A Note on Number Theory: The Equivalence of the Distribution of Prime Numbers

Wei Zhang

College of Economics and Management, Chengdu University, China
Email: tianshi20122013@sina.com

Received: Jul.28th, 2020, published:Jul.30th, 2020

Abstract

Goldbach conjecture and the twin prime conjecture are homologous. The paper from the prime origin, proposes the equivalence of the distribution of prime numbers on equidistant intervals, and derives the lower limit of the twin prime conjecture and goldbach conjecture, which provides a new idea for solving the twin prime conjecture and goldbach conjecture.

Keywords

Φ(m) Function, Co-Prime, the Equivalence, the Twin Prime Conjecture, Goldbach Conjecture

数论笔记：素数分布的等价性

张　伟

成都大学经济管理学院，四川 成都
Email: tianshi20122013@sina.com

收稿日期：2020年7月28日；发布日期：2020年7月30日

摘　要

哥猜与孪猜同源。本文从素数的起源出发，提出了等距区间素数分布的等价性，推出了孪生素数猜想和哥德巴赫猜想的下限式，为孪生素数猜想和哥德巴赫猜想的解决提供了新的思路。

关键词

Φ(m)函数，互质，等价性，孪生素数猜想，哥德巴赫猜想

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51025. | CC-BY 4.0 Open Access | rec:28 July 2020, publ: 30 July 2020

1. 不超过 x 的素数个数[1] [2]

设 1~7 之间的素数个数为 $\pi(7)$，7~7² 之间的素数个数为 $\pi'(7^2)$。

7~7² 之间的素数个数为 $\pi'(7^2)$，等价于命题：

在 1~7 之间，若素数 2，3，5，7 的排列顺序不变，区间 7~7² 之间生成 $\pi'(7^2)$ 个素数，区间 7~7² 之间生成 $\pi'(7^2)$ 个与 2，3，5，7 互质的整数，区间 $[1,7^2]$ 生成 $1+\pi'(7^2)$ 个与 2，3，5，7 互质的整数。

又等价于命题：在任意连续的 7 个自然数中，若 2，3，5，7 的倍数与 1~7 之间 2，3，5，7 的倍数排列顺序相同，与区间 7~7² 等距的相邻区间将生成 $\pi'(7^2)$ 个与 2，3，5，7 互质的整数。

因此，对于任一区间 $[7^2k+1,7^2(k+1)]$，此区间与区间 $[1,7^2]$ 相比，在其中任意连续的 7 个自然数中，若 2，3，5，7 的倍数与 1～7 之间 2，3，5，7 的倍数排列顺序相同，区间 $[7^2k+1,7^2(k+1)]$ 最多生成 $2+2\pi'(7^2)$ 个与 2，3，5，7 互质的整数。

引理 1：区间 $[7^2k+1,7^2(k+1)]$ 与 2，3，5，7 互质的整数最多个数为：$2+2\pi'(7^2)$

等距区间 $[7^2k+1,7^2(k+1)]$ 与区间 $[1,7^2]$ 相比，在其中任意连续的 7 个自然数中，若 2，3，5，7 的倍数与 1~7 之间 2，3，5，7 的倍数(2，3，5，7 可看作素数 2，3，5，7 的 1 倍)排列顺序相同，由自然数的连续性可知，在其相邻反方向上与区间 7~7² 等距的区间，必然会生成 $\pi'(7^2)$ 个与 2，3，5，7 互质的整数。

即其中 2，3，5，7 的倍数排列顺序为：$7n$，$5n$，$3n$，$2n$，$2n$，$3n$，$5n$，$7n$，因此，在等距

区间 $[7^2k+1,7^2(k+1)]$ 中，最多生成 $1+\pi'(7^2)+1+\pi'(7^2)=2+2\pi'(7^2)$ 个与 2，3，5，7 互质的整数。

即：等距区 $[7^2k+1,7^2(k+1)]$ 与 2，3，5，7 互质的整数，最多比区间 $[1,7^2]$ 增加 $1+\pi'(7^2)$ 个，最多不超过区间 $[1,7^2]$ 与 2，3，5，7 互质的整数个数的两倍。

