Coordinate Formulas and Vector Identities of Gergonne Points in Triangular

Xingyuan Li

BOC Credit Card (International) L.T.D, HongKong, China
Email: 742096830@qq.com

Received: Jul.28th, 2020, published:Jul.30th, 2020

Abstract

Referring to [1], this paper gives the coordinate formulas of Gergonne points and some vector identities between Gergonne points and other three verticesinthe triangle.

Keywords

Gergonne Points, Triangle, Vector

三角形切心(格尔刚点)的坐标公式及向量恒等式

李兴源

中银信用卡(国际)有限公司，香港，中国
Email: 742096830@qq.com

收稿日期：2020年7月28日；发布日期：2020年7月30日

摘　要

本文参考文[1]，给出了三角形的切心(格尔刚点)坐标公式以及切心与三角形三顶点间的向量恒等式。

关键词

切心(格尔刚点)，三角形，向量

1. 引言

如图 1 所示，三角形 ABC 中的内切圆在 BC、AC、AB 上的切点分别为 D、E、F。顶点 A 所对的旁切圆与 BC 相切于 D'、与 AC 的延长线相切于 E'、与 AB 的延长线相切于 F'。将 AD、BE、CF 的交点 G 称作三角形 ABC 的内切心，将 AD'、BE'、CF' 的交点 G' 称作三角形 ABC 的顶点 A 所对的旁切心。

显然，对于任意的三角形总存在四个切心(Gergonne 点)，包括一个内切心和三个旁切心。

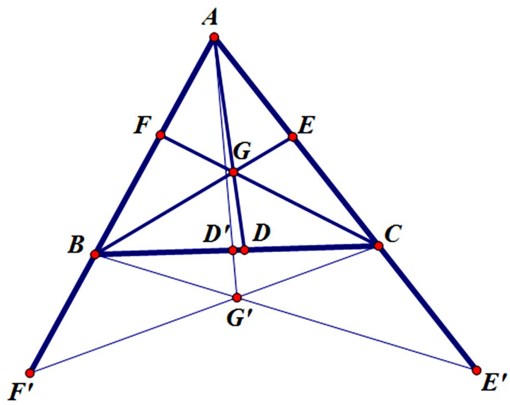

Figure 1. Gergonne points in triangle
图 1. 三角形的切心(格尔刚点)

2. 三角形切心(Gergonne 点)的坐标公式与向量恒等式

如图 1 所示，本文约定 O 为坐标原点。$BC=a$，$AC=b$，$AB=c$，$p=\dfrac{a+b+c}{2}$。

2.1. 三角形内切心的坐标公式

三角形 ABC 的内切心为 G，则

$$\boldsymbol{OG}=\frac{(p-b)(p-c)\boldsymbol{OA}+(p-a)(p-c)\boldsymbol{OB}+(p-a)(p-b)\boldsymbol{OC}}{ab+bc+ac-p^2}。$$

证明：

根据三角形内切圆的性质，有

$$AE=AF=p-a，\quad BD=BF=p-b，\quad CD=CE=p-c。$$

由定比分点公式，有

$$\boldsymbol{OD}=\frac{(p-c)\boldsymbol{OB}+(p-b)\boldsymbol{OC}}{a},$$

$$\boldsymbol{OE}=\frac{(p-a)\boldsymbol{OC}+(p-c)\boldsymbol{OA}}{b},$$

$$\boldsymbol{OF}=\frac{(p-b)\boldsymbol{OA}+(p-a)\boldsymbol{OB}}{c}。$$

设 $\dfrac{AG}{GD}=\lambda_a$，$\dfrac{BG}{GE}=\lambda_b$，$\dfrac{CG}{GF}=\lambda_c$，则 $\boldsymbol{OG}$ 有以下三种表示：

