given. In fact, many papers that have been published or published in Hans publishing house belong to the preparatory work of proving Riemann's conjecture. In the future, we will continue to give detailed proof or explanation of each of the above items around Riemann conjecture, and finally complete the strict proof of Riemann conjecture.

### Keywords

Zeros of the Riemann Zeta Function, Greedy Algorithm, Planar Configuration, Clifford Chain, Rational Recursion, Binary Parting

# 黎曼猜想的证明(一)

## ——证明黎曼猜想的途径、方法和主要步骤(中)

郭志成, 杨 军

北京理工大学珠海学院, 广东 珠海, 中国

Email: 13833116000@139.com, yj621015@163.com

收稿日期: 2020年7月14日; 发布日期: 2020年7月17日

### 摘 要

针对周期多项式的零点理论问题及其在  $|\zeta|$  峰值附近的异常现象, 将区间  $[-a, a]$  上定义的函数  $f$  的周期零点及其在  $\pm a$  处的奇数阶与作者的研究成果—Clifford链的新性质和素数的新性质联系起来, 并用哥德尔数对黎曼假定作出了合理的解释, 进而完成了黎曼猜想的证明。同时, 论文中也给出了21个与证明黎曼猜想紧密相关的基础性新定理、引理和推论。证明的具体思路: 首先将Euler公式

$\zeta(3) = \frac{2}{7}\pi^2 \log 2 + \frac{16}{7} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \log(\sin x) dx$  和  $\zeta(-3) = \frac{1}{120}$  的算式  $\frac{1}{2}[\zeta(3) - \zeta(-3)]$  设定为用M角数表示的

“特殊单位”I, 然后分解所有非平凡零点的集合为“特殊单位”I的路径组合, 再通过研究Helmholtz和Clifford的几何体系, 就可以得到将  $\zeta$  函数的黎曼解析延拓转化为离散级数延拓的方法。主要步骤:

1) 将积分函数  $\int_0^{\infty} J(x)x^{-s-1} dx$  转化为基于平面分层的级数形式, 研究实整函数只有实零点的两个充要条件, 并在黎曼函数的研究中应用这些条件; 2) 应用费马递降法的降阶原理, 证明与黎曼函数  $\zeta$  有关整周期函数的零点分布结论; 3) 研究希尔伯特第16个问题与Helmholtz和Clifford的几何体系等价问题。通过元数学递归理论的最简计算方法的研究, 扼要证明希尔伯特第16个问题与空间有限条平行直线(有限的间距)相交于无穷远处的有限个点等价的结论; 4) 给出证明黎曼猜想的基本原理以及两个关键结论。实际上, 已经在汉斯出版社发表或发布的多篇论文都属于证明黎曼猜想的的前期准备工作。我们以后将围绕着黎曼猜想陆续给出上述每一项内容的详细证明或说明, 最终完成黎曼猜想的严密证明。

### 关键词

黎曼函数非平凡零点, 贪婪算法, 平面构形, Clifford链, 有理递归, 二元分拆

## 3. 黎曼猜想的平面构形

### 3.1. greedy 序列的素数新性质及其 Clifford 链表示

### 3.2. 椭圆函数的周期

用模形式周期多项式的零点理论研究黎曼猜想是近期的热点[1] [2] [3]。下面我们首先讨论模形式的周期多项式零点的平面表示问题。

令:  $pg = q$ , 文献[8]给出了二元组合恒等式(参看证明过程)

$$\begin{bmatrix} q+\varepsilon \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lfloor \frac{q}{2} \rfloor + \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lfloor \frac{q-1}{2} \rfloor \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lfloor \frac{q}{2} \rfloor + \varepsilon - 1 \\ \varepsilon - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lfloor \frac{q-1}{2} \rfloor + 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} \lfloor \frac{q}{2} \rfloor + \varepsilon - 2 \\ \varepsilon - 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lfloor \frac{q-1}{2} \rfloor + 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} \lfloor \frac{q}{2} \rfloor \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lfloor \frac{q-1}{2} \rfloor + \varepsilon \\ \varepsilon \end{bmatrix}$$

因此，既可以用离散的方法研究 Clifford 链的递增或递减过程。也可以利用莫来微分三角形[10]可以研究关于数组  $(r, s)$  在平面  $C^2$  上的 Clifford 链的更多性质，由此解决“如果  $p$  个相异的凸  $q$  边形确定一个凸  $n$  边形，问  $p \cdot q$  (乘积)最小的情形”的问题。这种问题属于拉姆赛数的计算，必须建立新的代数理论才可以解释清楚；为了直观的表述  $C^2$  上 Clifford 链的“长短”，可以在平面上引入的第二类 Clifford 圆

点的周期。为此，首先讨论轴线过 Clifford 点的周期与组合数  $\binom{\lfloor \frac{q}{2} \rfloor}{1,2}$  和  $\binom{\lfloor \frac{q}{2} \rfloor}{4,5}$  的代数几何意义。