因此，区间 $[7^2k+1,7^2(k+1)]$ 与 2，3，5，7 互质的整数最多个数为：$2+2\pi'(7^2)$

如：$k=4$，等距区间[197，245]，

197，199，203，205，207，209，210，

211，213，215，217，221，223，227，229，233，239，241

整数 210 左右两边，2，3，5，7 的倍数排列顺序为: $7n$，$5n$，$3n$，$2n$，$2n$，$3n$，$5n$，$7n$。

由欧拉函数可知，

不超过 $7\times2\times3\times5\times7=7\times210$ 与 2，3，5，7 互质的奇数个数为 $7\times(2-1)(3-1)(5-1)(7-1)$，

其中：区间 $[7^2k+1,7^2(k+1)]$ 的个数为 $7\times\frac{210}{7^2}$

则：$7\times(2-1)(3-1)(5-1)(7-1)<[2+2\pi'(7^2)]\times7\times\frac{210}{7^2}$

$$\pi'(7^2)>\frac{1}{2}\times7^2\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)-1$$

$=\frac{1}{2}\times7^2\times\Pi\left(1-\frac{1}{p}\right)-1$ (Π 为连乘积符号，p 为不超过 7 的素数)

设 1~7² 之间的素数个数为 $\pi(7^2)$，则：$\pi(7^2)>\frac{1}{2}\times7^2\Pi\left(1-\frac{1}{p}\right)+\pi(7)-1$

将上式中的 7 换成素数 P，P～P^2 之间的素数个数为 $\pi'(P^2)$，同理可证：

引理 2：区间 $[P^2k+1,P^2(k+1)]$ 与 p(p 为不超过素数 P 的素数)互质的整数最多个数为：

$2+2\pi'(P^2)$

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51025. | CC-BY 4.0 Open Access | rec:28 July 2020, publ: 30 July 2020

由欧拉函数可知，

不超过 $P\Pi p$ 与 p 互质的奇数个数为 $P\Pi\left(p-1\right)$，

其中：区间 $\left[P^2k+1,P^2\left(k+1\right)\right]$ 的个数为 $P\times\frac{\Pi p}{P^2}$

则：$P\Pi\left(p-1\right)<\left[2+2\pi'\left(P^2\right)\right]P\times\frac{\Pi p}{P^2}$

$\pi'\left(P^2\right)>\frac{1}{2}\times P^2\Pi\left(1-\frac{1}{p}\right)-1$ (Π 为连乘积符号，p 为不超过 P 的素数)

不超过 P^2 的素数个数为 $\pi\left(P^2\right)$，则：

$\pi\left(P^2\right)>\frac{1}{2}\times P^2\Pi\left(1-\frac{1}{p}\right)+\pi\left(P\right)-1$， $\pi\left(P\right)$ 为不超过 P 的素数个数。

将上式中的 P^2 换成自然数 $x\left(x\geq4\right)$， $\sqrt{x}\sim x$ 之间的素数个数为 $\pi'\left(x\right)$， 同理可证：

引理 3：区间 $\left[xk+1,x\left(k+1\right)\right]$ 与 p(p 为不超过 $\sqrt{x}$ 的素数)互质的整数最多个数为： $2+2\pi'\left(x\right)$

由欧拉函数可知，

不超过 $x\Pi p$ 与 p 互质的奇数个数为 $x\Pi\left(p-1\right)$，

其中：区间 $\left[xk+1,x\left(k+1\right)\right]$ 的个数为 $x\times\frac{\Pi p}{x}$

则：$x\Pi\left(p-1\right)<\left[2+2\pi'\left(x\right)\right]x\times\frac{\Pi p}{x}$

$\pi'\left(x\right)>\frac{x}{2}\Pi\left(1-\frac{1}{p}\right)-1$ (Π 为连乘积符号，其中 p 为不超过 $\sqrt{x}$ 的素数)

不超过 x 的素数个数为 $\pi\left(x\right)$，则：

$\pi\left(x\right)>\frac{x}{2}\Pi\left(1-\frac{1}{p}\right)+\pi\left(\sqrt{x}\right)-1>\frac{x}{2}\Pi\left(1-\frac{1}{p}\right)-1$， $\pi\left(\sqrt{x}\right)$ 为不超过 $\sqrt{x}$ 的素数个数。

