Research on Paradox and its Related Problems(1)

Weiguo Shen

Distrect Heating, Beijing, China
Email: qygrswg@sina.com

Received: Jul. 6th, 2020, published:Jul. 9th, 2020

Abstract

This paper discusses the expression, definition, cause and solution of paradox. It involves Russell's paradox, liar's paradox, Richard's paradox, Berry's paradox, Greering's paradox, etc., and makes a systematic and thorough analysis of Cantor's diagonal method, diagonal lemma and Godel's theorem, which are closely related to the paradox. The paradox of essential implication is also discussed. At the same time, some comments are also made on the gains and losses of related paradoxical literature.

Keywords

Paradox, Russell's Paradox, the Liar's Paradox, Richard's Paradox, the Barber's Paradox, Berry's Paradox, Greering's Paradox, Definition of Paradox, Godel's Theorem, Cantor Diagonal Method, Diagonal Lemma

悖论及相关问题的研究(一)

沈卫国

区域供热编辑部，北京，中国
Email: qygrswg@sina.com

收稿日期：2020年7月6日；发布日期：2020年7月9日

摘　要

对悖论的表述、定义、成因、解悖等方面进行了深入探讨。涉及罗素悖论、说谎者悖论、理查德悖论、贝里悖论、格瑞林悖论等，并对与悖论密切相关的康托对角线法、对角线引理、哥德尔定理等进行了系统、彻底的分析。对实质蕴涵悖论也进行了讨论。同时，对相关悖论文献的得失也有所评论。

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51017. | CC-BY 4.0 Open Access | rec:6 July 2020, publ: 9 July 2020

关键词

悖论，罗素悖论，说谎者悖论，理查德悖论，理发师悖论，贝里悖论，格瑞林悖论，悖论定义，哥德尔定理，康托对角线法，对角线引理

1. 引言

悖论问题，无论在逻辑上，还是数学上，都是非常重要的，其特殊地位毋庸置疑。本文对悖论相关的问题进行了全面、系统的讨论。其中很多论点具有创新性。

2. 康托定理、理发师悖论、理查德悖论与康托对角线法的对比分析

康托定理：设 X 是一个任意的集合(有限的或无限的)。那么，集合 X 与其全部子集合之集合即其幂集合 2^X 不能有同样的基数。

证明：用反证法。设集合 X 与 2^X 有同样的基数，那么存在 X 与 2^X(X 的幂集合)之间的双射 $f: X \to 2^x$。现在考虑集合 $A:=\{x$ 属于 X(即 x 是 X 的元素，$x \in X$)并且 x 不属于 $f(x)$(即不是 $f(x)$的元素)$\}$。其中 $f(x)$ 是 2^X 的一个元素，从而也就是 X 的一个子集合。显然，A 也是 X 的一个子集合，那么它是 2^X 的一个元素。由于 f 是双射，必定存在 $x \in X$ 使得 $f(x) = A$。于是出现两种情形，$x \in A$ (x 属于 A)或者 x 不属于 A。如果 $x \in A$，那么根据 A 的定义“x 不属于 $f(x)$”，从而 x 不属于 A，发生矛盾。但是如果 x 不属于 A，那么 x 不属于 $f(x)$，那么根据 A 的定义，就有 $x \in X$ (x 属于 A)，也是矛盾。因此无论那种情形，我们都得到矛盾，得证。(参见《陶哲轩实分析》P161，本文略有改动)

特别值得注意的是，陶哲轩在上述康托定理的证明下面，给出了一个“注 8.3.2”：读者应把康托定理的证明与罗素悖论的叙述相比较。关键在于，在 X 与 2^X 之间的双射或许已经危险地接近于“包含自己”的集合 X 的概念。

显然，陶哲轩是意识到这个证明的做法是有些“危险”的，它是有可能掉到人为设定(当然是无意中)的悖论陷阱中的。

对于康托定理与对角线法的等价关系及相关问题，笔者已经有了详尽讨论(《数学基础若干问题的创新性思考》，理论数学，汉斯出版社)。这里再做些补充。

对于 X 是有限集的情况，康托定理无疑是没有问题的。比如 X 是三个元素的集合，那么其子集合有八个，当然不能一一对应。但在无限情况下，则不然。在《陶哲轩实分析》(P161)中，证明实数集合不可数，竟然不用简单、直观的康托对角线法，反而舍近求远、舍简就繁，先证明康托定理，再由康托定理推出实数集合不可数。而且该书竟然根本就没有出现“康托对角线法”这个词条索引。此一反常情况，陶哲轩本应给出说明的：也就是究竟为什么他不采取应用如此广泛，而且被一些人说成是如此重要的一种方法？是他认为这种方法有问题，还是质疑的人太多？抑或不够一般化？无论哪种情况，作者是不是应该有个说明？在此，我们有权利提出，究竟康托定理与康托对角线法，哪个是本源的这样的问题。也就是说，究竟是康托对角线法依赖于康托定理，还是康托定理依赖于康托对角线法？很不幸，事实是后者。尽管笔者已经阐明了康托定理与康托对角线法的等价性(很多人也是这么认定的) (见《数学基础若干问题的创新性思考》，理论数学，汉斯出版社)，但细究起来，如果没有康托对角线法的对可以列出的(也就自然是可数的)所有实数进行“对角线逐位求异”操作得到一个新的实数这一点，康托定理的条件之一的“x 不属于 $f(x)$(即不是 $f(x)$的元素)”中的 x，才可以表示 $x \in X$ 的所有元素。这是由康托对角线法的正

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51017. | CC-BY 4.0 Open Access | rec:6 July 2020, publ: 9 July 2020

确性才能保障的。也就是说，只有康托对角线法的证明成立，才可以允许此条件存在。否则它仅仅是个“为了证明为真”的假设。于是康托定理的反证法，实际就有了两个假设：一个是公开的，即“设集合 X 与 2^X 有同样的基数”，进而“那么存在 X 与 2^X(X 的幂集合)之间的双射 $f: X \to 2^x$”。另一个就是“x 不属于 $f(x)$(即不是 $f(x)$的元素)，对所有 $x \in XA := \neg A$ 均有效”。可见，康托对角线法在逻辑上比康托定理是在先的。也就是说，康托定理的成立的前提条件，是康托对角线法成立、有效、无错。换言之，仅仅由康托定理自身的独立的证明过程，对无限集合而言，康托定理的结论不可能被证明。即该反证法否定的是两个假设的并，它并没有如其所愿或声称的仅仅否定了其中一个假设“集合 X 与 2^X 有同样的基数”。因此陶哲轩用先直接、独立地证明康托定理(不用康托对角线法)，再证明实数不可数的方法不行。它实际上隐含了康托对角线法的结论为其前提了。是个虽然隐蔽、但却典型的循环论证。更何况笔者早就论证了，康托对角线法的结论是错的，它同样需要额外的、同时也是隐含的假设。因此显然，康托定理的证明的条件“x 不属于 $f(x)$(即不是 $f(x)$的元素，这里 $x \in X$，即全部属于 X 的元素)”在康托对角线法的结论被证明前就是一个假设(而不能作为事实被接受，它可能成立，也可能不成立)。显然还有一种可能，即：所有 $x \in X$ 的 x，其实可能包含两个部分 x_1 与 x_2，而函数 f 也包含相对于的两个部分 f_1 与 f_2，其中 $x_1 \in f_1(x_1)$ 而 x_2 则不属于 $f_2(x_2)$，所以此时由后者条件构成的 X 的子集合，虽然不能与任何 x_2 一一对应，但却可以在 $x_1 \in f_1(x_1)$ 所定义的 $f_1(x_1)$中，因此与某 x_1 一一对应，由此，康托定理的证明失效。因此康托定理的独立证明结论(不以康托对角线法的结论为前提)不成立；但如果康托对角线法及其结论是错的，则这个原本的“假设”就是一个直接构成悖论(矛盾)的假设或命题。换言之，在此情况下既然已经假设了“集合 X 与 2^X 有同样的基数”，就不应该再有“考虑集合 $A: = \{x$ 属于 X(即 x 是 X 的元素，$x \in X$)并且 x 不属于 $f(x)$(即不是 $f(x)$的元素)$\}$”的正当性存在。其中 x，包括所有属于 X 的元素。而如果康托对角线法及其结论是对的，则虽然康托定理成立，但其在逻辑上是在康托对角线法之后的。而笔者早就证明了，康托对角线法及其结论事实上是错的，这由图五所示二进制实数的排列法即可看出，在这个表中，是不能应用康托对角线法的，因为此表中的任何二进制实数，每位的两个状态，都在表中完备地列出了，即一个二进制实数与其补数，均在表中被成对列出了。因此陶哲轩的直觉不错，这实际就是一个罗素悖论类的悖论。但不是什么“危险地接近于”，而是“就是”一个不但“包含自己”，而且“否定自己”一个悖论。这里再简单总结一下：如果康托对角线法不错，则康托定理并没有独立地(不使用康托对角线法的情况下)被证明；而如果康托对角线法错，则康托定理就是一个人为构造出的悖论(矛盾)，正如它表观所体现出来的那样。

文兰院士极为精辟地指出了康托定理与理发师悖论的同构性(文兰，悖论的消解，P15)。同时指出后者之所以是个悖论，是因为没有假设“存在这么样的一个理发师”。如果有了，理发师悖论立刻就变成了一个这样的理发师不存在的证明。但我们首先要明确一点，这里证明的，仅仅是“这样的一个理发师”不存在，而没有证明所有的理发师都不存在，也就是世界上根本就没有任何类型的理发师。推及与其同构的康托定理，实际也应该没有证明在所有的对应关系(函数关系，对应规则)下一个集合与其幂集合在无穷意义上不能一一对应，而只是如理发师悖论一样，仅仅证明了按这么一种对应方式，对无穷集合而言，其元素与其幂集合的元素不能一一对应罢了。换言之，康托定理的假设，应该是“如果存在这样的、具体的一种某集合的元素与其幂集合的元素间的一一对应.........”，但必须注意，不存在这样的一种具体的对应使得该集合的元素与其幂集合的元素一一对应，可不就是“永远”不能有其它的对应方式下的这样的对应。起码是没有在康托定理中被证明。因为显然，无论康托定理还是理发师悖论，都要依赖于(以其为前提)一个特殊的条件(假设)。在理发师悖论，是“所有不给自己理发的人”，在康托定理，就是“所

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51017. | CC-BY 4.0 Open Access | rec:6 July 2020, publ: 9 July 2020

有不包括 x 的函数 $f(x)$，后者是以 x 为元素的集合的子集合。显然，这个有些“怪异”、起码是特殊的条件，决定了不存在这样的理发师和不存在这样的“一种”具体的某集合的元素与其幂集合的元素间的一一对应。正如理发师悖论并没有证明不存在任何理发师一样，与其同构的康托定理也同样没有证明不存在不依赖那个特殊的、有些“怪异”的条件下的、在所有的对应方式下都没有集合的元素与其幂集合的元素间的一个一一对应(对无穷集合而言)。此结论推及康托定理的另一个来源(就算没有渊源关系，起码也是同构的)、声称证明了实数不可数的康托对角线法，我们也同样可以认为，原先康托对角线法的那个假设“全部实数可以排成一列”(严格讲，应该是可以在某种次序下排成一列。因为有理数的排成一列，都不是随随便便就可以实现的——见康托经典的对有理数可数的证明)，应该改成“全部实数可以按与表中无穷小数的位数一一对应的这个特殊方式排成一列”。显然，康托对角线法否定了这点。也就是证明了全部实数不可能按此对应方式被列出。但是，显然地，这并不是实数不可数。因为按不可数的定义，是要在任何一种对应方式下都不能排成一列才行(与可数定义相对应：可数，只要有一种对应方式使得某集合的元素与自然数一一对应就行)。因此，康托对角线法并没有如其声称的证明实数不可数。就此，我们不妨反过来看这个问题。康托定理、理发师悖论、康托对角线法所能证明的，与传统所认为的正相反，实际是：如果一个无穷集合的所有元素可以与其幂集合的所有元素在某对应方式下存在一个一一一对应，那么，这个对应方式必然不会是“x 不属于 $f(x)$”这样的对应方式；如果世上还有理发师，他就不会是“只给从不给自己理发”的这样的理发师；如果实数可以和自然数在某对应方式下可以一一对应上，那么，这种对应方式不可能包括“所列实数与其无穷小数的位数分别一一对应”这样的对应方式。这才是它们所真正证明的。而不是相反。

通常认为，康托定理是一个比康托对角线法证明实数集合不可数更一般的定理，它奠定了康托超限数的基础。也就是有一个比一个更大的基数序列：阿列夫 0，阿列夫 1，阿列夫 2，阿列夫 3，..............。但是，当康托定理直接用于“阿列夫 1 < 阿列夫 2”时，阿列夫 1 已经是不可数基数了，我们怎样确保可以用于自然数、有理数这类可数集合的运算、证明、结论等等，同样适用与一个不可数集合？此外，笔者一再强调，康托定理实际是依赖于康托对角线法的，而后者明确是针对或“作用于”一个可数集的，因此，康托定理即使无错，也只能对可数集合成立，也就是充其量也只能证明有一个比可数集合大的集合存在，而更大的集合的存在性，它是证明不了的。就算退一步，康托定理与康托对角线法实际等价(也就是没有笔者揭示的逻辑先后)，这一结论也成立。更何况康托对角线法还是错的。因此，无论从何种角度，康托超限数理论都是有问题的。