如图 6 所示，除了轴角相同可以导致 Clifford 圆上产生等距点之外，如果从第五条轴线开始，如果添加的轴线周期性穿过非平凡交点，那么在 Clifford 圆上也可以产生等距点(在共圆上收缩为一点)。周期定义为某一条轴线从一个共点平移到相邻的另一个共点，因此半个周期(参见双曲平移群)可以把平面的曲率轴(或双向半径)叠合为一条射线来实现了曲率轴的正则性。前面已经说明了奇偶置换圆点的同调性质，图 6 显示了同调和非平凡 Clifford 圆的退化说的是一回事。

对于周期  $\infty = 1$ ，不妨设有限数  $q \leq 1$ 。拉玛努金从定义(关于圆域中五次方程根  $q^{1/5}$  的)半个周期为连分数形式的函数

$$R(q) = \frac{q^{1/5} \cdot q \cdot q^2 \cdot q^3 \dots}{1 + 1 + 1 + 1 + \dots}, \quad q \leq 1$$

开始，研究了关于椭圆函数的大量问题。特别是，拉玛努金在给哈代的前两封信中，拓展和研究了连分式的更一般(关于五次方程的自由基)形式：

$$R(a, q) = \frac{1 \cdot aq \cdot aq^2 \cdot aq^3 \dots}{1 + 1 + 1 + 1 + \dots}, \quad q \leq 1$$

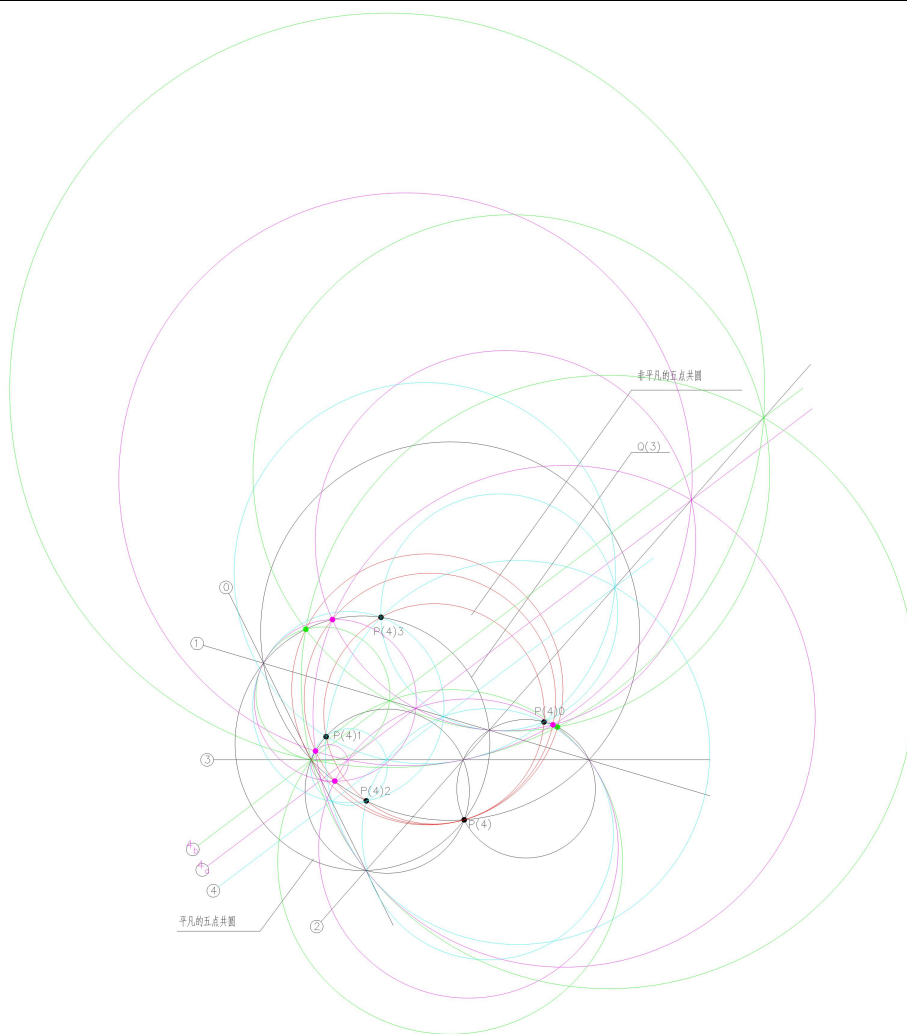
并声称证明了黎曼猜想。

罗斯证明了拉玛努金函数  $R(q)$  可表为高斯多项式的形势如下：

$$R(q) = q^{1/5} \cdot \frac{(q, q^5)_{\infty} \cdot (q^4, q^5)_{\infty}}{(q^2, q^5)_{\infty} \cdot (q^3, q^5)_{\infty}}$$

同时发现了拉玛努金对黎曼猜想的证明有误。尽管后来拉玛努金围绕着黎曼猜想，研究了上述连分式派生出的大量课题，也得到了椭圆函数(但不限于椭圆函数)的许多重要结果[4]。遗憾的是英年早逝，最终也未能给出黎曼猜想的证明。需要说明的是，哈代利用拉马努金的研究思路和方法，证明了几乎所有黎曼(非平凡)零点都在  $Re(s) = \frac{1}{2}$  上的结论，用这种方法的研究至今偶有所见[5]，都属于对组合数