由不超过 x 的素数个数容斥公式可知：

$$\pi\left(x\right)=x\Pi\left(1-\frac{1}{p}\right)+R\left(n\right)+\pi\left(\sqrt{x}\right)-1,$$

其中余项 $R\left(n\right)$ 为 2^n 个不规则项之和，n 为不超过 $\sqrt{x}$ 的素数个数。

反推出：素数个数容斥公式中余项 $R\left(n\right)$ 绝对值的上限为：$\frac{x}{2}\Pi\left(1-\frac{1}{p}\right)$

即：素数个数容斥公式中余项 $R\left(n\right)$ 绝对值的上限为主项 $x\Pi\left(1-\frac{1}{p}\right)$ 的一半。

2. 不超过 x 的孪生素数数目

设 1~7 之间的素数个数为 $\pi\left(7\right)$，7~7^2 之间的孪生素数 $\left(p-2,p\right)$ 数目为 $T'\left(7^2\right)$。

7~7^2 之间的孪生素数数目为 $T'\left(7^2\right)$，等价于命题：

在 1~7 之间，若 2，3，5，7 的倍数排列顺序不变，区间 7~7^2 之间生成 $T'\left(7^2\right)$ 对孪生素数，区间 7~7^2 之间生成 $T'\left(7^2\right)$ 个 q 与 3，5，7 互质且 $q-2$ 与 3，5，7 互质的奇数 q，区间 $\left[1,7^2\right]$ 生成 $1+T'\left(7^2\right)$ 个 q 与

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51025. | CC-BY 4.0 Open Access | rec:28 July 2020, publ: 30 July 2020

3，5，7 互质且 $q-2$ 与 3，5，7 互质的奇数 q。

又等价于命题：在任意连续的 7 个自然数中，若 2，3，5，7 的倍数与 1~7 之间 2，3，5，7 的倍数排列顺序相同，与区间 7~7^2 等距的相邻区间将生成 $1+T'\left(7^2\right)$ 个 q 与 3，5，7 互质且 $q-2$ 与 3，5，7 互质的奇数 q。

因此，对于任一区间 $\left[7^2k+1,7^2(k+1)\right]$，此区间与区间 $\left[1,7^2\right]$ 相比，在其中任意连续的 7 个自然数中，若 2，3，5，7 的倍数与 1~7 之间 2，3，5，7 的倍数排列顺序相同，区间 $\left[7^2k+1,7^2(k+1)\right]$ 最多生成 $2+2T'\left(7^2\right)$ 个 q 与 3，5，7 互质且 $q-2$ 与 3，5，7 互质的奇数 q。

引理 4：区间 $\left[7^2k+1,7^2(k+1)\right]$ 中 q 与 3，5，7 互质且 $q-2$ 与 3，5，7 互质的奇数 q 最多个数为： $2+2T'\left(7^2\right)$

证明：

等距区间 $\left[7^2k+1,7^2(k+1)\right]$ 与区间 $\left[1,7^2\right]$ 相比，在其中任意连续的 7 个自然数中，若 2，3，5，7 的倍数与 1~7 之间 2，3，5，7 的倍数(2，3，5，7 可看作素数 2，3，5，7 的 1 倍)排列顺序相同，由自然数的连续性可知，在其相邻反方向上与区间 7~7^2 等距的区间，必然会生成 $T'\left(7^2\right)$ 个 q 与 3，5，7 互质且 $q-2$ 与 3，5，7 互质的奇数 q。

即其中 2，3，5，7 的倍数排列顺序为：$7n$，$5n$，$3n$，$2n$，$2n$，$3n$，$5n$，$7n$，因此，在等距

区间 $\left[7^2k+1,7^2(k+1)\right]$ 中，最多生成 $1+T'\left(7^2\right)+1+T'\left(7^2\right)=2+2T'\left(7^2\right)$ 个 q 与 3，5，7 互质且 $q-2$ 与 3，5，7 互质的奇数 q。