至于理查德悖论与康托对角线法的关系问题，则更明显。二者几乎有相同的表述形式，但为什么一个是悖论，一个却是证明？的确值得认真思考。

理查德悖论据说有很多等价形式，但经典形式与康托对角线法几乎同构：它声称那些可以用有限字符定义的实数排成一列，这当然是可数的(因为有限字符的所有排列形式是可数的)，运用与康托对角线法一样的在对角线上的逐位求异操作，我们可以定义一个不在表中的实数，但却是可以用有限字符定义的，从而构成悖论(也就是矛盾)。(详见文兰院士《悖论的消解》，陈波《悖论研究》等)

迄今，笔者并未见到理查德悖论的有说服力的解悖方案。事实上，它也要用到康托对角线法，只不过理查德悖论针对的是明确的一个可数集合，而康托对角线法证明实数不可数针对的是一个假设的可数集合(还不知道究竟是否真的可数)。但是，我们不得不问：如果连一个确定可数的集合，都必然有这个集合之外元素存在的话(理查德悖论的结果，确切地说就是此种依赖于多进制小数下的对角线逐位求异“操作”，实际可以产生不在已经排出的表中的新的实数)，即按此种对应规则下的排法，连一个已经确定是可数实数子集中的元素都不能全部排出，我们究竟凭什么还能去“假设”全部实数可以排成一列？我们

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51017. | CC-BY 4.0 Open Access | rec:6 July 2020, publ: 9 July 2020

是不是因为理查德悖论的存在，就应该在“假设”“全部实数可数进而可以排成一列”之前，先去证明一下这个“假设”是可行的、合理的，也就是区别于理查德悖论中所列出的那个可数实数子集？可一旦如此，必然陷入逻辑循环论证。而如果这个假设不成立，康托对角线法还能够证明全部实数是不可数的吗？即如果假设的不过是排出了一个实数的可数子集，那么即使存在此列之外的实数，也没有证明全部实数不可数。因为同理，理查德悖论也没有由存在列出的可数子集之外的对角元素，就去否定所有有限字符可以定义的实数是不可数的(仍是可数的)。因此，仅仅由于经典理查德悖论的存在，我们就足以否定康托对角线法证明了实数不可数的结论。换个角度看：如果康托对角线法确实证明了实数不可数，那么同样的康托对角线法，理查德悖论也完全可以证明有有限字符定义的实数的全部是不可数的。当然事实是有限字符的排列方式的总数必然是可数的，因此由其定义的实数也必然是可数的，因此结论只能是同样的康托对角线法并未证明实数不可数。这里，我们甚至可以构造一个新的悖论：如果康托对角线法有效(证明了实数不可数)，则康托对角线法无效(没有证明有限字符定义的实数不可数，它不过是个悖论，即理查德悖论)；而如果康托对角线法无效(没有证明有限字符定义的实数不可数，不过是个理查德悖论)，则康托对角线法有效(证明了实数不可数)。如此显然的逻辑论证，这么多年居然未见有人指出。就是笔者本人，也是最近才意识到这里面有问题的。可能的原因，也许是康托由对角线法自认为证明了实数不可数在先(1890 年)，而理查德悖论的提出(1905 年)在后。人们有了固定的成见，就是实数被对角线法已经证明了是不可数的，而理查德悖论中所有有限字符定义的实数当然可数，但同样不可全部列出是因为悖论，一旦解悖，还是可以列出的。但就是没有人从反面思考：既然理查德悖论中的康托对角线法对实数的真子集可以形成悖论，难道康托对角线法对全部实数集合就一定不会形成悖论吗？即使不能肯定其就是悖论，起码也是有悖论的可能的(由于理查德悖论的存在)，但只要有这种可能，康托对角线法就没有把握说自己已经确定无疑地证明了实数不可数，也就是实际并没有证明实数不可数(一个不能确定的证明，不是证明)，因此，它终究还不能不是悖论。理查德悖论的彻底解悖，还是要依赖笔者对康托对角线法的隐含假设的分析：多进制小数下的每位的多值性，致使其所能表达的不同实数与这个位数不能再一一对应，除非这个每位的状态不允许再变动(如此一来，沿对角线的逐位求异不再能够进行下去)。现在清楚了，无论对有限位小数、无限位小数都成立。而且在每位可以取不同状态的前提下，其可数的位数不但不能一一对应于全部实数，其实甚至也不能一一对应于一个已经是可数的实数子集(一如理查德悖论所显示出的)。此隐含假设一旦被揭示，不但康托对角线法证明实数不可数不成立(笔者早就指出了)，就是理查德悖论也立刻解悖(原因找到了)：可以看出，理查德悖论等价于先说某种类型的数都列出了，又说没有全列出(还有此列之外的该类型数，因此直接矛盾，只不过没有直说，而是在一些隐含的条件、假设的掩盖之下形成了悖论而已。康托对角线法证明所谓的“实数不可数”，等于说这个“某类型”，就是“全部实数”——全部实数排成一列了，又说可以有此列之外的实数存在，直接矛盾。即，已经假设(可看作是某种“承诺”)全部列出了，还在允许改动这些已经列出的实数(本不应再动它们了)，以产生不同于它们的新的实数，这种做法应该允许吗？这种做法本身就是矛盾的，它当然会“产生”矛盾。具体说，就是既然已经承诺或曰“假设”了全部实数都已列出于表中了，那么，虽然这些实数都是多进制表示的小数，就不应再变动其每位的数值。比如，在二进制下，如图五所示的表示法。从另一个角度看，如果我们把二进制小数写于一张纸的两面。一面的相同位置，表示另一面的小数的补数。即如果一面的数是 0.110110101110........，则在另一面的相同位置表示其补数 0.001001010001.......，如此，这正、背两面的全部实数才可以看成是完备的。也就是说，每一面都没有列出全部实数，即不完备。但显然既不能就此认为每一面都已经列出了全部二进制实数，也不能因为每一面没有列出全部实数就认为实数不可以全部列出(可数)。

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51017. | CC-BY 4.0 Open Access | rec:6 July 2020, publ: 9 July 2020

笔者多年前曾经对理查德悖论有过考查(沈卫国，论自然科学的若干基本问题，1998 年 9 月，P37)。那时笔者的结论是理查德悖论说明不存在“在序列内同时又在序列外的实数”。这里可以再补充一下：就是这样“不可能存在”的实数是如何产生的呢？是由“沿对角线逐位求异”这个操作得到的。那么，由于这样得到的实数是不可能存在的，因此，“沿对角线逐位求异”这个“操作”在已经作了满足条件的实数“已经排成了一排”的假设后，就不应该再被允许。如果允许，就直接与假设矛盾(当然是个较为隐蔽的矛盾，但毕竟是矛盾)。如此，还能进行康托对角线法吗？如果不能进行，则只能由其才能得到的结论还能得到并成立吗？当然不行。这个结论不仅适用于理查德悖论，也同样适用于与其同构的康托对角线法证明实数不可数情况。明确说，就是康托对角线法不可能证明实数不可数。严格讲，康托对角线法所证明的，就是它是一个悖论，或它本身就是悖论，与理查德悖论一样。当然，前面也说了，这个所谓的悖论，只是习惯说法，或基于原先没有坚实的解悖方案而言的。以现在看(见前文笔者论述)，其就是一个佯谬：明明已经假设全部实数已经按某种函数规律被列出了，却又令其与这些实数小数的位数一一对应，然后通过逐位求异产生有异于原表中已经列出的实数，这个做法就是直接与原假设矛盾的。其“谬”在此。一旦点破，自然就是一个“佯谬”了。

综上所述，理查德悖论，严格说是一个佯谬，不是典型意义的、真正的逻辑悖论。它是由推理中的隐含假设的使用以产生了表外实数和此点未被认识所导致。而这些一旦被澄清，它就成了佯谬，或曰“伪悖论”。

对于理查德悖论的解悖方案，文兰院士认为是前后两个“可定义”含义不同所致(《悖论的消解》)，“一个只依赖于单个十进制小数的信息，另一个则依赖于全体十进制小数的信息”。此种看法笔者认为不妥：因为任何所列出的实数，都有一个必须与其它实数相区别的问题，因此，都本质上要与其它实数进行比较以免重复，这与对角线上通过逐位求异得到的实数是没有本质区别的，只不过它是实实在在有个“操作”过程，而其它实数假设它们已经完成了这一步罢了。此外，特别重要的一点是，理查德悖论的第一个定义，是针对所有可以用有限字符表示的实数的，也就是是它的全集而非子集，因此即使由第二个定义居然又得到了一个全集之外的元素，当然仍旧矛盾，也就是矛盾并没有因为人为认定是两个定义而消除。此外，对康托对角线法所谓的证明实数不可数的情况也是如此：第一个定义是针对实数全集的，也就是所有一个不漏的实数的，如此，由所谓第二个定义得到的那个实数，要么否定了第一个定义(实数全部可以而且已经列出)，要么是一个矛盾。总之，矛盾并没有因为两个定义就消除了。因此，文兰院士的论据难以成立。其次，就算可以据此对理查德悖论解悖(也就是找出其原因)，那么，对类似的康托对角线法证明实数不可数的过程，我们不是也可以认为是前提有两个含义不同的“定义”所致？如此，既然对角线上新产生的那个(通过逐位求异)实数，不是不过也就是其定义不同于其它实数的定义而已，正如理查德悖论那两个定义并不影响全部理查德实数的可数性，那么，康托对角线法证明实数不可数时，由于其不过为两个不同的实数定义所致，因此，不是也应该得出与理查德悖论的对角线法一样的结论，也就是不但理查德数可数，全部实数也可数。因为显然，它们都是运用了康托对角线法得到的结果，理应一致。不能同样的康托对角线法，对全部实数，就算证明了实数不可数而不是悖论。但对理查德数，就没有证明其不可数，而只是认为其是悖论。

总之，本文对理查德悖论(实际是佯谬)的讨论更加揭示出笔者以往对康托对角线法的分析是完全正确的。在理查德悖论的经典描述中，由康托对角线法新产生的那个实数，显然是完全可以用有限字符表示的。而有限字符可以表示的实数，当然是可数的。所以只能证明即使是可数的集合，在多进制下试图使这个可数集合的所有元素去与可以随意改变每一位的状态的前提下，这个集合的全部元素也是排不成一排的。既然如此，只能证明由康托对角线法证明实数不可数的结论是无效的。也就是：既然证明了可数的也排不成“这样的”一排，何以就能证明排不成“这样的”一排的就不可数？换言之，我们也可以认

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51017. | CC-BY 4.0 Open Access | rec:6 July 2020, publ: 9 July 2020

为理查德悖论的经典形式(佯谬)如可解悖，则康托对角线法的证实数不可数的结论就错；反之，后者如无错，则理查德悖论无解。也就是说，既然康托对角线法证明了一个可数的实数排列之外还有实数存在，就据此坚持认为实数不可数了，那么，同样的通过康托对角线法，一个可数的实数子集(可用有限字符表示的实数)的元素排列之外还有实数，我们依据同样理由，不也可以认为它同样也是不可数的吗？为什么没人这么认为？这是因为有限字符的排列种类是可数的，它所能表达的实数同样是可数的。这是事实。既然它不可数不对，那么，康托用同样的对角线法证明整个实数不可数就对吗？这所谓的“整个、全部实数”，是不是就是可以用有限字符定义的实数全部？如不是，是不是要证明？现在这个证明，还能用问题产生根源的康托对角线法吗？也可以以更加简单的角度看这个问题：如果康托对角线法有效，则实数不可数得证。但由同样运用康托对角线法的理查德悖论可知，这会推出一个可数集合(可用有限字符表示的实数集合)又不可数，产生矛盾，构成悖论。因此，既然由康托对角线法推出了矛盾，用反证法，也就否定了全部实数不可数得证的结论。即，全部实数不可数并未得证。事实上，笔者认为有限字符可以表达的实数，就是全部实数。以往认为其不过是全部实数的一个真子集，是认为康托对角线法已经证明了全部实数是不可数的。一个可数集，当然只能是不可数集的子集。而现在由于笔者对理查德悖论的分析，直接证伪了由康托对角线法可以证明全部实数不可数。由此，我们完全有理由相信，所谓的可以由有限字符表示(定义)的实数就是全部实数。这么多年来，罗素悖论、谎者悖论等都有相应的解释，唯独似乎理查德悖论没有一个像样的解释，看来的确不是偶然的。

正如克莱因所说(《古今数学思想》，第四册，P292)：“所有这些悖论的起因，如 Russell 和 Whiehead 指出的，都在于一个要定义的东西是用包含这这个东西在内的一类东西来定义的。这种定义也称为说不清的(impredicative)，特别发生在集合论中。Zermelo 在 1908 年曾指出，一组数的下界的定义，以及分析中其它一些概念的定义，都是这种类型的定义。因此经典分析包含着悖论。

Cantor 关于实数集合不可数的证明(指其对角线法，己注)也用到了这样一个说不清的集合。假定在所有正整数组成的集合与所有实数组成的集合 M 之间有一个一一对应。而每一个实数又对应于一组整数。于是每一个整数 k 都对应有一个集合 $f(k)$，而 $f(k)$或是包含 k 或是不包含 k，命 N 为所有那些使 k 不属于 $f(k)$的 k 所组成的集合。这个集合 N(取某一顺序)为一个实数。因而，按假定的一一对应，就应有一个整数 n 对应于 N。若 n 属于 N，则按 N 的定义，它将不属于 N；若 n 不属于 N，则按 N 的定义，它又应属于 N。集合 N 的定义是说不清的，这是因为要 k 属于 N，必须且只须在 M 中有一个集合 K 使 $K = f(k)$并且 k 不属于 K。这样，在定义 N 时就用到了一些集合的全体 M，它包含着 N 作为元素。这就是说，要定义 N，N 必须已经包含在 M 中。

在无意中陷入了引进说不清的定义的陷阱，这是很容易的。如定义一切包含多于五个元素的类所组成的类，就定义了一个包含它自己的类。同样，一切能用二十五个或更少的字定义出来的集合所组成的类 S，这句话就是以说不清的方式定义了 S。........”

