棱切球四面体各侧面内心连线的几何不等式

李兴源

广州一智通供应链管理有限公司，广州，中国
Email: lihpb@qq.com

收稿日期：2021年3月29日；发布日期：2021年4月2日

摘　要

四面体存在棱切球的充要条件是该四面体的三组对棱之和相等。对于存在棱切球的四面体，本文给出有关其各侧面内心连线与棱切球半径、该四面体体积的几何不等式。

关键词

四面体；棱切球；几何不等式

Geometric Inequalities of the Lines Between the Incenters in Each Side for a Edge-Tangent's Sphere Tetrahedron

Xingyuan Li

Guangzhou 1ziton Supply Chain Management Co., Ltd, Guangzhou, China
Email: lihpb@qq.com

Received: Mar. 28th, 2021, published: Apr. 2nd, 2021

Abstract

The sufficient and necessary condition for the tetrahedron to have a edge-tangent's sphere is that the sum of the three groups of opposite edges is equal in the tetrahedron. For a tetrahedron with a edge-tangent's sphere, we give some geometric inequalities about the lines between the incenters in each side, the radius of the edge-tangent's sphere and the volume of the tetrahedron in this paper.

Keywords

Tetrahedron, Edge-Tangent's Sphere, Geometric Inequalities

1. 引言

本文约定四面体 $A_0A_1A_2A_3$ 的各顶点 A_i 所对之底面三角形为 S_i， S_i 与 S_j 所夹的二面角表为 θ_{ij}，$0 \le i < j \le 3$。由文献[1]有以下关于四面体各二面角的正弦不等式：

$$\sum_{0\le i<j\le 3} \sin\theta_{ij} \le 4\sqrt{2}，\quad \sum_{0\le i<j\le 3} \sin^2\theta_{ij} \le \frac{16}{3}，\quad \prod_{0\le i<j\le 3} \sin\theta_{ij} \le \left(\frac{8}{9}\right)^3。$$

当且仅当四面体 $A_0A_1A_2A_3$ 为正四面体时，上面不等式中的等号成立。

2. 四面体棱切球的半径正弦定理

由文献[2]可知，若四面体 $A_0A_1A_2A_3$ 满足三组对棱之和相等，则四面体 $A_0A_1A_2A_3$ 存在棱切球。本文往后所证之几何不等式皆为存在棱切球的四面体之特例。设四面体 $A_0A_1A_2A_3$ 各顶点 A_0、A_1、A_2、A_3 所对之底面三角形 S_0、S_1、S_2、S_3 的内心分别为 I_0、I_1、I_2、I_3，棱切球球心为 L，棱切球半径为 r，用 θ_{ij} 表示 S_i 与 S_j 所夹的二面角，则

$$r = \frac{I_iI_j}{\sin\theta_{ij}} = \frac{I_iI_j}{\sin\angle I_iLI_j}，\quad 0 \le i < j \le 3。[3]$$

证明：如图 1 所示，设四面体 $A_0A_1A_2A_3$ 的棱切球在各棱 A_iA_j 上的切点为 M_{ij}。

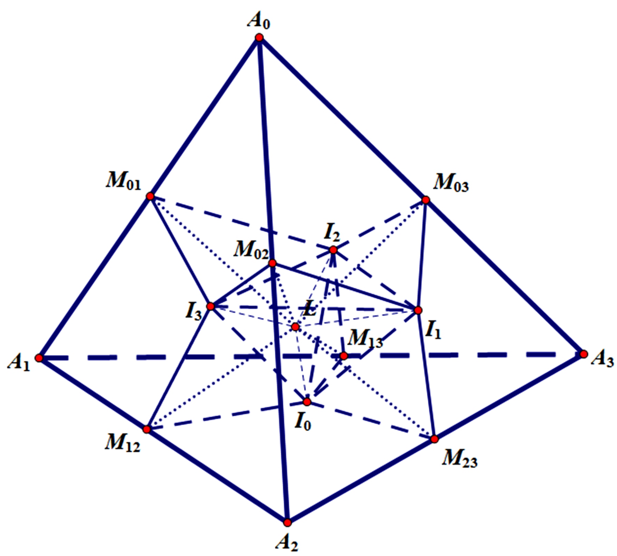

Figure 1. Radius sine theorem of the tetrahedron edge-tangent's sphere
图 1. 四面体棱切球的半径正弦定理