即：等距区间 $\left[7^2k+1,7^2(k+1)\right]$ 中 q 与 3，5，7 互质且 $q-2$ 与 3，5，7 互质的奇数 q，最多比区间 $\left[1,7^2\right]$ 增加 $1+T'\left(7^2\right)$ 个，最多不超过区间 $\left[1,7^2\right]$ 中 q 与 3，5，7 互质且 $q-2$ 与 3，5，7 互质的奇数 q 的个数的两倍。

因此，区间 $\left[7^2k+1,7^2(k+1)\right]$ 中 q 与 3，5，7 互质且 $q-2$ 与 3，5，7 互质的奇数 q 最多个数为：$2+2T'\left(7^2\right)$

由Φ(m)函数的性质[3]可知，

不超过 $7\times2\times3\times5\times7=7\times210$ 的奇数中 q 与 3，5，7 互质且 $q-2$ 与 3，5，7 互质的奇数个数

$$7\times(3-2)\times(5-2)(7-2),$$

其中：区间 $\left[7^2k+1,7^2(k+1)\right]$ 的个数为 $7\times\dfrac{210}{7^2}$

则：$7\times(3-2)\times(5-2)(7-2)<\left[2+2T'\left(7^2\right)\right]\times7\times\dfrac{210}{7^2}$

$$T'\left(7^2\right)>\frac{1}{2}\times7^2\times\frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{3}\right)\left(1-\frac{2}{5}\right)\left(1-\frac{2}{7}\right)-1$$

$=\dfrac{1}{4}\times7^2\times\Pi\left(1-\dfrac{2}{p}\right)-1$ (Π 为连乘积符号，p 为不超过 7 的奇素数)

设 1~7^2 之间的孪生素数数目为 $T\left(7^2\right)$，则：$T\left(7^2\right)>\dfrac{1}{4}\times7^2\times\Pi\left(1-\dfrac{2}{p}\right)-1$

将上式中的 7 换成奇素数 P，P~P^2 之间的孪生素数 $(p-2,p)$ 数目为 $T'\left(P^2\right)$，同理可证：

引理 5：区间 $\left[P^2k+1,P^2(k+1)\right]$ 中 q 与 p 互质且 $q-2$ 与 p 互质(p 为不超过奇素数 P 的奇素数)的奇数 q 最多个数为： $2+2T'\left(P^2\right)$

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51025. | CC-BY 4.0 Open Access | rec:28 July 2020, publ: 30 July 2020

由Φ(m)函数的性质可知，不超过 $P\Pi p$ 的奇数中 q 与 p 互质且 $q-2$ 与 p 互质(p 为不超过奇素数 P 的奇素数)的奇数个数为

$$P\Pi(p-2),$$

其中：区间 $\left[P^2k+1, P^2(k+1)\right]$ 的个数为 $P\times\frac{\Pi p}{P^2}$

则：$P\Pi(p-2)<\left[2+2T'(P^2)\right]P\times\frac{\Pi p}{P^2}$

$T'(P^2)>\frac{1}{4}\times P^2\Pi\left(1-\frac{2}{p}\right)-1$ （Π 为连乘积符号，其中 p 为不超过奇素数 P 的奇素数)

不超过 P^2 的孪生素数数目为 $T(P^2)$，则：

$$T(P^2)>\frac{1}{4}\times P^2\Pi\left(1-\frac{2}{p}\right)-1$$

将上式中的 P^2 换成自然数 $x(x\geq 9)$，$\sqrt{x}\sim x$ 之间的孪生素数 $(p-2,p)$ 数目为 $T'(x)$，同理可证：

引理 6：区间 $\left[xk+1, x(k+1)\right]$ 中 q 与 p 互质且 $q-2$ 与 p 互质(p 为不超过 $\sqrt{x}$ 的奇素数)的奇数 q 最多个数为： $2+2T'(x)$

由Φ(m)函数的性质可知，

不超过 $x\Pi p$ 的奇数中 q 与 p 互质且 $q-2$ 与 p 互质(p 为不超过 $\sqrt{x}$ 的奇素数)的奇数个数为 $x\Pi(p-2)$，