上段引文意思非常明确，克莱因认为，康托对角线法与其它悖论一样，都是有意无意地引入了所谓“说不清的定义”所致。而这个“说不清的定义”，说到底，就是一个也许比较隐蔽的、会引入矛盾的定义。悖论由它而起，这是显然的。陶哲轩也提请读者注意罗素悖论与康托定理证明过程的关联性(参见前文)。而既然有悖论，就又反过来说明该证明或论述过程中必然有“说不清楚”的地方需要进一步去“说清楚”。笔者对康托对角线法的分析，应该毫无疑义地彻底“说清楚”了此事。

文兰院士在《悖论的消解》中，对理查德悖论与康托对角线法证明实数不可数的比较问题也有涉及(该书 P84，注 5.2)。他认为“康托对角线法所证明的是任一十进制小数序列外面都存在十进制小数。换言之，任一十进制小数的序列都不可能穷尽所有实数。也就是说，实数不可数。而理查德悖论只是对一个特定

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51017. | CC-BY 4.0 Open Access | rec:6 July 2020, publ: 9 July 2020

的十进制小数序列，........施行对角线法，构造出外面的一个十进制小数”。(同时他也认为“理查德悖论........不是与康托对角线原理冲突而造成悖论。”)他这里显然没有“说清楚”二者的区别究竟是什么。我们说，理查德悖论说明，一个明明是可数的集合，也可以是在某种前提、假设(通常是隐含的)下排不成一列的。既然如此，是否在该前提或假设下，对“任一”十进制小数序列，是否都有此性质，难道不应该给出证明吗？在证明之前，怎么就说“任一十进制小数的序列都不可能穷尽所有实数，也就是说，实数不可数”呢？难道不存在所有实数像理查德实数一样，尽管在某种情况下列不出全部(如实数与位数的一一对应下的)实数，但全部实数仍旧可数的可能吗？如非说不可能，是不是要先证明？而问题由康托对角线法所引起，那么，这种证明，是不是应该回避康托对角线法？如坚持不回避，这个证明是不是循环论证的逻辑循环？(等于什么也没证)因此，文兰院士的论点，是草率的、禁不起推敲的。

对于那种把理查德悖论(包括哥德尔定理的结论)推到所谓的“元数学”去的做法，不值得理会。元数学上还有元数学，纯粹就是罗素的分支类型论的翻版。这更像是托词，而非解决问题。

总之，一个正常的推理，可能会由于我们忽略(或实际隐藏很深)了某个或某些假设而形成悖论。同时，另一方面，与之对应地：一个悖论，也可能会因为无意中我们在推导中引进了隐蔽的假设(即没有被意识到的)而被认为不是悖论，反而是一个正常的推理(其结果自然也会被认为是正确的)。后者比如所谓的由康托对角线法证明实数不可数甚至所谓的“哥德尔定理”的“证明”。

3. 贝里悖论

贝里悖论：用少于二十个字不可定义的最小的自然数。

但上面这句话是十八个字，却定义了这个自然数。因此矛盾。

很多人都是贝里悖论是理查德悖论的简化(文兰，悖论的消解；陈波，悖论研究)，甚至是“一种深刻和天才的简化”(陈波，悖论的研究)。但笔者有理由认为，贝里悖论与说谎者悖论等是一类的，而理查德悖论，由前文的讨论可以看出，它就是一个佯谬。为什么？理查德悖论明显地依赖于某较为复杂的、多步骤的逻辑推理和隐含的多进制的本质和对角线所要求的一一对应关系等，因此它充满了逻辑陷阱，更容易在推理中出错形成佯谬。说白了就是理查德悖论不是一句话就可以表述的。而贝里悖论显然就一句话。它说的是“用少于二十个字不可定义的最小的自然数”，但此句或恰恰仅用了十八个字，这与谎者悖论、罗素悖论等同构。过去以为贝里悖论与理查德悖论同构且简化了后者，是没有参透二者之区别。具体说就是没有充分理解康托对角线法的操作究竟意味着什么？需要哪些前提条件(隐含着的)？而这些前提条件等价于什么逻辑命题？加进了这些逻辑命题后，康托对角线法的反证法的逻辑结论还能成立吗？因此可以说，贝里悖论与理查德悖论不是一回事。

贝里悖论由于是：如果“用少于二十个字不可定义的最小的自然数”确实存在，那么实际只用十八个字就定义了这个自然数，矛盾。因此这样的自然数不存在。因此必须否定有这样的自然数。如果这就算一种解悖方案，那么也是一种最为简单、粗暴的方案。它就是文兰院士所说的悖论就是“掐头去尾”的反证法，只要补充了这个“头”和“尾”，就算完事大吉，解悖成功。也就是：此句话不是要产生因果性矛盾吗？我以后再不这么说不就完了？不就再无矛盾了？固然如此。这等于是说，一辆车看着好好的，但就是漏油，干脆也不修了，也不探究原因了，扔掉换新的算了。行不行？当然行。好不好？不好！理由无需多说。此类解决问题的方式，算不算解决了问题？严格说当然算(仅就摈除矛盾或不再开漏油车而言)，严格说也不算(就探究矛盾、悖论产生或车漏油的原因而言)。就连提出悖论就是反证法的“掐头去尾”的文兰院士，不也最终提出此悖论产生的原因是不自觉地有前后两个“可定义”吗？如果悖论的定义、本质不过就是反证法的“掐头去尾”，又何苦费心多做解释呢？

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51017. | CC-BY 4.0 Open Access | rec:6 July 2020, publ: 9 July 2020

贝里悖论的真正意义的解悖，也就是说清楚产生悖论的原因，笔者认为应该是：由所谓“用少于二十个字不可定义的最小的自然数”这句话，我们立刻就“心领神会”，这是“有一个用多于二十个字才可以定义的最小的自然数”存在。但这句话没有明确写出来，因为这是“言外之意”，谁都明白理解而省略掉了。但作为严格的逻辑结构，既然第一句有此隐含的意思，就应该把它加进研究。于是，否定(没有)“用少于二十个字不可定义的最小的自然数”，严格讲就应该是否定(没有，$\neg$)“用少于二十个字不可定义的最小的自然数”以及(并且，$\wedge$)“用多于二十个字才可以定义的最小的自然数”。由简单的逻辑运算规则，就得到了“用多于二十个字就可以定义的最小的自然数”和(或，$\vee$)“用少于二十个字就(也)可以定义的最小的自然数”。于是，这同一个自然数实际是可以有两种定义法的，一种多于二十个字，一种少于二十个字，并不矛盾。否定这一点，才会产生矛盾，也就是贝里悖论产生的根源。这里有个基础逻辑问题需要明确一下。说否定“用多于二十个字才可以定义的最小的自然数”，能否是“用多于二十个字不可以定义最小的自然数”？不行。因为否定“用多于二十个字不可以定义最小的自然数”，只能得到“用多于二十个字就可以定义最小的自然数”，只能得到“就可以”，而得不到原先的“才可以”。而同时否定“用多余二十个字不可以定义最小的自然数”，还会得到“用少于二十个字才可以定义最小的自然数”，但否定它后，得不到“原先的用多于二十个字才可以定义最小的自然数”。否定“才”，得不到“才”。“才”是“唯一不二”之意，否定它，得不到另一个“唯一不二”，只能得到“可以”、“能够”。这是基本逻辑关系要求的。

此处再简评一下，文兰院士对贝里悖论的解悖方案。他认为贝里悖论之所以构成悖论，是由于“用少于二十个字不可定义的最小自然数”定义了一个自然数时，使用了同一个“定义”所致(他后来用的是“确定”，实际这无关紧要。“定义”和“确定”实际是同义词，可相互定义的)。并给出了一个“证明”(文兰，悖论的消解，P78)及相应的“定理”，用反证法“证明”了引号内外两个“可定义”的含义不同。笔者认为，他这个证明不能成立，而且也再一次说明反证法的运用上充满了陷阱，要十分的小心。因为很显然，括号内明明写的是“不可定义”，因此如果说括号外还有一个“可定义”，也是用“用少于二十个字不可定义”和“用十八个字(当然少于二十个字)就可定义”的矛盾，也就是括号内的“不可定义”与括号外的“可定义”的矛盾，而绝对不是把两个不同的“可定义”当成同一个的矛盾。退一步说，就算非要说成是两个“可定义”，那也应该是“用少于二十个字不可定义的最小自然数”的等价命题“用多于二十个字才可定义的最小自然数”与“用十八个字(当然少于二十个字)就可定义的同一个自然数”之间的矛盾，换言之，这两个不同的“可定义”才是真正互相矛盾的。它们显然是关于同一个数的不同定义，当然是相互矛盾的不同定义。根本就无法把这两个互相矛盾的“可定义”合成一个。况且，在一般情况下，就算在一个定义下，会产生矛盾，但这并没有证明改成两个定义后矛盾就自动消失了。两个定义二合一，产生矛盾，只意味着一个定义不行，但并没有自动就证明两个定义就没有矛盾了。两个定义还会否产生矛盾，需要单独予以证明。因此，文兰院士的解悖方案是不行的。当然，文兰院士正确地指出了“表面上很不相同的两个定义，实际上可能定义同一个对象”。但贝里悖论并不是把这样的两个无矛盾的定义当成了一个定义所致。恰恰相反，贝里悖论是两个定义直接相互矛盾所致。因此，与这个悖论相对应的反证法否定的，不是“同一个定义”，而是“由这样两个互相矛盾的定义所定义出的数不存在”。也就是不存在“用少于二十个字不可定义的最小自然数”。存在的是其否定命题“用多于二十个字就可定义”和“用少于二十个字(十八个字)也可定义”的同一个数。也就是一个数可以有两个定义。正因为一个数可以有两个定义方法是客观存在，贝里悖论实际是假设(隐含地)了一个数只能有一种定义，所以产生矛盾。有关内容前文笔者已经讨论的很充分了，此处不再赘述。

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51017. | CC-BY 4.0 Open Access | rec:6 July 2020, publ: 9 July 2020

4. 格瑞林悖论

也称格瑞林－纳尔逊悖论。其论为：形容词可分为两类，“自谓的”(自适用的)和“它谓的”(非自适用的)两类。形容词“它谓的”恰描写所有不描写自己的形容词。如形容词“红的”两字如恰恰是红颜色的，则为“自谓的”，否则即为“它谓的”。于是，若形容词“它谓的”描写了自己，则它就是一个描写了自己的形容词，而按照它的定义，它应该不描写自己，矛盾；若它不描写自己，则它是一个不描写自己的形容词，但按照其定义，它又应该描写自己，同样矛盾。因此这是一个悖论。

文兰院士给出的解悖方案是(文兰，悖论的消解，P71)：按照公理集合论的法则，不存在一个形容词恰描写所有不描写自己的形容词。但是，如果“它谓的”(非自谓的，非自适用的)不是一个形容词，则它即是“非形容词的”(反正已经是个“词”了)，而这个“非形容词的”本身，就是一个“形容词”无疑，因此“它谓的”是个形容词，与原设产生矛盾。因此，“它谓的”只能还是个形容词。

从文兰院士的解悖方案，无疑是由他一再强调的反证法得到的，这里我们又一次看到在运用反证法时一定要小心，特别是直接由悖论(文兰院士谓之“掐头去尾”的反证法)确定隐含的、需要否定的那个“假设”(条件)时更是如此。明确说，在给悖论对应的“隐性”反证法“安头”(指还原悖论对应的反证法的隐含假设、前提条件)时，不得不十分小心，而且不得不说，要些“才智”与“见识”，否则得到的那个“尾”(结论，解悖方案)就不会正确。

