The IsogonalLine and the Isogonal Conjugate Points on the Spherical Triangle

Xingyuan Li

BOC Credit Card (International) L.T.D, HongKong, China
Email: 742096830@qq.com

Received: Jul. 1st, 2020, published:Jul. 3rd, 2020

Abstract

In this paper, we spread the triangle isogonal line theorem and angle bisector theorem in plane geometry to the spherical triangle in spherical geometry, the concept of isogonal conjugate pointsin spherical triangle is given by proving Menelaus's theorem and Ceva's theorem of spherical triangle.

Keywords

Isogonal Line, Spherical Triangle, Menelaus's Theorem, Ceva's Theorem, Isogonal Conjugate Points

球面三角形的等角线与等角共轭点

李兴源

中银信用卡(国际)有限公司，香港，中国
Email: 742096830@qq.com

收稿日期：2020年7月1日；发布日期：2020年7月3日

摘　要

本文将平面几何中的三角形等角线定理与角平分线定理推广至球面几何的球面三角形中，并通过球面三角形的梅涅劳斯定理和塞瓦定理给出了球面三角形中等角共轭点的概念。

关键词

等角线；球面三角形；梅涅劳斯定理；塞瓦定理；等角共轭点

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51015. | CC-BY 4.0 Open Access | rec:1 July 2020, publ: 3 July 2020

1. 引言

在平面几何上，有三角形等角线定理：

在任意三角形 ABC 中，D、E 两点在线段 BC 上，且 $\angle BAD = \angle CAE$，则有

$$\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BD \cdot BE}{CD \cdot CE}。$$

AD、AE 称为 $\angle BAC$ 的等角线，如图 1 所示。

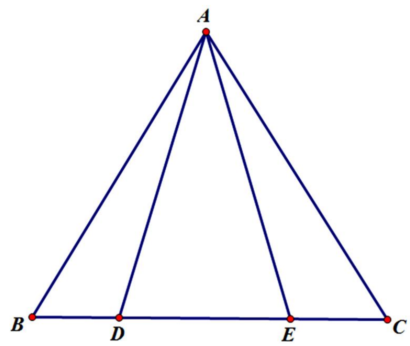

Figure 1. Isogonal line theorem of plane triangle
图 1. 平面三角形的等角线定理

2. 等角线定理在球面三角形上的推广

2.1. 球面几何的等角线定理

如图 2 所示，O 为球面三角形 ABC 的球心。D、E 两点都在 BC 所对的同一段大圆弧内，且二面角 $\angle B - OA - D = \angle C - OA - E$，则有

$$\left(\frac{\sin\angle AOB}{\sin\angle AOC}\right)^2 = \frac{\sin\angle BOD \cdot \sin\angle BOE}{\sin\angle COD \cdot \sin\angle COE}。$$

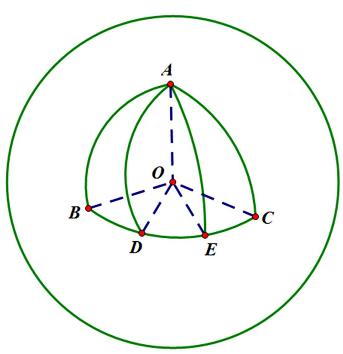

Figure 2. Isogonal line theorem of spherical triangle
图 2. 球面三角形的等角线定理

证明：根据球面三角形的正弦定理，在球面三角形 ABD 和 ACE 中，有：[1]

$$\frac{\sin\angle AOB}{\sin\angle A - OD - B} = \frac{\sin\angle BOD}{\sin\angle B - OA - D}；\quad \frac{\sin\angle AOC}{\sin\angle A - OE - C} = \frac{\sin\angle COE}{\sin\angle C - OA - E}。$$

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51015. | CC-BY 4.0 Open Access | rec:1 July 2020, publ: 3 July 2020

对上面两式相除，可得：

$$\frac{\sin\angle AOB}{\sin\angle AOC}=\frac{\sin\angle BOD\cdot\sin\angle A-OD-B}{\sin\angle COE\cdot\sin\angle A-OE-C}。 \quad (1)$$