$\binom{\lfloor \frac{q}{2} \rfloor}{1,2}$  和  $\binom{\lfloor \frac{q}{2} \rfloor}{4,5}$  的代数研究。

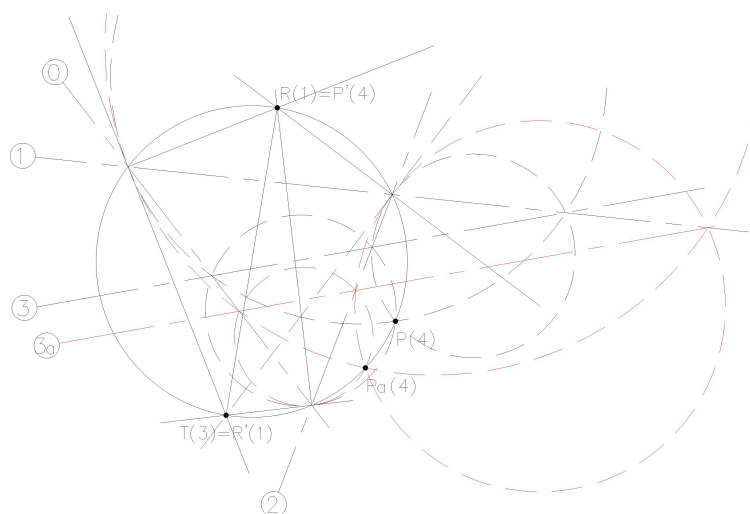


**Figure 6.** Degradation diagram of intersection of three axes  
**图 6.** 三条轴线相交的退化过程示意图

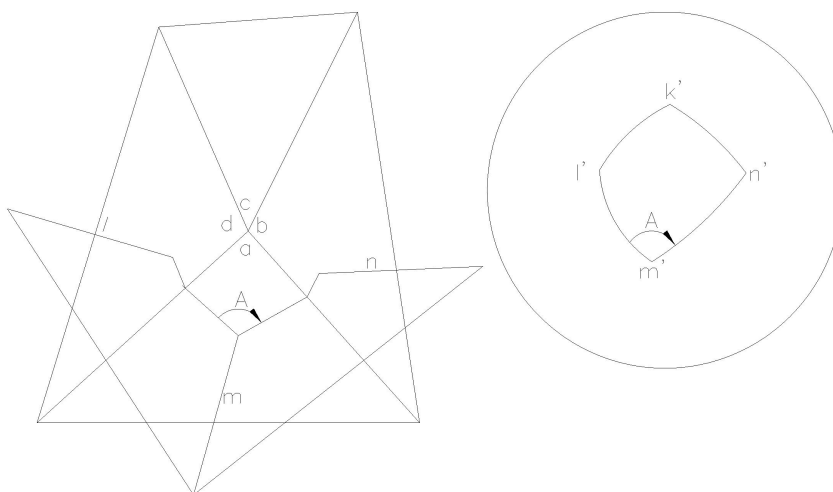
与此相关的，作者发现了与拉玛努金函数  $R(q)$  相关的三个几何(基础性定理 3.4, 3.5, 3.6)性质如下：

**定理 3.4(两类不动点定理):** 如图 7 所示，轴线号 0,1,2 的交点焦点分别为 A,B,C。(i) 当添加的轴线 3 平行移动时；四圆的共点  $P(4)$  无论在三角圆  $Q(3)$  上怎样滑动，它们过三角形顶点的切线相交于三角圆上的点  $T_3$  不动，且这个不动点  $T_3$  的对径点恰是其它三个三角圆  $Q(0,1,3), Q(0,2,3), Q(1,2,3)$  直径的交点  $R_3$ 。(ii) 当添加的轴线 3 不动，轴线 1 平行移动时；动点  $P(4)$  在  $CB$  弧上滑动，过三角形顶点的三角圆切线的交点  $T_3$  仍然保持不动。

由于轴线号可以相互替换，故可以得到四条轴线的四组  $(R,T)$ ，它们在各自圆上的直角顶点相交于一个点(即四圆共点)。类比高斯曲率的定义，定理 3.1 证明了 Clifford 链定理与高斯曲率不随曲面的弯曲而变的性质相当(见图 8 对高斯曲率不变的图解)，由此明确的把 Clifford 链定理拓展成高斯曲率问题。显然，只通过轴线的平移而不改变轴线夹角，也可以使得在 Clifford 圆上产生等距(或重合)的次级 Clifford 点，这个性质与黎曼保角映射等价。



**Figure 7.** The diametral point formed by four diameters and four tangent lines  
**图 7.** 四直径共点与四切线共点形成的对径点



**Figure 8.** Bending diagram of Gauss surface  
**图 8.** 高斯曲面的弯曲示意图

结论(ii)尽管是结论(i)的推论,但是结论(ii)并不是没有意义的。由于两个主共圆的圆心连线(参看图 9)总是平分根轴,因此结论(ii)表示了两种“直径”的表达式(R,T)之和可以进行代换,它属于曲率的拓扑性质。