笔者不得不感慨，最近在接触这个格瑞林悖论后，突然隐隐约约地想起，似乎在笔者 1998 年出版的《论自然科学的若干基本问题》一书中，可能曾论及此悖论。箧底找出此“古书”一看，果不其然。格瑞林悖论的解悖方案赫然在列。大意是(该书 P35~P37，更详细的讨论，请见该书)：既然有形容词“它谓的”推出了矛盾，那它就是“矛盾的”或“会产生矛盾的”，具体说就是“非它谓同时非自谓的”(或“它谓同时自谓的”)，而这些也都是“形容词”。哪怕是“错误的”、“不合理的”形容词。又有谁规定的形容词必须无错、合理的？“错误的”、“不合理的”不也是形容词？更何况形容词里本就有“又正又负”、“不正不负”、“又对又错”、“不对不错”、“又真又假”、“非真非假”、“会产生矛盾”等这样的词存在。对这样的词所对应的客观事物可以不认可，但不能否定这些形容词的存在。因为显然，它们都是存在的。不承认吗？但只要什么人不承认、否定、无视“它”，“它”就已经在那了，存在了。任何人也不可能不承认、否定、无视一个根本也从未存在过的东西。而事实上，“又真又假”、“非真非假”之类的词，早就被学者广泛用于多值逻辑，泛逻辑，否协调逻辑，辩证逻辑中了。之所以以往未见(起码笔者未见)对此悖论的有力的解悖方案，就是无意中想当然地把形容词仅仅分成了“它谓的”和“自谓的”(非它谓的)两类，非它谓即自谓。把它作为事实看待了。产生(推出)矛盾后，自应否定这个前提“形容词只能是非它谓即自谓”，即应该肯定“形容词可以是它谓同时又自谓的”，也就是可以是“自相矛盾的”(它本身就是形容词)，也就是存在着“自相矛盾的形容词”，或描述自相矛盾的形容词(谁说形容词就不能“自相矛盾”了？“自相矛盾的形容词”，形容“自相矛盾”的词，也是形容词)。因此“它谓同时又自谓的”或“非它谓同时又非自谓的”当然也是形容词(对、错不必管。“对的”、“错的”本身也是形容词。甚至“既对且错”也是形容词)。“它谓的”当然就是这种形容词(作为假设之一，结论是由它的“参与”推出的)。如果由假设之一的(明确的)“它谓的”推出矛盾后，就想当然地不允许“它谓”一词出现。但又发现这是个形容词无疑，不让出现就不出现了？况且如不出现，又怎么知道会产生悖论，任何人讨论了它，它不就出现了？所以按此思路，是个死胡同，永远解决不了这个悖论。此时我们就应该自然想到另一个假设也就是作为该悖论推理的前提之一的“它谓必非自谓，二者必居其一”。这个假设(前提)并没有明确地出现在前述悖论的推导中(见前面引述的该悖论的推导过程)，但是在定义或介绍形

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51017. | CC-BY 4.0 Open Access | rec:6 July 2020, publ: 9 July 2020

容词的分类以及相关的“它谓”、“自谓”二词的词义时，显然是确定了的。它们实际“隐性”地参与到了这个悖论的推导之中了。只不过人们认为把形容词仅仅分成这两类是理所应当的、绝无问题的罢了。人们绝没有想到，问题恰恰就出在这里。这里又一次重复了有如康托对角线法证明中所用到的反证法的隐蔽的、很难被察觉的前提、假设所起到的作用。正是这个或这些隐含假设、前提(不自觉地在推理中使用到的)，可以致使反证法运用失败，得出错误的结论。反证法的使用，要小心！与反证法密切相关的悖论的那类解悖方案，要小心！隐蔽一个推理的前提、假设，很容易；找出这些隐蔽的前提、假设，说起来不难，但事实证明不容易。这里的格瑞林悖论推导中的隐含前提一经笔者揭示，就很明确，没有什么难于理解的。但康托对角线法中的隐含前提，笔者二十年前即已披露(沈卫国，论自然科学的若干基本问题)，有关的文章陆续发了数十篇(网上都有)，会议宣讲也有不少次，与人讨论更多，居然识者渺渺。此完全出乎笔者当年所料。笔者原先天真地以为，隐含假设固然不易发现，但一旦发现，应该很容易理解与领悟。但居然很多人连这也做不到。可见这个问题，并不简单。

经常把格瑞林悖论与理发师悖论归于一类。它们在形式上有相似性。但根本的不同是理发师不能“又是理发师又不是理发师”，是就是是，不是就是不是。只能如此。但形容词却可以随意形容或形容任何事物，哪怕是不合理的事物。也就是可以随便“造”。它并不要求非矛盾性。因为显然，“矛盾的”也是形容词。就连前面的那个“又是理发师又不是理发师”，也是形容词，也存在。但作为人的这样的理发师不可能存在。也就是该词形容的那样的人，是没有的。反过来，没有的人，也是要用一个相应的词来形容的、描述的。

现在“收个官”：“既非它谓也非自谓的”这个词本身，是不是也是“既非它谓也非自谓的”？证明：设其本身是“既非它谓也非自谓的”，则其是“自谓的”也就是“非它谓的”；如设其本身不是“既非它谓也非自谓的”，则其是“它谓的”，也就是“非自谓的”矛盾。因此得证该词本身就是“既非它谓也非自谓的”。注意，这里即使“它谓”与“自谓”二词不是逻辑意义的非此即彼，二者也是不同的，也就是满足“它谓”即“非自谓”，“自谓”即“非它谓”。因此前述作为形容词的命题“既非它谓也非自谓的”，在词义上等价于“既它谓也自谓”。

想不到，难倒诸多学人的问题解答，得来全不费功，而且在二十年前。为此悖论笔者究竟花了多少时间，现已泯然无可寻了。不禁笔者想起高斯说的“花了如此多功夫，答案竟然就在眼前”，还有王国维引的“众里寻他千百度，暮然回首，那人却在灯火阑珊处”。不想答案就在脚下，唾手可得，取之真如探囊取物也。

这里不妨讲一些题外话(就算是吧)。文兰院士在其《悖论的消解》(P71)一书中认为，格雷林悖论不合理地发明了形容词“它谓的”，按公理集合论的法则，不存在这样的形容词。这种解悖方案当然不行，原因很简单，“它谓的”这个词早就存在了。不仅存在于它产生之初，也存在于历年人们的讨论文献中，甚至毋庸讳言，也存在于文兰院士的书中，甚至就是他否定该词存在的这段话中。文兰院士当然也许意识到了这点，因此不止一次地强调“这只是就事论事借助公理集合论给出的”解释。他也正确地指出了“形容词被认为是可以随意发明、制造出来，没有什么“不存在”的问题——总是存在的。”既然如此，这不与他上面给出的解悖方案直接矛盾吗？于是文兰院士得出结论“格瑞林悖论给出了一个严重的问题：我们的语言竟然有一种危险的能力，能够轻易后发制人，直接与数学和逻辑学相对抗”。并据此提出要对“语言的基础做一番彻底的检查，需要明确限制语言的这种危险的能力”。并在书末“思考与研究”中，作为需要继续研究的两个问题之一。

笔者也只是在读到上述文字时，才了解到有人把这个问题看得如此严重、重要的。笔者当年，大概也不过是把这个悖论当成一个智力游戏一类的“思维训练”，并没有给以充分的重视。笔者心中其

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51017. | CC-BY 4.0 Open Access | rec:6 July 2020, publ: 9 July 2020

地位远在罗素悖论、谎者悖论之下。当然，现在笔者在这里完全有把握地说，此问题已然解决(二十年前)，文兰院士对所谓“危险”的担心当可消除。形容词还可继续“造出”(何妨大造特造)，而此悖，消之于无形矣。

5. 说谎者悖论及墨子的“言尽悖”

通常认为，最原始的说谎者悖论(包括墨子的“言尽悖”)严格意义上不是悖论，是“半个悖论”，这各文献早有论述(陈波，悖论研究)，即：一个克里特岛人说了一句话“所有的克里特岛人都说谎”。如果此话当真，由于他自己也是克里特岛人即可推出该句话为假(谎话)；如果此句话为假，则并非“所有克里特岛人都说谎”，由此可知有的克里特岛人不说谎，说话人可能属于不说谎的克里特岛人之列，故该句话可能为真。由于只是“可能为真”，不是“肯定为真”，因此不会导致严格意义的悖论，只是一个“半悖论”(通俗点说)。几乎所有古今文献都是这么说的。但最近笔者发现，此说也不尽然。只要把这个表述稍加改动，就可以成其为真正意义的悖论。比如，我们把上面的推导中的“不是真的”、“是假的”等类断语一律改成“不可能是真的”，则仍是“全悖”，也就是真正意义的悖论。这里的“不可能是真的”，正与后面的结论“可能为真”相对应，构成真正意义的矛盾。明确说，这里不过是把“不可能为真”当作“假”；把“可能真”当作“真”而已。即把原先的真、假，变成为可能性的真、假了，这样显然，仍构成了完全意义的悖论。

此处不妨强调两点：第一，由上面的讨论可见，悖论十分的微妙，完全取决于某些词汇的微妙差别；第二，以往悖论问题的讨论几乎全都针对国外(西方)所提悖论，但对我国古已有之的悖论研究、发掘的确十分欠缺。很多学者、文献不是不提，就是不知道。今后的确应该改进。

所谓“强化说谎者悖论”(墨子“言尽悖”改为“此言为悖”，陈波，悖论研究)，也就是如“夲句错”、“我说的这句话是错的”、“这里写的这句话是错的”、“我在说谎”，等等形式下的说谎者悖论，经常被人称为“悖论之冠”、“悖论黑洞”、“悖论之王”等名头，甚至有古希腊学者为此郁郁而终者。依笔者之见，这绝非偶然。事实上，这个悖论的解悖之难，就在人们总想化解此悖论中之矛盾，而恰恰，这个悖论是无解的(起码在某种意义上)，也就是矛盾不可化解，或唯一所能“化解”的，就是终于明确了“这个悖论不过就是个实实在在的矛盾”，而且根本就无法排除这个矛盾而已。我们知道，说谎这悖论最终等价于命题“我说谎，当且仅当我不说谎”，或“夲句错，当且仅当夲句对”，这当然只能是个绝对的矛盾，根本就无法消解。当然有人会问，强化说谎者悖论，算是解悖了吗？如果从矛盾已经存在，无法化解的角度，没有。这个悖论中恰恰矛盾是不可化解、消除的；但是如果从终于明确了此悖论矛盾不可化解的原因的角度看，也可以认为是已经解悖了。这要看怎么理解、定义“解悖”这个名词了。我们说，一般悖论最终都在形式上等价或化归于一个命题或语句 A：当且仅当 $\neg A$。或 $A=\neg A$ 或 $A:=\neg A$，总之就是可以由 A 推出 $\neg A$，由 $\neg A$ 推出 A (当然，作为最为简明的悖论的说谎者悖论，其推导过程是所有悖论中最短、最直截了当的，它几乎就是一步完成的，没有什么中间环节，也不需要除“对”、“错”外更多的概念)。如此，实际上由反证法可知，这个会导致矛盾的命题或语句 A 不能成立或不存在。比如理发师悖论中的理发师，最后得出结论，这样的理发师不可能存在。这也就算“解悖”了(作为解悖方案之一。尽管是表面意义的“解悖”也罢)。因为理发师悖论中一开始就说“有一个理发师云云”，似乎这个理发师真的存在。但这实际上是一个小伎俩、障眼法，理发师的存在，其实是一个隐含假设(还没有证明这样离奇的理发师是否真的有，怎么就肯定了他有了呢？)，此时悖论的表述、推导就是一个反证法，正好证明了这样的理发师不可能真的存在。那么，什么样的理发师可以存在呢？不去满足理发师悖论表述中的那个苛刻条件的理发师可以存在。对与之相似的罗素悖论也是如此，那个别扭的集合不存在就算

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51017. | CC-BY 4.0 Open Access | rec:6 July 2020, publ: 9 July 2020