同理，在球面三角形 ACD 和 ABE 中，有：

$$\frac{\sin\angle AOB}{\sin\angle A-OE-B}=\frac{\sin\angle BOE}{\sin\angle B-OA-E}；\quad \frac{\sin\angle AOC}{\sin\angle A-OD-C}=\frac{\sin\angle COD}{\sin\angle C-OA-D}。$$

对上面两式相除，可得：

$$\frac{\sin\angle AOB}{\sin\angle AOC}=\frac{\sin\angle BOE\cdot\sin\angle A-OE-B}{\sin\angle COD\cdot\sin\angle A-OD-C}。 \quad (2)$$

由于

$$\angle A-OD-B+\angle A-OD-C=\angle A-OE-B+\angle A-OE-C=\pi，$$

故(1)、(2)相乘可得：

$$\left(\frac{\sin\angle AOB}{\sin\angle AOC}\right)^2=\frac{\sin\angle BOD\cdot\sin\angle BOE}{\sin\angle COD\cdot\sin\angle COE}。$$

对于球面三角形的等角线定理，若令 D、E 两点重合，即可得到以下推论。

2.2. 推论(球面三角形的内角平分线定理)

如图 3 所示，O 为球面三角形 ABC 的球心。点 D 在 BC 所对的大圆弧之上，则二面角 $\angle B-OA-D=\angle C-OA-D$ 的充要条件为

$$\frac{\sin\angle AOB}{\sin\angle AOC}=\frac{\sin\angle BOD}{\sin\angle COD}。$$

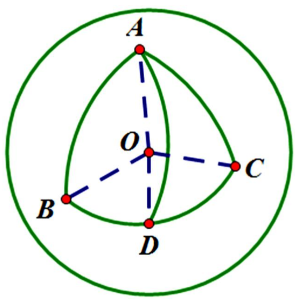

Figure 3. Interior angle bisector theorem of spherical triangle
图 3. 球面三角形的内角平分线定理

证明：必要性显然，现证充分性。

在球面三角形 ABD 和 ACD 中，有：

$$\frac{\sin\angle A-OD-B}{\sin\angle B-OA-D}=\frac{\sin\angle AOB}{\sin\angle BOD}=\frac{\sin\angle AOC}{\sin\angle COD}=\frac{\sin\angle A-OD-C}{\sin\angle C-OA-D}。$$

由于

$$\sin\angle A-OD-B=\sin\angle A-OD-C，$$

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51015. | CC-BY 4.0 Open Access | rec:1 July 2020, publ: 3 July 2020

又

$$\angle B-OA-C\neq\pi\text{，}$$

因此

$$\angle B-OA-D=\angle C-OA-D\text{。}$$

2.3. 球面三角形的外角平分线定理

如图 4 所示，BE 为球面 O 的直径。A、C、D 三点都在球面 O 上，且 B、C、D、E 四点都在同一个半圆周上，则二面角 $\angle C-OA-D=\angle D-OA-E$ 的充要条件为

$$\frac{\sin\angle AOB}{\sin\angle BOD}=\frac{\sin\angle AOC}{\sin\angle COD}=\frac{\sin\angle AOE}{\sin\angle DOE}\text{。}$$

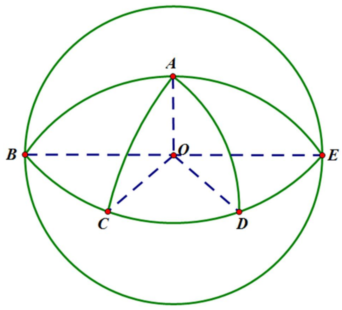

Figure 4. Exterior angle bisector theorem of spherical triangle
图 4. 球面三角形的外角平分线定理

证明：

1) 先证必要性

因为

$$\angle B-OA-D+\angle D-OA-E=\pi\text{，}$$

所以

$$\sin\angle B-OA-D=\sin\angle D-OA-E=\sin\angle C-OA-D\text{。}$$

在球面三角形 ABC 和 ABD 中，有：

$$\frac{\sin\angle AOB}{\sin\angle BOD}=\frac{\sin\angle A-OD-B}{\sin\angle B-OA-D}=\frac{\sin\angle A-OD-C}{\sin\angle C-OA-D}=\frac{\sin\angle AOC}{\sin\angle COD}\text{。}$$