由此也使得在非平凡共圆(或由最大轴线号的平移产生的共点)和平凡共圆(共点)之间产生了一种由二元数组代换引起的对称,它很好地解释了压缩映射的生成原理[21]。

### 3.3. 黎曼零点的几何表示

通过作图可以发现

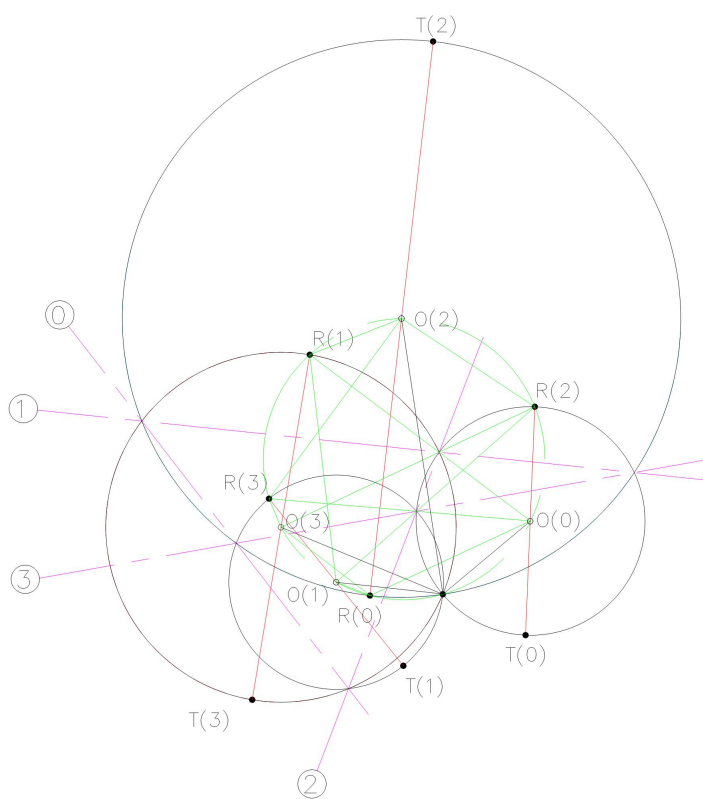
**定理 3.5(圆周上的德沙格构形):** 如图 9, 四条轴线形成的四个三角圆的圆心  $O_3, O_2, O_1, O_0$ , 四个圆的共点  $P(4)$ 和轴线号置换得到的四个不动点的对径点  $R_3, R_2, R_1, R_0$ ; 共九个点  $O_3, O_2, O_1, O_0, P, R_3, R_2, R_1, R_0$  共圆。

由此可知,每一族平行线都可以用圆环上的一段弧长或者弧长所对应的圆周角表示。容易证明,

如果把四条直线相截得到的任意调和四边形设为一个代数变量 $\infty$ ,那么定理 3.5 与三角形的九点圆共轭。由于德沙格构形是正则空间的一种性质(参见布朗香构形),因此平面的无穷大也可以进行代数开方计算 [6]。

**定理 3.6:** 当  $m \geq 1$  时, 过  $2m + 1$  条轴线主共圆上的任意两个点, 有且仅有一个  $2m+1$  级非平凡的 Clifford 圆; 且其中三个  $2m+1$  级 Clifford 圆相交于  $2m$  级 Clifford 点。

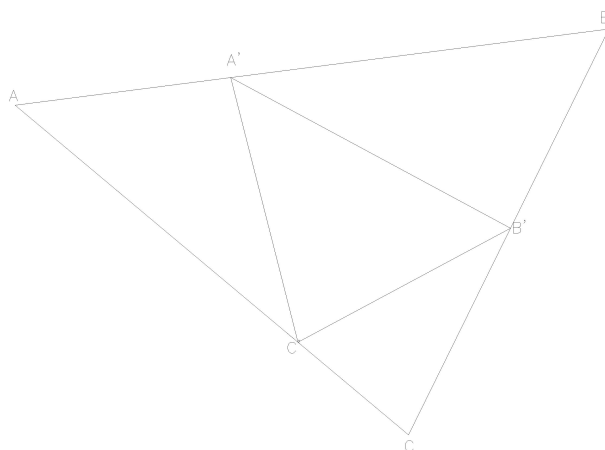
也就是说, 5 轴线 5 级 Clifford 点的数量等于 5 轴线三角圆数量, 7 轴线 7 级 Clifford 点的数量等于 7 轴线三角圆数量(图 4), 9 条轴线 9 级 Clifford 点的数量等于 9 轴线三角圆数量, 等等。这个结论等价于 Euler 给出的: “当  $m \geq 2$  时, (周期)将  $m$  分成若干个奇数之和的分划个数等于将  $m$  分成若干个不相等的数之和的分划个数”。



**Figure 9.** Four axes and nine points in a circle  
**图 9.** 四轴线九点共圆

因此, 可以通过一个主共圆上的任意两个点, 既无重复义无遗漏的寻找到同级的所有的主共圆。例如, 图 5 就是这样由一个主共圆寻找得到的  $n = 7$  的所有主共圆。我们发现并由定理 3.3 证明: 寻找到的主共圆穿过的次级主共点的次数均为三次。这个性质非常重要, 类似于指数上(置换群)的二项式定理。作者就是利用这个性质研究的黎曼非平凡零点的代数连续性质, 它与  $n = 2$  的 Clifford 链定理(主共圆点的同调性质)相关。