令 $0 \le k < l \le 3$，i、j、k、l 均为整数且互不相等。根据四面体棱切球的性质可知，I_iL、I_jL 分别垂直于面 S_i、S_j 于 I_i、I_j，故 L、I_i、I_j、M_{kl} 四点共圆。因此

$$r = LM_{ij}，\quad \angle I_iM_{kl}I_j = \theta_{ij} = \pi - \angle I_iLI_j。$$

对于三角形 $I_iI_jM_{kl}$ 与 $I_jM_{kl}L$，由正弦定理可得

$$r = LM_{kl} = \frac{LM_{kl}}{\sin\angle LI_jM_{kl}} = \frac{I_jM_{kl}}{\sin\angle I_jLM_{kl}} = \frac{I_jM_{kl}}{\sin\angle M_{kl}I_iI_j} = \frac{I_iI_j}{\sin\theta_{ij}} = \frac{I_iI_j}{\sin\angle I_iLI_j}。$$

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.61007. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 29 April 2021, publ: 2 March 2021

3. 棱切球四面体各侧面内心连线与棱切球半径的几何不等式

若四面体 $A_0A_1A_2A_3$ 存在棱切球，本文将四面体 $A_0A_1A_2A_3$ 称作棱切球四面体。设棱切球四面体 $A_0A_1A_2A_3$ 的棱切球半径为 r。在棱切球四面体 $A_0A_1A_2A_3$ 中：各顶点 A_i 所对之底面三角形 S_i 的内心为 I_i，$0\le i\le 3$。则

$$\sum_{0\le i<j\le 3} I_iI_j \le 4\sqrt{2}\cdot r,\quad \sum_{0\le i<j\le 3} I_iI_j^2 \le \frac{16}{3}r^2,\quad \prod_{0\le i<j\le 3} I_iI_j \le \left(\frac{8}{9}\right)^3 r^6。$$

当且仅当四面体 $A_0A_1A_2A_3$ 为正四面体时，上面不等式中的等号成立。

证明：用 θ_{ij} 表示 S_i 与 S_j 所夹的二面角，由四面体棱切球的半径正弦定理可知

$$I_iI_j = r\cdot\sin\theta_{ij},\quad 0\le i<j\le 3;$$

再由引言可得

$$\sum_{0\le i<j\le 3} I_iI_j = r\cdot\sum_{0\le i<j\le 3}\sin\theta_{ij} \le 4\sqrt{2}\cdot r,$$

$$\sum_{0\le i<j\le 3} I_iI_j^2 = r^2\cdot\sum_{0\le i<j\le 3}\sin^2\theta_{ij} \le \frac{16}{3}r^2,$$

$$\prod_{0\le i<j\le 3} I_iI_j = r^6\cdot\prod_{0\le i<j\le 3}\sin\theta_{ij} \le \left(\frac{8}{9}\right)^3 r^6。$$

4. 棱切球四面体体积的几何不等式

设棱切球四面体 $A_0A_1A_2A_3$ 的棱切球半径为 r，体积为 V。在棱切球四面体 $A_0A_1A_2A_3$ 中：

$$A_iA_j = a_i + a_j,\quad 0\le i<j\le 3,\quad a_i, a_j > 0。$$

4.1. 棱切球四面体体积与棱切球半径的关系

根据文献[4]，有

$$Vr = \frac{2}{3}a_0a_1a_2a_3,\quad Vr \le \frac{1}{24}\prod_{0\le i<j\le 3}\left(a_i+a_j\right)^{\frac{2}{3}}。$$

当且仅当四面体 $A_0A_1A_2A_3$ 为正四面体时，上面不等式中的等号成立。

4.2. 棱切球四面体体积与各侧面内心连线的几何不等式

在棱切球四面体 $A_0A_1A_2A_3$ 中：各顶点 A_i 所对之底面三角形 S_i 的内心为 I_i，$0\le i\le 3$。则

$$V\cdot\sum_{0\le i<j\le 3} I_iI_j \le \frac{8\sqrt{2}}{3}\cdot a_0a_1a_2a_3,\quad V\cdot\sum_{0\le i<j\le 3} I_iI_j \le \frac{\sqrt{2}}{6}\prod_{0\le i<j\le 3}\left(a_i+a_j\right)^{\frac{2}{3}};$$