再由前面定理可得：

$$\frac{\sin\angle AOB}{\sin\angle BOD}=\frac{\sin\angle AOC}{\sin\angle COD}=\frac{\sin\angle AOE}{\sin\angle DOE}\text{。}$$

2) 再证充分性

因为

$$\frac{\sin\angle AOB}{\sin\angle BOD}=\frac{\sin\angle A-OD-B}{\sin\angle B-OA-D}=\frac{\sin\angle A-OD-C}{\sin\angle C-OA-D}=\frac{\sin\angle AOC}{\sin\angle COD}\text{，}$$

又

$$\angle B-OA-D\neq\angle C-OA-D\text{，}$$

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51015. | CC-BY 4.0 Open Access | rec:1 July 2020, publ: 3 July 2020

所以

$$\angle B-OA-D+\angle C-OA-D=\angle B-OA-D+\angle D-OA-E=\pi\text{。}$$

即

$$\angle C-OA-D=\angle D-OA-E\text{。}$$

3. 球面三角形的梅涅劳斯(Menelaus)定理、塞瓦(Ceva)定理与等角共轭点

3.1. 球面三角形的梅涅劳斯(Menelaus)定理

O 为球面三角形 ABC 的球心。D、E、F 三点分别在 BC、AC、AB 所在的大圆圆周上，则 D、E、F 三点都在球面 O 的同一个大圆上的充要条件为

$$\frac{\sin\angle AOF}{\sin\angle BOF}\cdot\frac{\sin\angle BOD}{\sin\angle COD}\cdot\frac{\sin\angle COE}{\sin\angle AOE}=1\text{。}$$

证明：

如图 5 所示，不妨设 D、F 两点分别在 BC、AB 所对的大圆劣弧上，点 E 在 AC 所对的大圆优弧上，且 $\angle AOE=\angle AOC+\angle COE$ 。

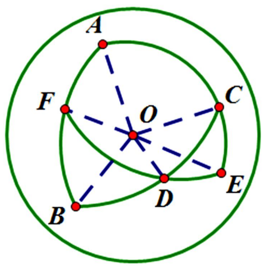

Figure 5. Menelaus theorem of spherical triangle
图 5. 球面三角形的梅涅劳斯定理

1) 先证必要性

因为

$$\frac{\sin\angle AOF}{\sin\angle AOE}=\frac{\sin\angle A-OE-F}{\sin\angle A-OF-E},$$

$$\frac{\sin\angle BOD}{\sin\angle BOF}=\frac{\sin\angle B-OF-D}{\sin\angle B-OD-F},$$

$$\frac{\sin\angle COE}{\sin\angle COD}=\frac{\sin\angle C-OD-E}{\sin\angle C-OE-D};$$

又

$$\angle A-OE-F=\angle C-OE-D,$$

$$\angle B-OD-F=\angle C-OD-E,$$

$$\angle B-OF-D+\angle A-OF-E=\pi;$$

所以

$$\frac{\sin\angle AOF}{\sin\angle BOF}\cdot\frac{\sin\angle BOD}{\sin\angle COD}\cdot\frac{\sin\angle COE}{\sin\angle AOE}=1\text{。}$$

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51015. | CC-BY 4.0 Open Access | rec:1 July 2020, publ: 3 July 2020

2) 再证充分性

设 D、E 所在的大圆圆周与 AB 所对的大圆劣弧相交于点 F'。由必要性可知

$$\frac{\sin\angle AOF'}{\sin\angle BOF'}\cdot\frac{\sin\angle BOD}{\sin\angle COD}\cdot\frac{\sin\angle COE}{\sin\angle AOE}=1,$$

又有

$$\frac{\sin\angle AOF}{\sin\angle BOF}\cdot\frac{\sin\angle BOD}{\sin\angle COD}\cdot\frac{\sin\angle COE}{\sin\angle AOE}=1,$$

因此

$$\frac{\sin\angle AOF'}{\sin\angle BOF'}=\frac{\sin\angle AOF}{\sin\angle BOF}。$$