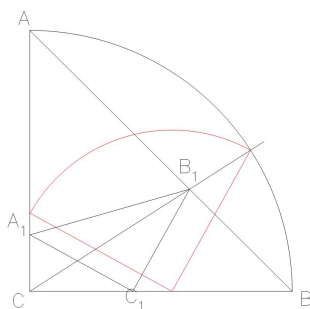
如图 10 所示, 如果三角形  $A_1B_1C_1$  的顶点在另一个三角形  $ABC$  的边上, 且  $\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta ABC$ , 我们称三角形  $A_1B_1C_1$  为位似三角形。



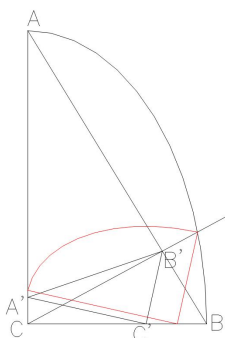
**Figure 10.** Rotation diagram like triangle  
**图 10.** 位似三角形的旋转示意图

**定理 3.7(直角三角形的位似极值定理):** 如图 11 和图 12 所示, 位似直角三角形面积比  $S_{A_1B_1C_1} : S_{ABC}$  的最小值为

$$1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2}}$$



**Figure 11.** Extremum of isosceles like right triangle  
**图 11.** 位似等腰直角三角形的极值



**Figure 12.** Extremum like right triangle  
**图 12.** 位似直角三角形的极值

式中  $a, b$  为直角三角形的两个边长。特别是，当斜边拓展为  $1/4$  椭圆圆弧时，由位似等腰三角形的延长线可以得到  $1/4$  椭圆圆弧的位似极值。

证明：首先利用特殊位置可以找出面积的比值  $S_{A_1B_1C_1} : S_{ABC}$ 。容易发现，由  $AA_1, BB_1, CC_1$  的中点连线得到的三角形和三角形  $ABC$  相似。因此，可以设  $A_1, B_1, C_1$  在三角形  $ABC$  的邻边上滑动而找到面积的比值最小值。计算得到

$$AA_1 : BB_1 : CC_1 = b \sin B \cos B : b \cos B \cot B : b$$

设滑动间隔(或时间)为  $t$ ，那么由余弦定理得到：

$$\begin{aligned} |B_1C_1|^2 &= (a - b \sin B \cos B \cdot t)^2 + (b \cos B \cot B \cdot t)^2 - 2(a - b \sin B \cos B \cdot t)(b \cos B \cot B \cdot t) \cos B \\ &= \left(a - \frac{ab^2}{a^2 + b^2} \cdot t\right)^2 + \left(b \cdot \frac{a}{a^2 + b^2} \cdot \frac{a}{b} \cdot t\right)^2 - 2\left(a - \frac{ab^2}{a^2 + b^2} t\right) \left(b \cdot \frac{a}{a^2 + b^2} \cdot \frac{a}{b} t\right) \cdot \frac{a}{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

化简得

$$|B_1C_1|^2 = a^2 \left[ \left( \frac{1}{1 + \frac{1}{\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2}} \right) t^2 - 2t + 1 \right]$$

相似比  $|B_1C_1| : a$  显然与  $a : b$  无关，求导可知：当

$$t = \frac{1}{1 + \frac{1}{\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2}}$$

时，相似比  $|B_1C_1| : a$  取得极值。如果  $A_1, B_1, C_1$  分别在  $a, b, c$  边上，容易判断出  $S_{A_1B_1C_1} : S_{ABC}$  的(离散)极值不是最小值。由此得到  $S_{A_1B_1C_1} : S_{ABC}$  的最小值为

$$1 - \frac{1}{1 + \frac{1}{\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2}}$$

证毕。

需要说明的是，如果线段  $BC$  不是直线，但只要它能满足某种光滑的条件，相似图形的面积比仍然存在最小值。特别是，当  $a = b$  且  $BC$  为  $1/4$  圆弧(两个方向)时，通过简单计算，求出  $|CA_1| = \frac{a}{5}$ ， $|CC_1| = \frac{6 \cdot a}{5\sqrt{10}}$ ，故存在欧几里德作图法。

**推论：**当  $a = b$  时，利用欧几里德作图法，可以通过直角三角形  $A_1B_1C_1$  的最小值位置而得到扇形面积比的最小值位置。由公式可以求出这种直角三角形的面积最小比值为  $1:5$ 。

类似的，我们可以求出位似等腰三角形的极值公式，并找出  $BC$  为  $1/4$  椭圆弧时最小比值的位置。但是，只有很少一部分等腰三角形的极值点可以用欧几里德作图法做出。由于这种可几何作图的极值点等



价于曲率的指针(参见莫来三分线定理),属于椭圆积分的范畴;因此,极值定理及其推论给出的是一种研究椭圆积分的离散方法。利用这种研究途径,可以建立曲面高斯曲率与曲线斜率的联系,并用于素数定理的代数证明。