其中：区间 $\left[xk+1, x(k+1)\right]$ 的个数为 $x\times\frac{\Pi p}{x}$

则：$x\Pi(p-2)<\left[2+2T'(x)\right]x\times\frac{\Pi p}{x}$

$T'(x)>\frac{x}{4}\Pi\left(1-\frac{2}{p}\right)-1$ （Π 为连乘积符号，其中 p 为不超过 $\sqrt{x}$ 的奇素数)

不超过 x 的孪生素数数目为 $T(x)$，则：

$$T(x)>\frac{x}{4}\Pi\left(1-\frac{2}{p}\right)-1$$

即：不超过 x 的孪生素数数目 $T(x)$ 下限式为：

$$T(x)>\frac{x}{4}\Pi\left(1-\frac{2}{p}\right)-1$$

或：$T(x)>x\cdot c\Pi\left(1-\frac{1}{p}\right)^2-1$，$c=\Pi\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)$

$\Pi\left(1-\frac{1}{p}\right)^2$ 中，p 为不超过 $\sqrt{x}$ 的素数，$c=\Pi\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)$ 中，p 为不超过 $\sqrt{x}$ 的奇素数。

3. 偶数 x 可以表示为(1 + 1)的表示数

在偶数 $x(x\geq 10)$ 中，设 $G'(x)$ 为素数 p 的个数(p 为素数且 $x-p$ 也为素数，$P<p<P^2$，P 为不超过 $\sqrt{x}$ 的最大素数)，

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51025. | CC-BY 4.0 Open Access | rec:28 July 2020, publ: 30 July 2020

同理可证：

引理 7：区间$\left[P^2k+1,P^2(k+1)\right]$**中 q 与 p 互质(p 为不超过**$\sqrt{x}$ **的最大素数 P 的奇素数)且** $P\Pi p+x-q$ **与 p 互质的奇数 q 最多个数为：** $2+2G'(x)$ **(**$x-1$**与 p 互质)或** $2G'(x)$

由Φ(m)函数的性质可知，不超过 $P\Pi p$ 的奇数中 q 与 p 互质(p 为不超过 $\sqrt{x}$ 的最大素数 P 的奇素数)且 $P\Pi p+x-q$ 与 p 互质的奇数 q 个数为：$P\Pi(p-2)\Pi\dfrac{(p-1)}{(p-2)}$，$\Pi\dfrac{(p-1)}{(p-2)}$ 中，p 为 x 的奇素因子。

其中：区间 $\left[P^2k+1,P^2(k+1)\right]$ 的个数为 $P\times\dfrac{\Pi p}{P^2}$

则：$P\Pi(p-2)\Pi\dfrac{(p-1)}{(p-2)}<\left[2+2G'(x)\right]P\times\dfrac{\Pi p}{P^2}$

或：$P\Pi(p-2)\Pi\dfrac{(p-1)}{(p-2)}<\left[2G'(x)\right]P\times\dfrac{\Pi p}{P^2}$

$$G'(x)>\frac{1}{4}\times P^2\Pi\left(1-\frac{2}{p}\right)\Pi\frac{(p-1)}{(p-2)}-1$$

P 为不超过 $\sqrt{x}$ 的最大素数，$\Pi\left(1-\dfrac{2}{p}\right)$ 中，p 为不超过 $\sqrt{x}$ 的最大素数 P 的奇素数。

设 $G(x)$ 为偶数 $x(x\geq 10)$ 可以表示为两个素数之和或(1+1)的表示数，则：

$$G(x)>\frac{1}{4}\times P^2\Pi\left(1-\frac{2}{p}\right)\Pi\frac{(p-1)}{(p-2)}-1$$

或：$G(x)>P^2\cdot c\Pi\left(1-\dfrac{1}{p}\right)^2\Pi\dfrac{(p-1)}{(p-2)}-1$，$c=\Pi\left(1-\dfrac{1}{(p-1)^2}\right)$

$\Pi\left(1-\dfrac{1}{p}\right)^2$ 中，p 为不超过 $\sqrt{x}$ 的最大素数 P 的素数，$\Pi\dfrac{(p-1)}{(p-2)}$ 中，p 为 x 的奇素因子，$c=\Pi\left(1-\dfrac{1}{(p-1)^2}\right)$ 中，p 为不超过 $\sqrt{x}$ 的奇素数。