解悖了。然后用公理形式规定什么样的集合可以存在就行了。但在强化说谎者悖论(及“此言为悖”)这里，这点做不到。这是因为这里的命题或语句，正是直接涉及到判断本身，也就是“对”、“错”；“是”、“非”；“说谎”、“没说谎”；“肯定”、“否定”这样的断语。即：命题或语句，与评判它的断语相互混淆了。这是其它悖论所没有的情况。如果仅仅由于推出了矛盾就得到“夲句错”这个命题或句子不存在，我们可以用一个反证法证明它是错的：如果此句不应该存在，则整个推导正依赖于它的存在，因此它当然应该也事实上是存在的。总之，如果由对推出了错；由错又推出了对，我们是无法否定对、错这些概念本身的。任何判定都是建立在它们基础上的，或曰它们就是判断，不允许它们存在，就是不允许去判断，那是没有这些悖论了，但可以吗？就说“夲句错”，难道以后不允许它出现了吗？做的到吗？或它客观上不存在吗(一如那个理发师)？当然不行，因为这个“夲句错”当然已经客观上存在了。否则我们怎么能讨论于它？此外，说由于由“夲句错”推导出了矛盾，我们可否得到“夲句错”是错的，进而以否定其合理性而排除它而解悖这样的结论？对其它的悖论也可许以，但对说谎者悖论不行。这是因为如果真的“夲句错”是错的，应该排除，那么这就又回到了原先那个悖论推导：由“夲句错”错，我们得到“夲句对”，矛盾。况且既然我们可以由反证法的推理得到“夲句错”为错，那么就事实上就是预先假设了“夲句对”(无论是明确的还是隐含的)，如此，实际又陷入了原先那个悖论推理之中：由“夲句对”推出“夲句错”。还是矛盾。于是我们只能得到结论“这个命题或语句会导致矛盾”，或知道“矛盾不可消除”。这大概就算是唯一的“不是解悖的解悖”方案了。当然，这实际也不奇怪，因为这个悖论是直接针对判断(对、错；是、非，等这样的概念)本身的。由判断的结果，不可能化除判断结果本身，也就是对、错本身。这里甚至可以提出一个最简说谎者悖论：就一个“错”字。显然说其错，则对；说其对，则错。难道我们就此不允许或事实上没有“错”这个字了吗？当然不是，这不是一个合适的解悖方案。况且仿前面做法，我们也可以用反证法证明：如果“错”字不应该存在，那么它借以不应该存在的理由即判断“说其错”就不存在，于是判断无法进行，因此其不应存在的理由不存在了，因此“错”字应该存在。但是，要知道我们在对这个“错”字本身进行对、错性判断时，会产生矛盾。这个我们知道就行了。也就是，对强化说谎者悖论一类的悖论，我们只要知道(当然它既然是悖论，这个是当然的)其由对、错性判断产生悖论，不再去对它们进行这种“无谓的”对、错判断，就算“解悖”了，因为它反正也会导致直接关于、涉及“对”、“错”概念本身的矛盾，也就是说谎者悖论的矛盾是由对其本身进行“对”、“错”判断时所引起的，因此就不能再以其“错”(先前的判段、推理中所使用到的)为结论了。我们最终知道说谎者悖论“夲句错”的结论是其会得到矛盾，具体说就是得到了“错，当且仅当对”或“错并且对”(错$\wedge$对)，“错:= $\neg$错”，“夲句错$\wedge$夲句对”等等，而不仅仅是“错”、“夲句错”。同时我们也看到，再也没有其它明显的或隐含的假设、前提了。我们甚至可以对此点给出一个证明：用反证法。设 A 为“夲句错”推导出悖论的一个隐含的假设(前提)，如果推出了矛盾，则证明不应存在这个 A。也就是没有了 A“夲句错”那个会产生矛盾的悖论性推导就无法进行。但事实却不然，那个著名的推导根本就不依赖于其它任何命题，就是直接假设“对”、“错”如何如何的。因此证明强化说谎者悖论“夲句错”没有任何其它的假设存在。

总之，矛盾可以有很多种，比如“即好又坏”，“即上又下”，“即正又负”等等。这类矛盾的产生说明原命题“错”。但唯独说谎者悖论不行。不能说其“说谎了”或“说错了”或“错”(夲句错)。因其论题内包含“说谎”、“错”这样的断语，所有其产生的矛盾是“错且对”、“说谎又没说谎”等等。可见，强化说谎者悖论及其等价形式是更根本的。

既然反证法与悖论是如此密切相关，甚至几乎就是一回事，那么，此处就对反证法应该更明确地多说几句：文兰院士指出“悖论是反证法的掐头去尾”(文兰，悖论的消解。顺便提一下，文兰院士这里用

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51017. | CC-BY 4.0 Open Access | rec:6 July 2020, publ: 9 July 2020

了“掐头去尾”这样的很接地气的、非数学的形象语言，没有“板起面孔”地用那些“数学官话”，也就是那些艰涩难懂的、其实并不自明的数学、逻辑学符号和“行话”。我说其“不自明”，是因为这些符号其实还是要用自然语言来定义、描述的，也就是需要自然语言给其“赋义”。有人总说，只有用了这些符号，才叫严格。这其实是错的。如果说用了这些数学、逻辑符号可以达到精炼、压缩的目的，倒是真的。实际上，笔者认为这里用“掐头去尾”这个词，最准确、形象、正确不过。为什么？因为它本来就是“掐头去尾”嘛。何必又另找什么“高大上”的逻辑、数学符号或“行话”呢？(其实是僚气十足一些“官话”而已))，这无疑是正确的。但这个“头”究竟是什么，怎么再“安上”，却大有讲究。比如前面的贝里悖论的讨论中，认为悖论的产生是暗中假设了存在两个不同的定义所致的看法(解悖方案)，经笔者在那里的讨论，就是错的。此外，如果在强化说谎者悖论“李句错”情况，如果认为可以有先假设“李句存在”(或允许李句存在)，最后由推出矛盾得到“李句不存在”(或不允许李句存在)就算解悖了也不行。因为李句当然存在，而且始终就存在(其原始形式甚至存在了 2500 年)，怎么能说不存在或武断地“不允许存在”呢？反证法的运用中有可能犯两类错误，一类中的一种，是无意中引进了非常隐蔽的假设，比如笔者早就指出的康托对角线法证明所谓“实数不可数”的反证法的运用。还有一种，就是在反证法的运用中无意中或没有意识到还需要补充假设，如前面对贝里悖论的推导。这两种错误，仅就悖论本身而言，通常是导致悖论产生的原因。另一类，是通常在解决悖论过程中易犯的反证法运用中的错误。这就是提出论题中由反证法没有否定或不该否定的假设。比如前文对贝里悖论的讨论中笔者指出的文兰院士关于“两个定义”本身的假设。也就是否定两个定义，不允许两个定义，并没有算解悖。更经典的例子，是强化说谎者悖论“李句错”的推导中，如果由先假设一个“存在这样的句子”，推导出了矛盾，就声称否定了假设“存在这样的句子”，也就是结论是“不存在这样的句子”，这种解悖方案当然不行，因为这样的句子是客观存在，否定不了。它当然是该悖论存在的前提(之一)，也就是如果根本就不存在这样的句子，当然不会再有这个悖论。但认为解悖方案就是不许或不存在这样的句子，是扩大论题。正如我们说有人就有人间的问题，没人当然没有了(也算一种所谓的“解决”)人间问题。那么是否为了解决人间问题，就“不允许”任何人的存在或说“如果没有人就没有了、也就是解决了人间所有问题”？当然不会有人这么认为。人们说的“解决人间问题”，指的是在大家都活得好好的时候去解决问题、纠纷等等，绝对不是叫大家都去死。现实说这次病毒肆虐，“自然免疫”说之所以大家认为不好或没有解决病毒肆虐的问题，就是其本质是用死(牺牲)部分人的生命来战胜病毒，而病毒肆虐之意，不就是让人去死吗？人都死了，病毒也就没有了，也就无虐可施了。但人们要的解决方案绝对不会是这个。对理发师悖论，我们通常是假设(往往是隐含的)“存在这样的理发师”，通过推导产生矛盾，结论是“不存在这样的理发师”。这也就算是解悖了。也就是如果有此理发师，必然要产生矛盾，使其无法进行正常的“理发操作”。但是，如果我们把“存在这么一个小镇”也当作假设之一，最后推导出矛盾，否定此假设，得到“不存在这样的小镇”，理发师悖论当然也不存在了，也就是解决了。但如果声称这就是对理发师悖论的解悖方案，恐怕无人会轻易同意吧？问题的实质是：固然，没了这个镇子，或“如果”没了这个镇子，理发师悖论自然也不存在了。但是如果镇子还在，或现实就在，或“允许”或“如果”存在这么一个镇子，这个理发师悖论是不是就无法解悖了？如果是，是不是就此点应该给个证明？也就是证明只要有这个镇子，理发师悖论就无解(无法解悖)。能给出这个证明吗？给不出，因为同样地，只要不存在这样的理发师，悖论也就没有了、消除了，也就是解悖了。我们通常的解悖，当然指的是这个结果，而那个小镇，通常是假设总是会存在的，尽管它也是隐含的理发师悖论的假设之一。但由于镇子总在，或假设了总在，所以这个悖论的解悖不能依赖镇子的不存在。也就是很重要的一点是：一旦悖论被解决了，这个镇子是否还可以存在下去？有没有不使镇子不合情理、不合事实地消失的理发师悖论的解悖方案？我们已经知道，

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51017. | CC-BY 4.0 Open Access | rec:6 July 2020, publ: 9 July 2020

结论是当然的。极而言之，如果我们把理发师悖论中的这个小镇扩展成全市、全省、全国、全球，那么，我们还能好意思得到全球都不存在就算是理发师悖论解悖方案吗？为了一个区区理发师的难题，就取消地球及其上的人类吗？尽管如果果真如此，当然不再有这个悖论。还有原始的说谎者悖论，克里特岛的存在，当然是这个悖论存在的前提之一，但不能说如果这个悖论的解悖，唯一地取决于该岛的消失。一是该岛已经是客观存在，你假设它存在，它存在；不假设它存在，它也在那里。第二，可以很容易地把这个悖论的论题扩大，也就是把“克里特岛”全部改成“全世界”，这个悖论依旧成立。也就是如果假设世界存在，则推出矛盾，因此否定这个假设，得出世界不存在或如果世界不存在则这个悖论自消，把这样的结论当作解悖方案，谁会同意？因为世界不会因为有这么个悖论要解决就消失的。这当然是事实。事实是否定不了的。但是，有时如果事实不是很明显(像世界存在那么明显)，则可能得出错误结论，比如如果岛子和镇子很小或仅仅是假设，有人很可能就以没有该岛或该镇为理由认为这个悖论不存在。因为悖论的陈述中涉及此岛此镇，没有了此镇此岛，自然也就没有了这个陈述及此陈述所表达的悖论。但我们要的解悖方案当然不是这个。再比如前面已经讨论了的强化说谎者悖论“本句错”(包括“我在说谎”，“本句是假的”等等)，如果假设本句存在，推出矛盾，就认为本句不存在或“如果”本句不存在就算解悖了，当然与事实不符，就不应被采纳。

笔者之所以在此大张旗鼓地兜圈子讨论这个问题，就是在实际分析无论是反证法还是悖论的解悖方案时，这些恰恰是些很容易犯的错误。只不过也许更其隐蔽。但错误的原因都是与这里一样的。比如在前述贝里悖论、理查德悖论、格瑞林悖论的讨论中都涉及这方面的问题。读者可自行体会。很多人实际上不自觉地经常在提出解悖方案时就是如此操作的。比如罗素这样的大家，都会根据假设“语言不分层”，就会产生悖论进而矛盾，因此把语言分为无限层(类型论)来解决悖论问题。当然，他的系统中不再有悖论(可能，但也有可能只是没有发现罢了)，但即使如此，他证明了他的解决方案是唯一的了吗？(且不论把简单的语言人为分层究竟合理不合理？如何有效地识别哪层是哪层？等等)如果是，是不是要证明这个“是”？证明的了吗？实际上，语言本来就是不分层的，也不应该分层，这是人们使用自然语言的客观要求。不能因为产生了区区悖论就强制要求把语言分成难以区分的无穷层。国内也有学者提出(张铁声)类似看法(只不过颠倒了次序)。如认为悖论之产生是由于把多义词看成了单义词。而这个所谓的“多义”，不是 5 层、100 层，等等，而是无穷层的。这本质上与罗素的类型论一样。只不过罗素是提出这种分层来解决单层语言中的悖论问题，而张铁声是认为悖论中所用到的词本身就是或就得是“多义”的(其实准确说是无穷义)，理解成单义就不对而已。这个思路上，还有什么高大上的、鲜有人理解和涉及的所谓“元数学”、“元逻辑”理论，这种理论的之所以还存在的唯一理由，笔者看来只有一个，就是鲜有真正了解此类理论的人(甚至包括少数此类学者自己)。只一个理由就可否定此类理论的合理性：它们都要求无穷个分层。比如，元数学上，必然还有更“元”的数学，........等等。这实际上等于是开玩笑。

总之，如果孤立地看笔者前面的大段议论，可能有人认为是小题大作或吹毛求疵。但只要一接触具体的对悖论问题和反证法问题的运用即讨论，立刻就会明白此类错误是十分普遍的。不过是挑明之前，的确很难察觉而已。

6. “自相矛盾”的典故与悖论、特别是谎者悖论的关系

《韩非子》“自相矛盾”的典故大家耳熟能详，甚至“矛盾”这个词的出处都是有它而来。但特别令人费解的是，学界对这个如此重要的中国典故居然讨论甚至提到的如此之少！对悖论的讨论，“言必称希腊”，言必称西方。这不仅仅是不应该的问题了，甚至可以说是“不像话”。如果说“谎者悖论”是“悖论之王”的话，那么，“自相矛盾”典故就是“矛盾之源”，这是完全恰如其分的。从以下的分

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51017. | CC-BY 4.0 Open Access | rec:6 July 2020, publ: 9 July 2020