顺便说明两点:1) 这种研究方法是拉马努金研究椭圆积分的思想来源。2) 高斯曲率属于分析的范畴,而曲线斜率属于代数的范畴。

由此可知,每一族平行线都可以对应圆上的一段弧长或者弧长所夹的圆周角。容易证明,如果把四条直线相截得到的任意调和四边形设为一个代数变量 $\infty$ ,那么定理 3.2 与三角形的九点圆共轭。与此相关的, Euler 研究了平面上的重心、垂心、外心和九点圆心的关系,证明了

**性质 3.2(Euler 三角形四心共线定理):** 如图 12, 三角形的九点圆圆心、重心、垂心和外接圆心在一条直线上,且三角形的九点圆圆心到重心、重心到垂心、垂心到外接圆心的距离成等比数列。如果不计方向,其比值为 1: 2: 4(参见图 3.1)。或者说,若用字符  $O, G, H, J$  分别表示复平面上任意三角形的九点圆圆心、重心、垂心和外接圆心,那么存在关系式:  $GO:OJ = GJ:JH = -1:3$ 。

我们知道,一般三角形的内心不在四点  $O, G, H, J$  的共线  $L$  上,除非三角形为等腰三角形。由莫来微分定理推出:

**定理 3.8(Euler 四点共线的链定理):** 如图 12 所示,如果任意三角形的的顶点在(复)平面上滑动,使得三角形的三边长度的顺序发生改变;那么三角形的内心从共线  $L$  的一边滑动到另一边。

实际上,若  $P$  和  $P_1$  为三角形  $ABC$  和三角形  $A_1B_1C_1$  的内心,  $O_1, G_1, H_1, J_1$  为三角形  $A_1B_1C_1$  的四心;那么存在的重合点  $H = J_1, J = O_1, G = G_1$ 。且  $OP \parallel O_1P_1, 2OP = O_1P_1$  或  $\triangle POG \sim \triangle P_1O_1G_1$ 。同理,  $HP \parallel H_1P_1, 2HP = H_1P_1$  或  $\triangle PHG \sim \triangle P_1H_1G_1$  等等。特别是,由  $L$  与  $BC$  的交点到  $L$  与  $B_1C_1$  的交点的长度是长度  $PP_1$  的单变量函数,属于(有界的)曲率指针函数。由定理 3.7 和定理 3.8,可以得到

**推论 3.1:**  $m$  条轴线的三角圆穿过  $m-3$  个 Clifford 点,且穿过 Clifford 点  $m-2$  次。

### 3.3. 平面构型与黎曼零点的关系

$OH$  和  $HJ$  通常成为共轭(参见图 5),作者进一步发现了 Euler 三角形四心共线定理的更多共轭性质,也找到了直角三角形的直角边长与轴线微分的共轭关系,这种共轭关系属于德沙格构形。

德沙格构形是正则空间的一种性质,这种正则性质是以曲率性质表现出来的。利用曲率的代数(包括高斯整数)开方计算法则,作者证明了希尔伯特第 16 个问题与空间有限条平行直线相交于无穷远处的有限个点(包括代数变量 $\infty$ )等价的基本结论。但是这个基本结论涉及了分析的算术化问题(它包括戴德金分割,康德尔的无限集合理论等),故欲说清楚这一结论非常困难。为此,暂时不讨论这个问题,而转向研究圆周上德沙格构形的推广。

平面构形是由平面上  $p$  个点  $g$  条直线合成的一个组,组中每一点与相同数目( $\gamma$  条)的直线相结合,且组中的每一直线与相同数目的点( $\pi$  个)相结合。这样的构型用符号  $(p^\gamma g^\pi)$  表示<sup>1</sup>。对于每一个构形,关系式  $p\gamma = g\pi$  总是成立。空间构形通常用单变量有理函数表示四个字符  $p, \gamma, g, \pi$ , 单变量作为空间第三维。构型  $(p^\gamma p^\gamma)$  表示点集合与线集合存在对称关系,简记为  $(p^\gamma)$ 。

德沙格可逆定理是说:给定两个空间三角形的顶点为  $ABC$  和  $A'B'C'$ ,若三组点  $AA', BB', CC'$  的延长线共点,则由三组直线  $AB$  和  $A'B'$ ,  $BC$  和  $B'C'$ ,  $CA$  和  $C'A'$  确定的三个交点共线;若三组平面直线  $AB$  和  $A'B'$ ,  $BC$  和  $B'C'$ ,  $CA$  和  $C'A'$  确定的三个交点共线,则三组点  $AA', BB', CC'$  的延长线共点。

在逆定理中,如果用平面  $\alpha, \beta, \gamma$  和  $\alpha', \beta', \gamma'$  做成的两个三面角代替空间三角形  $ABC$  和  $A'B'C'$ ,那么