在偶数 $x(x\geq 10)$ 中，设 $G'(x)$ 为 $\sqrt{x}\sim x$ 之间素数 p 的个数(p 为素数且 $x-p$ 也为素数)，

同理可证：

引理 8：区间$\left[xk+1,x(k+1)\right]$**中 q 与 p 互质(p 为不超过**$\sqrt{x}$ **的奇素数)且** $x\Pi p+x-q$ **与 p 互质的奇数 q 最多个数为：** $2+2G'(x)$ **(**$x-1$**与 p 互质)或** $2G'(x)$

由Φ(m)函数的性质可知，不超过 $x\Pi p$ 的奇数中 q 与 p 互质(p 为不超过 $\sqrt{x}$ 的奇素数)且 $x\Pi p+x-q$ 与 p 互质的奇数 q 个数为：$x\Pi(p-2)\Pi\dfrac{(p-1)}{(p-2)}$，$\Pi\dfrac{(p-1)}{(p-2)}$ 中，p 为 x 的奇素因子。

其中：区间 $\left[xk+1,x(k+1)\right]$ 的个数为 $x\times\dfrac{\Pi p}{x}$

则：$x\Pi(p-2)\Pi\dfrac{(p-1)}{(p-2)}<\left[2+2G'(x)\right]x\times\dfrac{\Pi p}{x}$

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51025. | CC-BY 4.0 Open Access | rec:28 July 2020, publ: 30 July 2020

或：$x\Pi\left(p-2\right)\Pi\frac{\left(p-1\right)}{\left(p-2\right)}<\left[2G'\left(x\right)\right]x\times\frac{\Pi p}{x}$

$$G'\left(x\right)>\frac{x}{4}\Pi\left(1-\frac{2}{p}\right)\Pi\frac{\left(p-1\right)}{\left(p-2\right)}-1$$

$\Pi\left(1-\frac{2}{p}\right)$中，$p$为不超过$\sqrt{x}$的奇素数。

设$G\left(x\right)$为偶数$x\left(x\geq10\right)$可以表示为两个素数之和或(1+1)的表示数，则：

$$G\left(x\right)>\frac{x}{4}\Pi\left(1-\frac{2}{p}\right)\Pi\frac{\left(p-1\right)}{\left(p-2\right)}-1$$

即：偶数$x\left(x\geq10\right)$可以表示为两个素数之和或(1+1)的表示数$G\left(x\right)$下限式为：

$$G\left(x\right)>\frac{x}{4}\Pi\left(1-\frac{2}{p}\right)\Pi\frac{\left(p-1\right)}{\left(p-2\right)}-1$$

或：$G\left(x\right)>x\cdot c\Pi\left(1-\frac{1}{p}\right)^2\Pi\frac{\left(p-1\right)}{\left(p-2\right)}-1$，$c=\Pi\left(1-\frac{1}{\left(p-1\right)^2}\right)$

$\Pi\left(1-\frac{1}{p}\right)^2$中，$p$为不超过$\sqrt{x}$的素数，$\Pi\frac{\left(p-1\right)}{\left(p-2\right)}$中，$p$为$x$的奇素因子，$c=\Pi\left(1-\frac{1}{\left(p-1\right)^2}\right)$中，$p$为不超过$\sqrt{x}$的奇素数。

可见，当$x=2^n$，偶数$x\left(x\geq10\right)$可以表示为(1+1)的表示数与不超过x的孪生素数数目的下限相同。

参考文献

[1] J.B. Rosser and L. Scloenfeld, approximate formulas for some functions of prime numbers. Lllinois J. MathVolume 6, Issue 1(1962), 64-94.

[2] G.H. Hardy and E.M. Wright, An Introduction to The Theory of Numbers, section 22.8 and 22.19. The Oxford University Press, 4ed, 1959.

[3] 张伟. Φ(m)函数的性质[J]. 应用数学进展, 2020, 9(1): 38-42. https://doi.org/10.12677/AAM.2020.91005

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51025. | CC-BY 4.0 Open Access | rec:28 July 2020, publ: 30 July 2020