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51024. | CC-BY 4.0 Open Access | rec:28 July 2020, publ: 30 July 2020

$$\boldsymbol{OG}=\frac{\boldsymbol{OA}+\lambda_a\cdot\boldsymbol{OD}}{1+\lambda_a}=\frac{a\cdot\boldsymbol{OA}+\lambda_a(p-c)\boldsymbol{OB}+\lambda_a(p-b)\boldsymbol{OC}}{a(1+\lambda_a)},$$

$$\boldsymbol{OG}=\frac{\boldsymbol{OB}+\lambda_b\cdot\boldsymbol{OE}}{1+\lambda_b}=\frac{b\cdot\boldsymbol{OB}+\lambda_b(p-a)\boldsymbol{OC}+\lambda_b(p-c)\boldsymbol{OA}}{b(1+\lambda_b)},$$

$$\boldsymbol{OG}=\frac{\boldsymbol{OC}+\lambda_c\cdot\boldsymbol{OF}}{1+\lambda_c}=\frac{c\cdot\boldsymbol{OC}+\lambda_c(p-b)\boldsymbol{OA}+\lambda_c(p-a)\boldsymbol{OB}}{c(1+\lambda_c)}。$$

对上面三式的 $\boldsymbol{OA}$、$\boldsymbol{OB}$、$\boldsymbol{OC}$ 的系数分别进行比较，可得

$$\frac{1}{1+\lambda_a}=\frac{\lambda_b(p-c)}{b(1+\lambda_b)}=\frac{\lambda_c(p-b)}{c(1+\lambda_c)}, \quad ①$$

$$\frac{1}{1+\lambda_b}=\frac{\lambda_c(p-a)}{c(1+\lambda_c)}=\frac{\lambda_a(p-c)}{a(1+\lambda_a)}, \quad ②$$

$$\frac{1}{1+\lambda_c}=\frac{\lambda_a(p-b)}{a(1+\lambda_a)}=\frac{\lambda_b(p-a)}{b(1+\lambda_b)}。 \quad ③$$

把上面三式相乘并整理可得

$$\lambda_a\lambda_b\lambda_c=\frac{abc}{(p-a)(p-b)(p-c)};$$

再分别把①②③中的任意两式相乘并整理可得

$$\lambda_a\lambda_b=\frac{ab}{(p-c)^2},\quad \lambda_b\lambda_c=\frac{bc}{(p-a)^2},\quad \lambda_a\lambda_c=\frac{ac}{(p-b)^2}。$$

解得

$$\lambda_a=\frac{a(p-a)}{(p-b)(p-c)},\quad \lambda_b=\frac{b(p-b)}{(p-a)(p-c)},\quad \lambda_c=\frac{c(p-c)}{(p-a)(p-b)}。$$

因此

$$\begin{aligned}\boldsymbol{OG}&=\frac{(a+c-b)(a+b-c)\boldsymbol{OA}+(b+c-a)(a+b-c)\boldsymbol{OB}+(b+c-a)(a+c-b)\boldsymbol{OC}}{2(ab+bc+ac)-(a^2+b^2+c^2)}\\&=\frac{(p-b)(p-c)\boldsymbol{OA}+(p-a)(p-c)\boldsymbol{OB}+(p-a)(p-b)\boldsymbol{OC}}{ab+bc+ac-p^2}\end{aligned}。$$

2.2. 推论(三角形内切心的向量恒等式)

令三角形 ABC 的内切心 G 与坐标原点 O 重合，则有

$$(p-b)(p-c)\boldsymbol{GA}+(p-a)(p-c)\boldsymbol{GB}+(p-a)(p-b)\boldsymbol{GC}=0。$$

2.3. 三角形旁切心的坐标公式

三角形 ABC 的顶点 A 所对的旁切心为 G'，则

$$\boldsymbol{OG'}=\frac{p(p-b)\boldsymbol{OB}+p(p-c)\boldsymbol{OC}-(p-b)(p-c)\boldsymbol{OA}}{p^2-bc}。$$

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51024. | CC-BY 4.0 Open Access | rec:28 July 2020, publ: 30 July 2020

证明：

根据三角形旁切圆的性质，有

$$BD' = BF' = p - c \text{，} \quad CD' = CE' = p - b \text{。}$$

由定比分点公式，有

$$\boldsymbol{OD}' = \frac{(p-b)\boldsymbol{OB} + (p-c)\boldsymbol{OC}}{a},$$

$$\boldsymbol{OB} = \frac{(p-c)\boldsymbol{OA} + c \cdot \boldsymbol{OF}'}{p} \Rightarrow \boldsymbol{OF}' = \frac{p \cdot \boldsymbol{OB} - (p-c)\boldsymbol{OA}}{c},$$

$$\boldsymbol{OC} = \frac{(p-b)\boldsymbol{OA} + b \cdot \boldsymbol{OE}'}{p} \Rightarrow \boldsymbol{OE}' = \frac{p \cdot \boldsymbol{OC} - (p-b)\boldsymbol{OA}}{b} \text{。}$$