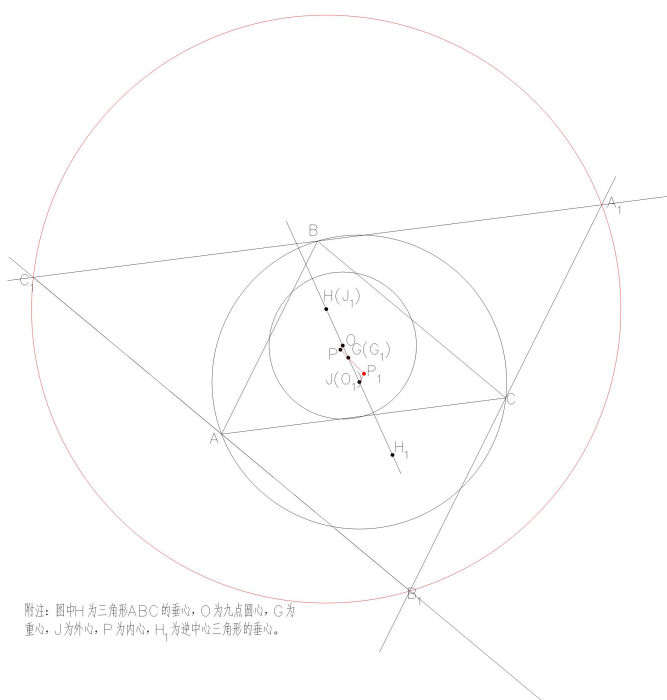
<sup>1</sup>教科书中的构型符号  $(p^\gamma g^\pi)$  通常表示为  $(p, g, \pi)$ 。

由德沙格逆定理导出的构形(10<sup>3</sup>)可以表述为互为内外接的两个五边形。由此证明了德沙格构型是正则的，故退化的德沙格构型也是正则的。

自对偶的正则构型可以表示为：

**性质 3.3:** 如图 14，空间任意两条直线 P,Q 上，分别存在编号为 1,3,10 和 5,6,8 的六个点，使得存在空间 4 交点 2,4,7,9。由于每条线段上均漏掉了一个编号而使得(线段上的四个交点)编号对 mod 10 连续，故此构型可以表为相互内外接于自己的十边形，同时边的编号可以和交点编号互换，因此此构型是正则和自对偶的。

图 15 是线段(3)(8)公垂线为轴的平面投影。也就是说，线段(3)和(8)分别在平行平面 P 和 Q 上。显然，交点 H,R,S,T,G 表示的是异面直线在投影平面上的公共点，可以记为 H = (4,9), R = (5,10), S = (2,7), T = (1,6), G = (3,8)=∞。



附注：图中H为三角形ABC的垂心，O为九点圆心，G为重心，J为外心，P为内心，H<sub>1</sub>为逆中心三角形的垂心。

**Figure 13.** Generalized Euler four point collinear  
**图 13.** 广义的 Euler 四点共线图

需要说明的是，在图 14 的平面上，三点 A,B,C 共线(构型(9<sup>3</sup>)的一种形式)是自然满足的性质，称为没有退化的。而在图 15 的平面上，四交点 H,R,S,T 形成的构型不是自然满足的性质，称为退化的。换句话说，九个点 1,4,2,6,9,7,A,B,C 的构型是没有退化的或者说是连续的，十个点 1,4,2,6,9,7,3,5,8,10 的构型是退化的或者说是离散的。构形(10<sup>3</sup>)共有十种，其中有些不能在实平面上表出，甚至有一些不能在复平面上表出。

我们知道，图 14 的构型可以仅用直尺做出，因此点 H,R,S,T 可以认为是平行平面 P=(3)和 Q=(8)的中值(参见图 15)。作者利用定理 3.1-3.8 证明了

**定理 3.9:** 当图 14 平面上的任意六点(例如图 15 中点 1,4,2 和 6,9,8)可以用定尺作图时，点 H,R,S,T 可以唯一的表为一个整系数四次方程的根。

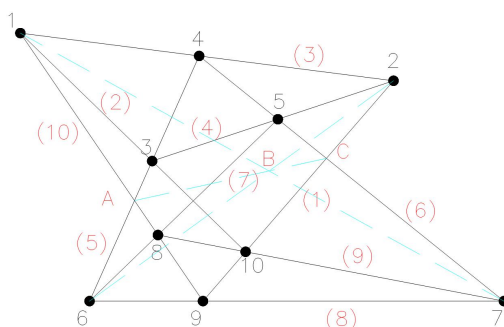


Figure 14. Degenerate self dual configurations (10<sup>3</sup>)

图 14. 退化的自对偶构形(10<sup>3</sup>)

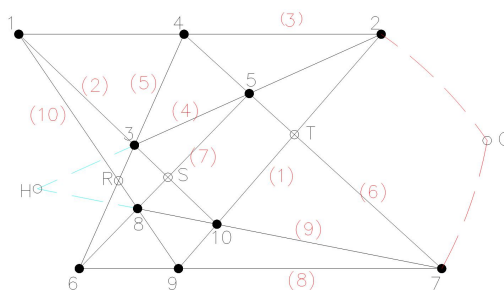


Figure 15. Orthographic projection of self dual configuration (10<sup>3</sup>)