$$V^2\cdot\sum_{0\le i<j\le 3} I_iI_j^2 \le \frac{64}{27}\left(a_0a_1a_2a_3\right)^2,\quad V^2\cdot\sum_{0\le i<j\le 3} I_iI_j^2 \le \frac{1}{108}\prod_{0\le i<j\le 3}\left(a_i+a_j\right)^{\frac{4}{3}};$$

$$V\cdot\prod_{0\le i<j\le 3}\sqrt[6]{I_iI_j} \le \frac{4\sqrt{2}}{9}a_0a_1a_2a_3,\quad V\cdot\prod_{0\le i<j\le 3}\sqrt[6]{I_iI_j} \le \frac{\sqrt{2}}{36}\prod_{0\le i<j\le 3}\left(a_i+a_j\right)^{\frac{2}{3}}。$$

当且仅当四面体 $A_0A_1A_2A_3$ 为正四面体时，上面不等式中的等号成立。

证明：根据棱切球四面体各侧面内心连线与棱切球半径的几何不等式有

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.61007. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 29 April 2021, publ: 2 March 2021

$$V\cdot\sum_{0\le i<j\le 3}I_iI_j\le 4\sqrt{2}\cdot Vr=4\sqrt{2}\cdot\frac{2}{3}a_0a_1a_2a_3=\frac{8\sqrt{2}}{3}\cdot a_0a_1a_2a_3\text{；}$$

$$V\cdot\sum_{0\le i<j\le 3}I_iI_j\le 4\sqrt{2}\cdot Vr\le 4\sqrt{2}\cdot\frac{1}{24}\prod_{0\le i<j\le 3}\left(a_i+a_j\right)^{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{2}}{6}\prod_{0\le i<j\le 3}\left(a_i+a_j\right)^{\frac{2}{3}}\text{；}$$

$$V^2\cdot\sum_{0\le i<j\le 3}I_iI_j^2\le\frac{16}{3}V^2r^2=\frac{16}{3}\cdot\frac{4}{9}\left(a_0a_1a_2a_3\right)^2=\frac{64}{27}\left(a_0a_1a_2a_3\right)^2\text{；}$$

$$V^2\cdot\sum_{0\le i<j\le 3}I_iI_j^2\le\frac{16}{3}V^2r^2\le\frac{16}{3}\cdot\left(\frac{1}{24}\right)^2\prod_{0\le i<j\le 3}\left(a_i+a_j\right)^{\frac{4}{3}}=\frac{1}{108}\prod_{0\le i<j\le 3}\left(a_i+a_j\right)^{\frac{4}{3}}\text{；}$$

$$V^6\cdot\prod_{0\le i<j\le 3}I_iI_j\le\left(\frac{8}{9}\right)^3V^6r^6=\left(\frac{8}{9}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^6\left(a_0a_1a_2a_3\right)^6=\frac{2^{15}}{3^{12}}\left(a_0a_1a_2a_3\right)^6\text{；}$$

$$V^6\cdot\prod_{0\le i<j\le 3}I_iI_j\le\left(\frac{8}{9}\right)^3V^6r^6\le\left(\frac{8}{9}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{24}\right)^6\prod_{0\le i<j\le 3}\left(a_i+a_j\right)^4=\frac{1}{8^3\cdot 3^{12}}\prod_{0\le i<j\le 3}\left(a_i+a_j\right)^4\text{。}$$

将上面最后两个不等式开六次方根即得

$$V\cdot\prod_{0\le i<j\le 3}\sqrt[6]{I_iI_j}\le\frac{4\sqrt{2}}{9}a_0a_1a_2a_3\text{，}\quad V\cdot\prod_{0\le i<j\le 3}\sqrt[6]{I_iI_j}\le\frac{\sqrt{2}}{36}\prod_{0\le i<j\le 3}\left(a_i+a_j\right)^{\frac{2}{3}}\text{。}$$

参考文献

[1] 王学斌. E_n 空间二面角的另一类不等式[J]. 岳阳师范学院学报, 2000, 13(4): 6-11.
[2] 贺斌. 四面体存在棱切球的一个充要条件[J]. 中学数学月刊, 1998, 3: 46.
[3] 翁玉中. 关于多面体的棱切球的存在性[J]. 中学数学月刊, 1997, 8: 14-16.
[4] 林祖成. n 维单形的棱切超球[J]. 数学实践与认识, 1995, 4: 90-93.

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.61007. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 29 April 2021, publ: 2 March 2021