令 $\angle AOF$、$\angle FOB$、$\angle AOF'$、$\angle F'OB$、$\angle FOF'$ 均为有向角，设 $\angle AOF=\alpha$，$\angle FOB=\beta$，$\angle FOF'=x$。有

$$\frac{\sin\angle AOF}{\sin\angle FOB}=\frac{\sin\angle AOF'}{\sin\angle F'OB}=\frac{\sin\left(\angle AOF+\angle FOF'\right)}{\sin\left(\angle F'OF+\angle FOB\right)}=\frac{\sin\left(\angle AOF+\angle FOF'\right)}{\sin\left(\angle FOB-\angle FOF'\right)},$$

即

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{\sin(\alpha+x)}{\sin(\beta-x)}。$$

解得

$$x=k\pi,\quad k\in Z。$$

若 $\angle FOF'=0$ 即 F' 与 F 两点重合，此时命题充分性显然得证；

若 $\angle FOF'=\pi$ 即 FF' 为球面 O 的直径时，由于 D、E、F' 三点都在球面 O 的同一个大圆上，故 D、E、F 三点也在球面 O 的同一个大圆上，命题充分性同样得证。

3.2. 球面三角形的塞瓦(Ceva)定理

如图 6 所示，O 为球面三角形 ABC 的球心。D、E、F 三点分别在 BC、AC、AB 所对的大圆劣弧上，则 AD、BE、CF 所对的三条大圆劣弧在球面三角形 ABC 内交于一点的充要条件是

$$\frac{\sin\angle AOF}{\sin\angle BOF}\cdot\frac{\sin\angle BOD}{\sin\angle COD}\cdot\frac{\sin\angle COE}{\sin\angle AOE}=1。$$

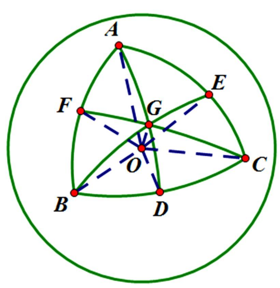

Figure 6. Ceva theorem of spherical triangle
图 6. 球面三角形的塞瓦定理

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51015. | CC-BY 4.0 Open Access | rec:1 July 2020, publ: 3 July 2020

证明：

1) 先证必要性

设 AD、BE、CF 所对的三条大圆劣弧在球面三角形 ABC 内交于点 G。

因为 B、G、E 三点都在同一大圆上，且这三点分别在球面三角形 ACD 的三条大圆弧所在的大圆圆周上，由球面三角形的梅涅劳斯定理可得

$$\frac{\sin\angle AOE}{\sin\angle COE}\cdot\frac{\sin\angle BOC}{\sin\angle BOD}\cdot\frac{\sin\angle DOG}{\sin\angle AOG}=1\text{。}$$

再有 C、G、F 三点都在同一大圆上，且这三点分别在球面三角形 ABD 的三条大圆弧所在的大圆圆周上，由球面三角形的梅涅劳斯定理可得

$$\frac{\sin\angle AOG}{\sin\angle DOG}\cdot\frac{\sin\angle COD}{\sin\angle BOC}\cdot\frac{\sin\angle BOF}{\sin\angle AOF}=1\text{。}$$

将上面两式相乘并整理可得：

$$\frac{\sin\angle AOF}{\sin\angle BOF}\cdot\frac{\sin\angle BOD}{\sin\angle COD}\cdot\frac{\sin\angle COE}{\sin\angle AOE}=1\text{。}$$

2) 再证充分性

设 CG 所在的大圆与 AB 所对的大圆劣弧相交于点 F'。由必要性可知

$$\frac{\sin\angle AOF'}{\sin\angle BOF'}=\frac{\sin\angle AOF}{\sin\angle BOF}\text{。}$$

设 $\angle AOF=\alpha$，$\angle BOF=\beta$，$\angle FOF'=x$。由于点 F 与点 F' 都在 AB 所对的大圆劣弧上，若点 F 在 AF' 所对的大圆劣弧上，有

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{\sin(\alpha+x)}{\sin(\beta-x)}\text{；}$$

同理，若点 F 在 BF' 所对的大圆劣弧上，有

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{\sin(\alpha-x)}{\sin(\beta+x)}\text{。}$$