析可以看出，与之有关的“夲句矛盾”如果构成悖论的话，其基本性甚至超过“说谎者悖论”，堪称悖论的“王者之王”。

我们仍旧从说谎者悖论“夲句错”开始讨论。文兰院士在其书中(悖论的消解，P36)等于承认了所谓“句方程”无解就是因为推导中产生了矛盾。实际上本来就应如此。因为所谓的“无解”，无论是代数方程还是悖论还是“句方程”，其定义就是会导出、产生矛盾。而不会是相反，矛盾由“无解”(无论代数方程、悖论还是“句方程”)来定义。可见“矛盾”比“无解”在语言学上的“层级”要高，也就是在概念上更基本。当然，既然定义了，我们就可以略有粗疏地认为二者是等价命题。由此，如果我们把说谎者悖论看成一个反证法结构，那么，它就等于是事先假设了(作为该反证法的假设)一个“夲句不会产生矛盾”，最后推出悖论(矛盾)，得到那个假设的否定，也就是“夲句会产生矛盾”。而我们都知道悖论本身就是一个当且仅当型的矛盾，这等于证明了当且仅当型的(互为因果)矛盾是个或终究还是个矛盾。其实等于什么也没有说。当然，也必须注意，说谎者悖论(强化的)“夲句错”一开始当然没有说它会产生矛盾，这个矛盾是推出来的，也就是因果互推、当且仅当型的矛盾(悖论)。但一旦意识到它是悖论或会产生悖论，也就是它是个矛盾且不可消除，那么，也可以说这就是一个同义定义，这个意义上，也可以说是“等于什么也没说”、说了大实话而已。说谎者悖论的解悖方案(如果说它就是的话)，只能如此，无有其它。因为前文已经讨论过了，说谎者悖论是直接针对其表述“夲句错”中已经有了的一个断语“错”、“对”本身的，因此这个悖论与其它的众多悖论是不一样的。它更基本。称其为“悖论之王”或“悖论之冠”是有其道理的。

此外，如果仅仅把说谎者悖论“夲句错”的解悖方案理解成“无句解”或“无解”，甚至也会产生悖论。因为此时所谓“无解”，就是无法解悖(通常意义下)。因此产生悖论为：该悖论解悖了，按文兰院士说法，就是该悖论“无解”，也就是没有解悖(当然是一般意义下的)；而知道这个了“无解”，也就是一般意义下的无法解悖，也就算是“解悖”了。矛盾或几乎矛盾。这里涉及对谎者悖论而言，解悖的定义或究竟何为解悖。在这里，解悖就是知道无法解悖(通常意义下的)而已。这也就是最好的结果了，因此也就算是解悖了。不得不如此，也只能如此。这是这个悖论的结构所决定的，在前文已经讲的很清楚了。但是，如果在这个悖论的解悖方案中把其解不用“无解”而直接用无解的定义“夲句产生矛盾”，则不会再产生矛盾也就是悖论了：比如说其对，其自然对，当然是“产生了矛盾”；而如说其错，则“夲句产生矛盾”错，即“夲句未产生矛盾”，这又与“夲句产生矛盾”矛盾，仍是矛盾。也可以说是“夲句产生矛盾错”错，也就还是“夲句产生矛盾”对，也就是“夲句产生矛盾”。由此可见，“矛盾”相当于“对又错”、“错，当且仅当对”、“错∧对”、“错:= 对”、“错 = 对”等等。意思是一样的。这里如果细心就当可看出，“矛盾”并不就是“错”，起码并不简单地就是“错”。也就是“错”，并不能绝对地等价于“矛盾”。这从强化说谎者悖论“夲句错”的分析中可以明显地看出来：如果说该句会产生矛盾为“错”的话，则“夲句错”为错，“夲句又对”，终归还是个悖论、矛盾。这意味着什么？在逻辑上，“矛盾”判断比“错、对”判断更基本、更本质。错、对判断可产生矛盾，而矛盾不仅就是错、对判断。矛盾是“错”同时“对”(错∧对，等等)。

«韩非子»“自相矛盾”典故的原始形式，应该仍旧是个悖论：

如果此矛可破所有盾(假设)，则其必刺过所有的盾(推导)。而原说法中又有“有盾矛不可破”，则假设“此矛可破所有盾”错(结论)。矛盾；

如果“此矛可破所有盾错”(假设)，则必有盾矛不可破(推导)。而原说法中又有“有矛可破所有盾”，则“此矛可破所有盾错”错，即“矛可破所有盾对”，仍矛盾。

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51017. | CC-BY 4.0 Open Access | rec:6 July 2020, publ: 9 July 2020

所以“自相矛盾”典故的整个(两句)表述，就形成一个“矛盾”(这也是当然的，此“矛盾”非彼“矛盾”。前者为逻辑的“矛盾”，后者为实物的“矛”和“盾牌”。前者得之于后者，妙！)，而且不是如说谎者悖论“本句错”那样的涉及“自指否”的“对”、“错”断语的命题，因此当然这两句合起来就是错的。

因此，“自相矛盾”的典故如果“浓缩”成一句话，即“本矛破此盾且此盾防此矛”，即“此矛破此盾当且仅当此盾防此矛”。或更直接地(当然等价)“本矛破此盾当且仅当(或“且”)本矛不破此盾”。或“本人之矛、盾均无敌于天下”。则就是一句错话。而不再是悖论。因为它中并没有“本句”如何如何的“自指否”命题。

而“本句产生矛盾”或“本句自相矛盾”。是“自指否”型的命题，而由前述，“产生矛盾”、“自相矛盾”的，一般而言，如果这个矛盾并非谎者悖论“本句错”(自指否)类型的，就是“错的”。因此“本句产生矛盾”等价于“本句错”。因此，该语句仍旧可以成为悖论：

“本句产生矛盾”如对(该人未说谎)，则就是“本句产生矛盾”。而产生矛盾的句子必错，所以“本句产生矛盾”错(该人说谎了)，矛盾；

“本句产生矛盾”如错(该人说谎了)，则“本句不产生矛盾”。不产生矛盾的句子是对的，则“本句产生矛盾”又对了(该人未说谎)，仍矛盾。

但是应该强调，前面已经讨论了，“产生矛盾”，并不绝对等价于“错”。这正是又由于有强化说谎者悖论“本句错”的分析得到的结论。因此，如果前述“本句产生矛盾”或“本句自相矛盾”中的那个“矛盾”如果是强化说谎者悖论“本句错”(自指否)类型的，则其就不能再等价于“本句错”，而是“本句错当且仅当(或“并且”)本句对”或“本句既对又错”，或“本句产生矛盾当且仅当(或“并且”)本句不产生矛盾(或无矛盾)”。此时不能说这样的语句“错”(因其还有条件”当且仅当“对”)，而只能说它还是矛盾。可见，仅就悖论而言，“矛盾”比“对、错”更基本。也就是“既对又错”不是“错”，而是矛盾；但“既矛盾又不矛盾”也不一定就仅仅是“错”的，但却一定还是矛盾的。总之，对、错的判断标准是矛盾与否，而矛盾的判断标准并不是对、错，或并不以对、错为判断标准。不是对了，才是不矛盾；错了，才是矛盾。

特别说明一下。前面的“自指否”，不并是一般意义的“自指”，比如说“我坏”、“我错”、“自己错”等等。这些说法不会导致悖论。只有“本句错”、“我这句话是谎话”等等才会产生悖论。严格讲，这种所谓“自指否”，是指的“本句自否”，即在通常的 $A := \neg A$ 表示中，只有当 A 表示“本句”时，才是说谎者悖论。而如果 A 表示其它命题时，则该式表示其它类型的悖论。它本质上是个矛盾句，特别地在说谎者悖论“本句错”的情况下，它等价于“本句导致(产生)矛盾”。而当 A 表示其它意思时，比如“红色”时，则 $A := \neg A$ 表示“红色: = 非红色”，还是矛盾句，但不是“本句自否”的说谎者悖论了。当然，绝大多数悖论或严格讲悖论的表述并不是直接的矛盾句 $A := \neg A$，但最终都可以推导出这个矛盾。而“本句自否”即 $A := \neg A$ (A 当且仅当 $\neg A$，其中的 A 为“本句”)这样的句子就更为特殊了。此外与“本句自否”型悖论相对应的，还有“双句互否”、甚至“多句互否”型悖论，比如著名的“双卡悖论”及文兰院士发现的“三卡悖论”(文兰，悖论的消解)等。文兰院士把单卡(说谎者悖论)、双卡、三卡等悖论统一由布尔代数(逻辑代数)的公式表示，意思是二者等价。但仔细分别，二者并不等价。前者当然可以用后者表示，但后者由于有“变元”，就可以表示一般型的命题，而不仅仅是自指类命题或互指类命题。

7. 由罗素悖论看集合论悖论及其与理发师悖论及说谎者悖论的渊源关系

与罗素悖论颇有渊源的理发师悖论的解悖，一般认为，无非就是“没有这样的理发师存在”。而强化说谎者悖论(如“本句错”之类)，则是“此话会导致无法消除的矛盾”。仿上，罗素悖论，我们可以说其

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51017. | CC-BY 4.0 Open Access | rec:6 July 2020, publ: 9 July 2020

条件产生矛盾，也可以说不存在这种集合。但如此，显然违反所谓“素朴集合论”的“概括原则”。这时有两个办法，一个是修改集合论，取消一般性的概括原则，产生矛盾的集合定义成一个新的名词“类”；还有一个办法就是仍旧承认概括原则，只不过把矛盾也看成一种条件，也就是矛盾集合也是一种集合类型，对应于不矛盾集合，与类中会产生矛盾的类等价。可见，另起一名为“类”，并不能改变事物的本质。反而违反了康托建立集合论的初衷，把问题复杂化，兼把学生搞糊涂。其实，应该坚持所谓素朴集合论的初衷，任何“一堆东西”甭管什么，哪怕是矛盾，它也构成集合。只要区分矛盾集合与非矛盾集合即可。即不但 $x = \{x|x$ 不属于 $x\}$是个“集合”(当然是矛盾集)，就是 $x=\left\{x\middle|x\wedge\neg x\right\}$ 即 $x = \{x|$当且仅当$\neg x\}$也是集合，只不过是矛盾集而已。

即使理发师悖论中现实不存在的那个“理发师”，但如果按素朴集合论的概括原则“任何条件都可以构成集合”，那么作为概念，“没有这样的理发师”也是个概念，也可以作为概念元素，因此也可以构成集合。也就是在现实世界中不可能存在的那个“理发师”，作为概念元素成为集合当然可以。否则没有它(这样的、作为概念而存在的“理发师”)，我们还能在这里及任何一本集合论书中讨论它吗？因此理发师悖论的解悖，就是这类不存在的理发师，一是意识到它的“另类”存在，二是将其归于“另类”的矛盾集合(类)罢了。

特别地，如果按照“概括原则”，任何概念都可以成集，那么，“潜无穷”也可以作为一个条件成集。也就是存在“潜无穷集合”。因为只要一说、一写“潜无穷”三字，这个概念就存在了，就可以成集。也就是，其元素数目可以无限增加，无尽头，且现在正在增加的集合。比如自然数，一人正在顺序念数，没完，也不可能念完。其人念一生以殁，其子接着念，......。这个，就是潜无穷。实无穷意义的自然数集合，是把无法穷尽的自然数看成一个完整的整体。虽然不可能数完自然数，也不可能有最大的自然数，但把其看成整体(不是一些人往往误解的“完成的整体”，好像不完成就构不成整体，是整体就必须“完成”。完不成的，也是一种“整体”么：完不成的整体。无论把它看成是所有完不成的事物的整体，还是看成这个“整体”完成不了，“整体”都已经出现，也就是概念形成，于是与之对应的事物就已经存在了，起码是作为“概念性事物”存在。数学、逻辑、集合论在最根本的地方，还真是不能不有点哲学！联想到现时一些自诩为搞数学的人，常常不无得意地把自己与哲学撇清关系，言外之意是我是搞实打实的，不是耍嘴皮玩概念的。实际是没见识、不深入)。而潜无穷意义的自然数集合，则是没有也不可能现实完成的，正在“数”着的，不断增加着也就是变动着、不固定的自然数，这个集合的元素是不断增加，永不“封顶”的。

而所谓过去不能有的“全集之集”(全体集合的集合)，自然要包括矛盾集合、实无穷集合与潜无穷集合。当然全集之集本身作为集合之一应该是实无穷集合。因为即是所有集合的集合，也就是所有集合作为其元素都在里面了，没有集外元素存在了。而潜无穷集合本质上就是始终有集外元素存在，尽管这些元素是要加进这个不断增加着元素数量的集合的。当然，这是指的某时刻的全集之集说的，对“时域”也就是古今、未来的所有集合而言，可以视为是潜无穷的。但是，严格地按概括原则，如果把未来的、现在还未出现的事物也作为该集的元素(由概括原则保障)，则这个意义上，全集之集仍可是实无穷集合。二者都可以把自己作为自己的元素。因为矛盾集已经允许存在而且就在这些集合之中了，因此还怕产生矛盾吗？

8. 关于说谎者悖论解悖方案的一些误区

香港著名悖论学者黄展骥先生说，“谎者”悖论：这语句假(P)。假设：P 真，从 P 所说得出 P 假，(根据“归谬论证”)证明 P 假(前论证)。假设：P 假，从 P 所说，得出 P 真，证明 P 真(下面我们指出后论证犯“复合命题”谬误，不能成立)。合前，后两论证，矛盾($\sim P\wedge P$)被证明为真!