图 15. 自对偶构形(10<sup>3</sup>)的正投影

定理 3.9 意味着在复平面上自对偶构形(10<sup>3</sup>)存在唯一的同余(或差分)乘法表。因此定理 3.9 是对 3 维黎曼流形上可容许度量关系的刻画，其中的四次方程表示的曲线与其所在位置无关。由此可以看出，证明定理 3.9(也是证明 RH 的)将是极其困难的。作者在元数学的递归理论中找到了解决方法，其中涉及到的著名局部贝尔多项式计算难题，作者已经先期解决了。

空间的完全  $n$  点形是指：连接空间处于一般位置的  $n$  个点的直线和平面所组成的图形。由不通过完全  $n$  点形任何顶点的平面截出来的图形是正则的，它们的类型为

$$p = \frac{n(n+1)}{2}, \gamma = n-2, g = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}, \pi = 3$$

由此可知，当  $p = g$  时，即  $n = 5$  的情形。更高维空间里的完全  $n$  点正则构形的性质依赖于定理 3.9 的推论。

根据布朗香定理和巴斯加定理的对偶原理，组合数  $\binom{\lfloor \frac{q}{2} \rfloor}{2,3}$  和  $\binom{\lfloor \frac{q}{2} \rfloor}{4,5}$  可以认为是关于  $q$  变量的两个函

数  $\chi$  和  $\Pi$ ，并且变量  $q$  允许取值  $\infty$ 。对偶定理与指数上的二项式定理的展开无异。由此对偶定理可用于指数二项式的展开计算(参见二元组合恒等式)。

在图 14 中选取不同的公垂线，可以得到不同的平面投影(即图 15 中 G 点在无穷远处的平移)。因此定理 3.9 和 Clifford 链定理非常类似，但是定理 3.9 没有要求轴线两两相交，这是两者的最大区别。很自然的，G 点在无穷远处的每一次平移都可以认为是(无穷远射影)平面平移的一个周期。由此定理 3.9 可以用于将第 5 公设做如下的等价修改(和研究)：过直线外有限个点，至少可以做多少条空间直线与已知直线

垂直,使得由此形成的封闭系统是可以计数的。因此,定理 3.9 可以用于研究比欧氏几何、黎曼几何及罗氏几何更一般的空间平行线相交位置的问题<sup>2</sup>。每一个自对偶构形( $10^3$ )的正投影对应一个黎曼零点。

实际上,高斯提出的第二曲率不随曲面的弯曲而变就是有限条平行线相交位置的性质之一。高斯还将这个几何性质分解和转化成为正多边形的欧式作图法、二次互反律、分圆方程、高斯积分收敛等简单问题,并进行了深入的研究。

没有任何必要限制的所有第一类 Clifford 圆点,一般不能表示在有限的可展曲面上,超出了曲率学说的研究范畴。因此我们只考虑第二类 Clifford 圆点(对应于 Stieltjes 积分)。在局部可展曲面上,高斯发现了曲面的线素  $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$  具有形式  $\sqrt{Edp^2 + Fdp \cdot dq + Gdq^2}$ , 其中  $E, F, G$  为  $p, q$  的函数。由此开启了曲率研究的代数方法,它可以用于代数法研究 Clifford 圆上的 Clifford 点的等距问题。

第二类 Clifford 圆点揭示的是平凡圆点与非平凡圆点之间的联系,而代数法表示第二类 Clifford 圆点的等距性质是证明 RH 的关键,其中 greedy 序列是研究等距问题的数论方法。本文给出的有理递归理论[7]是研究等距的代数方法,也是第二曲率不随曲面的弯曲而变(主共圆的次级 Clifford 点有且仅有 3 个圆相交,参见图 4)的一般性理论。用这个理论可以比较简单给出素数定理的代数证明和黎曼猜想证明。尽管其证明的过程的每一步都是可以数值验证的,但是涉及到每一个数值都需要给出相应的(扩充为 16 个)“哥德尔数”的解释。因此,在进行冗长繁琐的解释之前,首先给出有理递归理论的几个主要结论,其中包括与 RH 等价的递归结论。

## 参考文献

- [1] Brian C J, Farmer D W, Imamoglu Özlem. The Nontrivial Zeros of Period Polynomials of Modular Forms Lie on the Unit Circle[J]. International Mathematics Research Notices(20):20.
- [2] Banakh T, Morayne M, Ralowski R, et al. Topologically invariant  $\zeta$ -ideals on the Hilbert cube[J]. Israel Journal of Mathematics, 2013, 209(2):715-743.
- [3] Paşol Vicenţiu, Popa A A. Modular forms and period polynomials[J]. Proceedings of London Mathematical Society, 2013, 107(4).
- [4] Andrews G E, Berndt B C. Ramanujan's Lost Notebook I-V [J]. 2005.
- [5] Grenié, Loïc, Molteni G. An explicit Chebotarev density theorem under GRH[J]. Journal of Number Theory, 2019.
- [6] Matsumoto K, Eddin S S. An asymptotic formula for the  $2k$ -th power mean value of  $|(L(0/L)(1 + it0, \chi)|$ . Journal of the Mathematical Society of Japan, 2018. Raymond M. Smullyan. Recursion theory for metamathematics[J]. 2013.

<sup>2</sup> 即负恒定曲率测度的有限伪球面空间理论,人们称之为霍姆霍尔兹-克里福德几何。