无论是上面两种情况中的任何一种，均可解得

$$x=k\pi\text{，}\quad k\in Z\text{。}$$

若 $\angle FOF'=\pi$ 即 FF' 为球面 O 的直径时，由 $\angle AOB<\pi$ 可知点 F 与点 F' 不可能都在 AB 所对的大圆劣弧上，与题设矛盾。故点 F 与点 F' 必然重合。充分性得证。

3.3. 球面三角形的等角共轭点

如图 7 所示，O 为球面三角形 ABC 的球心。D、D' 在 BC 所对的大圆劣弧上，E、E' 在 AC 所对的大圆劣弧上，F、F' 在 AB 所对的大圆劣弧上。$\angle B-OA-D=\angle C-OA-D'$，$\angle A-OB-E=\angle C-OB-E'$，$\angle A-OC-F=\angle B-OC-F'$。若 AD、BE、CF 所对的三条大圆劣弧在球面三角形 ABC 内相交于点 G，则 AD'、BE'、CF' 所对的三条大圆劣弧在球面三角形 ABC 内也必相交于一点。

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51015. | CC-BY 4.0 Open Access | rec:1 July 2020, publ: 3 July 2020

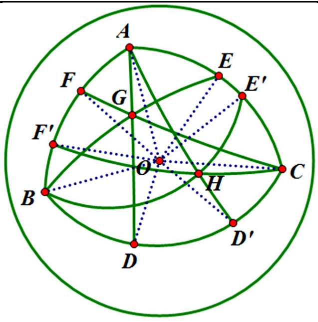

Figure 7. Isogonal conjugate points of spherical triangle
图 7. 球面三角形的等角共轭点

证明：由球面三角形的等角线定理可得：

$$\left(\frac{\sin\angle AOB}{\sin\angle AOC}\right)^2=\frac{\sin\angle BOD\cdot\sin\angle BOD'}{\sin\angle COD\cdot\sin\angle COD'}\text{；}$$

$$\left(\frac{\sin\angle BOC}{\sin\angle AOB}\right)^2=\frac{\sin\angle COE\cdot\sin\angle COE'}{\sin\angle AOE\cdot\sin\angle AOE'}\text{；}$$

$$\left(\frac{\sin\angle AOC}{\sin\angle BOC}\right)^2=\frac{\sin\angle AOF\cdot\sin\angle AOF'}{\sin\angle BOF\cdot\sin\angle BOF'}\text{。}$$

将上面三式相乘可得：

$$\frac{\sin\angle BOD\cdot\sin\angle BOD'}{\sin\angle COD\cdot\sin\angle COD'}\cdot\frac{\sin\angle COE\cdot\sin\angle COE'}{\sin\angle AOE\cdot\sin\angle AOE'}\cdot\frac{\sin\angle AOF\cdot\sin\angle AOF'}{\sin\angle BOF\cdot\sin\angle BOF'}=1\text{。}$$

若 AD、BE、CF 所对的三条大圆劣弧在球面三角形 ABC 内相交于点 G，则由球面三角形的塞瓦定理可得：

$$\frac{\sin\angle BOD}{\sin\angle COD}\cdot\frac{\sin\angle COE}{\sin\angle AOE}\cdot\frac{\sin\angle AOF}{\sin\angle BOF}=1\text{。}$$

因此

$$\frac{\sin\angle BOD'}{\sin\angle COD'}\cdot\frac{\sin\angle COE'}{\sin\angle AOE'}\cdot\frac{\sin\angle AOF'}{\sin\angle BOF'}=1\text{。}$$

即 AD' 、 BE' 、 CF' 所对的三条大圆劣弧在球面三角形 ABC 内也必相交于一点。命题得证。

设 AD' 、 BE' 、 CF' 所对的三条大圆劣弧在球面三角形 ABC 内相交于点 H，将点 G 与点 H 称作球面三角形 ABC 内的一对等角共轭点。

致　谢

敬请各位读者对于本文给予纠错指正。

参考文献

[1] 沈惠祥. 三面角的正弦定理及其应用[J]. 中学数学, 1996, 7: 13-15.

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.51015. | CC-BY 4.0 Open Access | rec:1 July 2020, publ: 3 July 2020