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51017. | CC-BY 4.0 Open Access | rec:6 July 2020, publ: 9 July 2020

另一种论证：如果 P 真，则 P 假($P\wedge\sim P$ 等值$\sim P$)；如果 P 假，则 P 真($\sim P\wedge P$ 等值 P)；我们既然承认这两语句为真，等于承认“$\sim P\wedge P$”为真，这很不同于承认(陈述或推论出)矛盾句，这仅是犯矛盾谬误。“矛盾被证”才是挑战“不矛盾律”！

黄展骥先生把此段议论标之以“挑战不矛盾律”。(黄展骥，“说谎者悖论”、“亦此亦彼悖论”的简明消解

———“复合命题”和“矛盾定义”谬误

安徽大学学报(哲学社会科学版)2005 年 3 月第 29 卷第 2 期)

黑格尔也早就有类似论断，认为由说谎者悖论推导、产生的矛盾是“真的”。(杨熙龄，奇异的循环——逻辑悖论探析，P105)

黄展骥先生的论证过程有几个问题：

1) 首先，他“得到”的结论“矛盾为真”，正是由谎者悖论“这语句假”(黄先生的表述)经过“严格的”(起码是形式上看)推导而得到的，因此，其结论“矛盾为真”，就是“这语句假”为真。如此，又会进入悖论的论证之中，形成逻辑循环。因此结论“矛盾为真”并不成立。

2) 就算是“矛盾为真”成立，那么已知在逻辑理论中“矛盾必假”，于是有“矛盾为真$\wedge$矛盾为假”，或“矛盾$\wedge\neg$矛盾”，“矛盾当且仅当不矛盾”。总之，又真又假，仍旧是矛盾。也就是“矛盾为真”仍旧会产生“矛盾”。

3) 矛盾为真不行，那么“矛盾为假”呢？对其它一般情况，当然就是如此。但恰恰对说谎者悖论不行。这个前文已经论述的很透彻了。这是因为这里的矛盾由谎者悖论“这语句假”推导得之，因此，结论假，其前提也假，也就是“这语句假”为假，由此，显然又重新进入该结论由之得到的那个悖论循环。

4) 由上，我们只能由一个假设“本句没有矛盾”或“本句不会产生矛盾”，由反证法，得到结论“本句有矛盾”或“本句会产生矛盾”，或“本句存在矛盾”等，而不能得到“本句产生的矛盾为真”(其真值为“真”)。但可以说是产生了一个“真正的”矛盾。这里的“真”，不是指的“对”、“错”类型的断语，即“矛盾”一词本身的“真值”、“对错”，而只是指的它“真的存在”、“它的存在是真的”之意。“它的存在”与“它本身”显然不是一个概念。由此可见，我们在分析语言中的逻辑关系时，一定要注意、分清一些微妙概念的区别。否则很容易混淆，产生歧义，得到错误的、似是而非的结论。

5) 之所以会有上述情况，笔者前文已经讨论了，这是因为谎者悖论“这语句假”、“本句错”等等，里面已经涉及“真假”、“对错”这样的断语概念了，也就是明确地说，矛盾由它们而起，怎么还能继续在结论中使用它们呢？结论中只能使用比如“存在”(存在一个矛盾、矛盾存在、甚至矛盾真的存在、矛盾存在是真的、说矛盾存在是对的(或“正确的”。注意，这里“对的”、“正确的”是“存在”、具体说就是“矛盾的存在”正确、对，而不是矛盾本身的对错、真假值)等等。

6) 由这个实例(分析黄展骥先生的论述)可知，矛盾是一个比真假、对错更基本的概念。矛盾、不矛盾可以分出真假、对错，真假、对错可以产生矛盾。但矛盾且不矛盾，仍旧是矛盾。而对且错、真且假，就不再是对错、真假的问题了，而只能说是产生了矛盾。

黄展骥先生在该文中还给出了一个谎者悖论的“复合命题解悖方案”：

我们从表面上看不出“这语句假”(P)为矛盾。但是，当解释 P 的含义(或内容)，$\sim P$ 便显露出来。简单说，当把 P 的“自涉加否定”充分表示出来，孤零零的 P(隐蔽的矛盾)便显露出复合的 $P\wedge\sim P$(明显的矛盾)。所以，在(谎者的)后论证，我们假设：当(孤零零的)P 假时，是犯“复合命题”谬误。事实上，我们应该假设：(复合的)“$P\wedge\sim P$”为假，(它等值重言真句“$\sim P\vee P$”)，这样便证明不了 P，后论证不能成立，矛盾不会被证!

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51017. | CC-BY 4.0 Open Access | rec:6 July 2020, publ: 9 July 2020

显然，黄先生把得到的$\sim P$，看成是“解释”的结果。再作为前提，推出非矛盾的“$\sim P\vee P$”。而实际上，前面的那个$\sim P$并不是“解释”的结果，而是推导、也就是证明的结果。或之所以可以这么去“解释”，是证明、推导出来的结果。因此，黄先生以上论述是一个逻辑循环论证。

总之，“这句话假”，真假为一个判断。矛盾为推导出来的，也就是判断隐含地依赖于推导。所以黄先生说“隐蔽地显露出复合的$P\wedge\sim P$”不对，是推导出来的，也就是“证明”出来的。

但是，如果我们继续讨论，把“本句错”或“本句假”改成“本句不存在”，则当此句被写出来后，则已经存在了，“存在”是客观现实，也就是已经存在的是“本句不存在”。这里是才是真正地不依赖与推导的“判断”——现实就在那里，一写出来就已经存在了，否则就不叫“写出来”了。此点无需再推导、判断，这是客观现实。

如果有人没有认识到“由于该句写出来了，就已经客观地存在了”这样事实，则对这个存在与否的问题，仍旧是个判断，而是判断就又有了“对、错”问题，则这个判断又构成了与说谎者悖论一样的悖论。

如果仅仅把“本句不存在”视为判断句，而“此句已经存在”是客观现实或“视为”是客观现实，那么，“本句存在(作为客观现实) $\wedge$本句不存在(作为判断句)”则并不存在矛盾，因为此时二者不是一回事：一个是无需判断的“客观现实”，一个是需要判断才能得出结论的“判断句”。写的更明确些，就是“本句实际已经客观地存在$\wedge$本句被判断为不存在”，矛盾吗？当然不。二者可以共存。也就是无论后面的判断对、错与否，客观的“本句已经存在”(即“本句不存在”这个写出来的句子本身)客观上已经存在“于纸上了，一旦写出来，就已经存在了，是事实了，否定不了了。谁如果否定它的存在，必错(判断错)。即现实中的“本句”(“本句不存在”，作为一个存在)已经客观地存在了，其否定，只能是客观地“没有写”(就当然不存在)这个句子“本句不存在”(更确切地是这几个字)，与如何判断、议论其无关。如果把“本句不存在”看成一个判断结果而非现实，则它有一个现实事实矛盾与否的问题。如果采取这个观点，则又可以说“这个判断与现实状况矛盾”。于是由“$\wedge$”连接的，又可以看作一个矛盾句了。

可见，现实中对词汇的运用，完全取决于词汇的定义。否则很容易产生歧义性。这在语言、逻辑分析、讨论中经常发生，以至于很多人争了半天，都没有搞清争的究竟是什么，各说各话，不会有结果。

显然，黄展骥先生的“复合命题解悖方案”，只适用于前述“$\wedge$”符号两边不矛盾的句子，而此时由于它们并不矛盾，一个是客观的“现实”，一个是“人的判断”，本来就不矛盾，因此实际上根本就无需解悖。在此种情况下，黄先生又实际多此一举了。

9. 从说谎者悖论及其略加改动后的形式看哥德尔定理

对于哥德尔定理，笔者在系列论文中已经进行了讨论。特别论及(沈卫国，数学基础若干问题的创新性思考，理论数学，汉斯出版社)哥德尔定理实际就是一个类似说谎者悖论一样的悖论(矛盾)，而且这也是哥德尔实际上首先就得到的。只是由于他为了系统的协调性(即非矛盾性，且当时在公理系统中并没有发现其它矛盾，如果承认系统会产生矛盾，似乎很不好办)，而也许是不得不认为(注意，绝对不是证明)公理系统是协调的、没有矛盾的。而这仅仅是个假设(这里必须要强调此点。尽管当时也许看起来是个没有什么问题的假设也罢)。因此在这个假设、前提下(似乎基本被人忽视或很少有人提，就好像这个系统就应该是理所当然无矛盾的一样)。哥德尔得到在这个系统内存在不可判定的命题，也就是系统协调，但不完备。显然我们应该特别注意(以往居然为很多论者所忽略不提)，哥德尔定理并没有证明现有形式系统是无矛盾的，而仅仅是把其作为假设，也就是整个推理的出发点。换言之，如果现有形式系统一旦是不协调的、有矛盾的，哥德尔以下的推导全错(起码是无法进行了)。因为推导的假设没有了，不存在了。因此，很明确但又被很多人所忽视的是：哥德尔定理绝对没有像很多人描述的那样是证明了“现有形式系统是

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51017. | CC-BY 4.0 Open Access | rec:6 July 2020, publ: 9 July 2020

无矛盾但不完备的”，而是往最好的方面说，也仅仅是证明了“假设现有形式系统是无矛盾的，那么，它是不完备的”。更不用说这个不完备的证明本身，还存在许多牵强附会说辞，由此引起整个理论变得很不明快，总给人一种不踏实的感觉。比如笔者在上述文献中还证明或指出了哥德尔的论证还存在问题，也就是这个不可判定本身，由于必须的无穷步而本身就是无法判定的，也就是不可判定必须无穷步才可确定是不可判定的，而这当然是无法实现的。笔者在上述文献中提出，既然哥德尔命题就是一个悖论或可以导致矛盾(不仅在表述形式上，而且在实质上与说谎者悖论同构)。只不过笔者当时认为，是悖论，就可以解悖，以消除这个悖论。但如何消除，当时由于笔者还没有深入研究而没有继续展开。而一旦有了笔者在此文中对强化说谎者悖论“夲句错”详尽分析，这个问题的答案几乎唾手可得。

同时我们必须清楚，那个著名的哥德尔语句“夲句不可证”，实际上并不是直接证明出来的，而是人为地构造出来的。就像系统中的任何悖论一样。有悖论，不见得就是系统本身的错。系统中出现悖论，这个悖论如果是从系统公理推导出来的，当然说明系统不协调、有矛盾。但如果仅仅是人为构造的一个矛盾、悖论，也不就是公理系统本身有问题。首先应该考虑的，是这个具体的悖论是如何产生的，有没有人为地引进什么未被察觉的假设等等。否则我们还追求悖论的消解干什么？因此，哥德尔定理如果就是系统中的一个悖论，也撼动不了系统本身的协调性。此点，以往居然会被无视。

哥德尔定理的大致推导为：假设哥德尔命题“本命题不可证(非定理)”为假，则可推出其为真，矛盾；但如果假设其为真，则不一定非为假(否则就是悖论)，而是“不可证(非定理)”，即此命题在系统内看出为“真”，或假设为“真”但却是在系统内不可证明的，也就是不是系统的定理。但是，显然，没有前面的该命题为“真”的假设，如何可以导出它不可证，进而又由于其反命题也不可证而导致该命题系统内不可判定的？反之，如果这个命题不可证及不可判定(在系统内)，我们又是如何“真”知道此点或知道此点确实为“真”的？这不是一个大名鼎鼎的定理也就是哥德尔定理的结果吗？怎么这个被这个定理证明的哥德尔命题及其反命题却是系统内的非定理(不可证)进而不可判定了？特别地，被以往所有人(包括哥德尔本人)所未察的是，即使就判词“不可证”(而非判词“假”)而言，仍旧可以形成系统内的悖论。推导如下：由假设哥德尔命题为真(及系统无矛盾)，推出哥德尔命题不可证(不是系统的定理)。但这个哥德尔命题本身说的就是“本命题不可证”。于是当然可以假设“本命题不可证”，本命题说的就是“本命题不可证”，因此当然是对的、真的，而且这个“对”、“真”，显然是证明出来的，于是是系统内的定理，于是就是“可证的”。于是我们由“夲命题不可证”，就得到了“本命题可证”。仍旧是悖论。只不过把原先的“真、假悖论”，转换成了“可证、不可证悖论”。也就是说，哥德尔命题是某种悖论几乎难免。把哥德尔命题“本命题不可证”按命题本身不直接包含的判词“真”、“假”推导，你可以硬说不构成悖论(有些人吹牛，说什么在“悖论的边缘而未进入悖论云云)。那么，我们按哥德尔命题中所包含的判词“可证”、“不可证”来进行推理呢？它还不是个悖论？也就是明确说，由哥德尔命题可证，可以推出其不可证；由其不可证，又可以推出其可证(对类似的判词“不可判”，同样可做如是观，这里省略)。这么多年，居然没有人想到这点，实在让人吃惊！当然，笔者本人也仅仅是在对强化说谎者悖论“夲句错”进行了前文所述的透彻分析后才得到这个结果的，可以说，同样让我自己吃惊。总之，正所谓，“躲得了初一，躲不过十五”。是悖论早晚还得是。对于此问题，历来莫衷一是。有人说什么元数学中为真云云，殊不知元数学上还有元数学，以至无穷，谁说的清？没有任何人在系统内没吃饭，在系统外元系统中却吃得大饱的吧？通常只要一听有人说什么“元数学”、“元系统”、“元语言”之类既可以无穷地“元”下去，又实际界限模糊(哪些语言是元的，哪些不是元的，哪些是哪个层级的元的？)的概念，你就立刻可以判断他是没词了，在胡搞。具体在这里，如果那个对哥德尔命题“真”的判断是在元系统中的，那么，其真的内容也就是“不可证”、“不可判”之类也是元系统中的，而这个断语是