设 $\dfrac{AG'}{G'D'} = \lambda_a$， $\dfrac{BG'}{G'E'} = \lambda_b$， $\dfrac{CG'}{G'F'} = \lambda_c$， 则

$$\boldsymbol{OD}' = \frac{(\lambda_a - 1)\boldsymbol{OG}' + \boldsymbol{OA}}{\lambda_a},$$

$$\boldsymbol{OG}' = \frac{\lambda_a \cdot \boldsymbol{OD}' - \boldsymbol{OA}}{\lambda_a - 1} = \frac{\lambda_a (p-b)\boldsymbol{OB} + \lambda_a (p-c)\boldsymbol{OC} - a \cdot \boldsymbol{OA}}{a(\lambda_a - 1)},$$

$$\boldsymbol{OG}' = \frac{\boldsymbol{OB} + \lambda_b \cdot \boldsymbol{OE}'}{1 + \lambda_b} = \frac{b \cdot \boldsymbol{OB} + \lambda_b p \cdot \boldsymbol{OC} - \lambda_b (p-b)\boldsymbol{OA}}{b(1+\lambda_b)},$$

$$\boldsymbol{OG}' = \frac{\boldsymbol{OC} + \lambda_c \cdot \boldsymbol{OF}'}{1 + \lambda_c} = \frac{c \cdot \boldsymbol{OC} + \lambda_c p \cdot \boldsymbol{OB} - \lambda_c (p-c)\boldsymbol{OA}}{c(1+\lambda_c)} \text{。}$$

对上面三式的 $\boldsymbol{OA}$、 $\boldsymbol{OB}$、 $\boldsymbol{OC}$ 的系数分别进行比较，可得

$$\frac{1}{\lambda_a - 1} = \frac{\lambda_b (p-b)}{b(1+\lambda_b)} = \frac{\lambda_c (p-c)}{c(1+\lambda_c)}, \tag{①}$$

$$\frac{1}{1+\lambda_b} = \frac{\lambda_c p}{c(1+\lambda_c)} = \frac{\lambda_a (p-b)}{a(\lambda_a - 1)}, \tag{②}$$

$$\frac{1}{1+\lambda_c} = \frac{\lambda_b p}{b(1+\lambda_b)} = \frac{\lambda_a (p-c)}{a(\lambda_a - 1)} \text{。} \tag{③}$$

把上面三式相乘并整理可得

$$\lambda_a \lambda_b \lambda_c = \frac{abc}{p(p-b)(p-c)};$$

再分别把①②③中的任意两式相乘并整理可得

$$\lambda_a \lambda_b = \frac{ab}{(p-b)^2}, \quad \lambda_a \lambda_c = \frac{ac}{(p-c)^2}, \quad \lambda_b \lambda_c = \frac{bc}{p^2} \text{。}$$

解得

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51024. | CC-BY 4.0 Open Access | rec:28 July 2020, publ: 30 July 2020

$$\lambda_a=\frac{ap}{(p-b)(p-c)},\quad \lambda_b=\frac{b(p-c)}{p(p-b)},\quad \lambda_c=\frac{c(p-b)}{p(p-c)}。$$

因此

$$\begin{aligned}\boldsymbol{OG'}&=\frac{(a+b+c)(a+c-b)\boldsymbol{OB}+(a+b+c)(a+b-c)\boldsymbol{OC}-(a+c-b)(a+b-c)\boldsymbol{OA}}{(a+b+c)^2-4bc}\\&=\frac{p(p-b)\boldsymbol{OB}+p(p-c)\boldsymbol{OC}-(p-b)(p-c)\boldsymbol{OA}}{p^2-bc}\end{aligned}。$$

2.4. 推论(三角形旁切心的向量恒等式)

令三角形 ABC 的顶点 A 所对的旁切心 $\boldsymbol{G'}$ 与坐标原点 O 重合，则有

$$(p-b)(p-c)\boldsymbol{G'A}-p(p-b)\boldsymbol{G'B}-p(p-c)\boldsymbol{G'C}=0。$$

致　谢

敬请各位读者对于本文给予纠错指正。

参考文献

[1] 邓胜. 三角形特殊点的一般坐标公式[J]. 数学通讯, 1998, 8: 24-26.