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51017. | CC-BY 4.0 Open Access | rec:6 July 2020, publ: 9 July 2020

说在系统内的不可证是显然的。并不是元系统中的不可证。这不就是个矛盾？系统内的不可证、不可判，要系统外去判断，不就等于系统内不知道(不可证)究竟是不是“不可证”了？如此，如何又是像人们通常认为和说的那样“能确定系统内不可证”的？也就是，终归如果它是个元定理，那这个“不可证”就得之于这个元系统之中，于是不可证的是元系统(原系统外)的命题，而如何又会是“原系统内的不可证”的？不通。况且就算在对哥德尔命题进行“假设其真，推出其并不假，而是不可证”之前，不是还有个“假设哥德尔命题为假，则推出其真”的推导吗？也就是，这个“真”可不是假设出来的，是推导出来的。它是系统内的，还是系统外(元数学中的元推导)的？事实上，通过仔细分析哥德尔定理的证明过程可知，哥德尔是先假设了形式系统内部无矛盾，然后给出一个证明，证明哥德尔命题在系统内不可证、不是系统定理(同时不可判定)。既然是证明，既然是定理(号称哥德尔定理)，可它的结论又说是“不是定理”(不可证)，这本身不就是一个矛盾？为了化解，不得不又说这个定理，也就是“不可证”、“不是定理”的结论，当然只能是“真”的(不真能叫定理？)，但这个“真”，不是系统内得到的，系统内得不到，只能得到不可证(不是定理)，真不真在系统内是不知道的。一旦知道，就是定理无疑，就是可证无疑。所以，这个所谓的“真”，只能得之于该形式系统外，也就是所谓“元系统”之中。即，“确定”原形式系统内的哥德尔命题的所谓“不可证”(非定理)的，是系统外的元定理“确定”的，也就是“确定”该命题不可证的，是元系统干的。于是当然我们就极其自然地得到结论，在原形式系统中，不但是该命题的真假“不可证”(非定理)，就是“该命题不可证”(非定理)本身，也是系统内不可证的。也就是在系统内的角度、立场下，连可不可证，都是不知道的，都是不可证的。因为显然，你不是硬说这个结论是从元系统(也就是原先的形式系统之外)得到的吗？确定的吗？系统内怎么会知道可不可证呢？总之，元数学、元定理、元系统之说根本就不能成立，是暗含矛盾的。其与罗素当年的类型论同构或等价。类型论会有的问题，它都有。之所以有人还这么说，是回答不了系统矛盾的托词。打个比方，就是在辩论中说不过了，不能自圆其说了，就把论题复杂化，“把水搅浑”，只要对方蒙住了，没词了，就算完事大吉了。老实说，搞数学的，甚至搞逻辑的，有些人在这方面其实也无异于普通人。如果有人还要硬杠说什么“哥德尔定理是个元定理”，得到的那个“真”是元判断，不是系统内的判断，在系统内就先是“不可证”的，继而又是“不可判”的。也就是非说哥德尔命题在系统内不构成悖论。那么好，由前面与哥德尔推导同样的推导(只不过把对真假的判断，改成了对“可证”、“不可证”的判断)，那么我们是否也应该得出同样的结论，也就是在所谓“元数学”(元系统)里，同样有一个“可证、不可证悖论”(也就是“元悖论”)？而不是什么元数学(元系统)领域的一个“真”命题，一个定理(所谓“元定理”)。此外，还有人说：这说明人的“心智”是“非算法”的、“非形式化”的，因此人的心智、大脑胜过机器、程序形式系统云云。就连哥德尔本人最终也承认这是一个没有解决的问题(据王浩)。事实上，有了前文对说谎者悖论的分析及结论，问题豁然开朗，完全没有必要再去走这个迷宫，兜这个圈子了。哥德尔命题正如其“原型”说谎者悖论一样，就是一个系统内的悖论，也就是矛盾。它当然反映了现有公理系统内部的矛盾性(而正是这点是哥德尔及很多人不愿意承认的)。“本命题不可证”，也就是“本命题非系统内的定理”，也就是“本命题非真”。当然就是“本命题假”。它就是实实在在的强化说谎者悖论“本句错”(或“本句假”)。无须遮掩什么。系统内有矛盾，产生了矛盾，可怕吗？能否解决？我们说，说谎者悖论不可怕，哥德尔句也不可怕。说谎者悖论可以解悖，哥德尔句也可以解决。思路完全一样，如法炮制。二者都是非对即错(非真即假)、又对又错(又真又假)，也就是产生了矛盾。由前面对说谎者悖论的分析可知，“矛盾”、“不矛盾”，是比真、假更为基本的概念。也就是“矛盾值”比“真值”更基本。一般地二者等价。不矛盾即真，矛盾即假。真必无矛盾，假必矛盾。对错也如此。但在特殊的说谎者悖论即哥德尔命题的情况下，则不然了。它们真假互推，又真又假，无法确定真值。但真假互推，又真又假，就是一个矛盾，就是矛

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51017. | CC-BY 4.0 Open Access | rec:6 July 2020, publ: 9 July 2020

盾与非矛盾互推，又矛盾又不矛盾，也是个矛盾，仍旧还有“矛盾值”。于是，我们只要稍微改造一下系统公理，就会“四两拨千斤”，解决这个老大难问题。也就是只需把原先的“真值表”、“对错表”，改成“矛盾值表”即可了。也就是“真”(“对”)，对应不矛盾；“假”(“错”)对应矛盾；“又真又假”(说谎者悖论型，真假可互推。此时要小心，这个命题不是“假”的，因为由“假”有可以推出“真”，矛盾)对应“矛盾”；甚至“又矛盾又无矛盾”(矛盾、非矛盾可互推的)也是矛盾。

如果我们把强化说谎者悖论“本句错”，稍加改动成为“本句不可证明真假”或“本句真假不明”或“本句不可判定真假”，事实上就是语言系统的哥德尔命题。如果语言系统是一个公理系统的话(事实上当然是，只不过通常无须明确罢了)。那些语法规则，起码一部分就可以视为语言公理。与哥德尔定理的情况相仿，如果语言系统中只按真假、对错来做判断，则这个语言系统中的强化说谎者悖论“本句错”无法消除(解悖)。这就预示着这个系统是不协调的、内含矛盾的。但如果按有无矛盾来判定，则“本句错”可以用有无矛盾来判断(当然是有矛盾)，此悖论被判断为有矛盾，会产生矛盾，如此，这个悖论被消解，语言系统本身矛盾自消。也就是协调了。

对于上面的说谎者悖论“本句假”改动后的“本句不可证明真假”或“本句真假不明”或“本句不可判定真假”，则类似地也有：如果该句真，则“本句是可以证明真假”的，而该句说的是“本句不可证明真假”，因此假。或者如果该句为真，则“本句不可证明真假”就是真的，而“真的”就是“证明了真假”，就不是“本句不可证明真假”了，因此假。而如果该句假，则“本句不可证明真假”为假，则“本句是可以证明真假”，而“该句假”就是在判断、证明真假，于是又真。仍旧是语言系统中的悖论。

将其与哥德尔定理的证明过程进行对比分析，就是对应于、类比于形式公理系统的“可证”(“是定理”，一般性的“真命题”)，就是自然语言系统中的所有是“真的”、“对的”语句；而对应、类比与形式公理系统的“不可证”(“不是定理”，一般性的“假命题”)。语言系统中那个“自指否”性质的强化说谎者悖论的“本句假”，自然可以对应于形式公理系统的那个很特殊、“各色”(东北人讲话。另类，别扭之意)的、同样是“自指否”性质的“哥德尔命题”。但是，这并不是全部。哥德尔命题的“不可证”(不是定理)，如所周知，也可以对应于前面提出的那个由“本句假”改动后的“本句不可证明真假”或就是“本句真假不可判定”。此类命题与哥德尔命题的区别，是前者不依赖于什么繁复的哥德尔编码，它就是个一般语言系统的句子而已。类比于哥德尔命题在形式系统中的“待遇”(即证明过程、方式)，语言系统的“类哥德尔命题”即“本句真假不可判定”，前文已论及，仍旧是个、起码是可以是个悖论。这点应无疑义，因为即使哥德尔命题也可以是悖论的，只是哥德尔及很多人并不不认为它是悖论。理由前文已经提到，只不过是他们认为现有形式系统不会或不可能出现矛盾而已。那么，它既然不是悖论，但又形似悖论，于是就不得不认为它在系统内是不可证的，也就是非定理，但真。当然，前文已经讨论了，其实即使如此也会产生悖论及很多问题(见前文)。那么在语言中的“本句真假不可判断”，是否如哥德尔命题在形式系统中的结论一样，在语言系统中也是一个虽真但真假不可判定的语句呢？实在说，在人们的自然语言系统中，还有没有什么“元语言”甚至“元元语言”、“元元元语言”.....？就算专家非说有，具体说这种语言的人们会去区分并且说这种所谓的元语言吗？人们承认它吗？当然不会！也就是那个确定“本句真假不可判断”为真的论断，是没有办法再去推给根本就不会存在的“元语言”的。“本句真假不可判定”为真，就是一种判定，已经判定了。否则怎么知道不可判定的？真假不可判定，原本应该不知道自己真还是不真的，怎么知道了？所以仍旧是悖论。在自然语言系统中，并不存在也没有任何人会认为存在什么高大上的“元语言”。笔者这里之所以要做这种自然语言系统与形式系统的比较，就是为了说明，形式系统其实本质上也是一种语言系统，只不过特殊一些、专门化一些而已。自然语言没有元语言，形式系统作为一种语言，也不应该有。如此而已。

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51017. | CC-BY 4.0 Open Access | rec:6 July 2020, publ: 9 July 2020

自然语言系统中会产生强化说谎者悖论“本句假”以及其改型的“本句真假不可判”(也是悖论)，说明对于“自指否”类的、同时陈述中本身就包括“真、假”这样的断语的句子(命题)，如果还用真、假来判断句中存在的“真、假”，则会产生只要是基于真、假断语的、就有无法消除的、也就是始终无法摆脱的矛盾或悖论。

根据前文笔者的讨论，我们现在知道了，只要把真假改成更本质的矛盾与非矛盾，悖论就可消除。因此像说谎者悖论一类的悖论，我们可以说其矛盾不可消除(不可解悖)，那是基于真假断语的；但一但我们直接针对矛盾、不矛盾这样更基本的断语，则不再有关于矛盾的矛盾存在。矛盾，它就是矛盾，再没有关于矛盾本身的矛盾。比如“矛盾并且不矛盾”(就是“矛盾，当且仅当不矛盾”)它本身就是矛盾的，因此这个命题还是矛盾，但已经不是悖论了。即：如果矛盾，可推出不矛盾，是矛盾；而如果不矛盾，则可推出矛盾，仍矛盾。总之，就是矛盾。作为矛盾这个断语本身而言，不是悖论，就是个矛盾。

由上可见，说谎者悖论的彻底解悖，可谓一箭双雕。既解决了该悖论本身，又使得哥德尔定理所提出的问题得到一个简洁、明快、有说服力的解释。而原先那些所谓的“元数学解释”、“心智胜算法与否的问题”的种种牵强附会的说辞也将不复存在。

参考文献

[1] 文兰，悖论的消解.科学出版社，2019 年 4 月第二版
[2] 陈波，悖论研究.北京大学出版社，2017 年 4 月第二版
[3] 张建军，黄展骥.矛盾与悖论新论.河北教育出版社，1998 年 4 月第一版
[4] 沈卫国.论自然科学的若干基本问题.海风出版社，1998 年 9 月第一版
[5] 沈卫国.论熵、不可逆过程及数学中的无穷.海风出版社，2009 年 8 月第一版
[6] 陶哲轩.陶哲轩实分析.人民邮电出版社，2008 年 11 月第一版
[7] 内格尔，纽曼.哥德尔证明.中国人民大学出版社，2008 年 3 月第一版
[8] 杨熙龄.奇异的循环——逻辑悖论探析.辽宁人民出版社，1986 年 12 月第一版

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51017. | CC-BY 4.0 Open Access | rec:6 July 2020, publ: 9 July 2020