N维单形各侧面垂足与重心的几何不等式

张　琪

张琪数学研究所，香港
Email: 742096830@qq.com

收稿日期：2021年4月28日；发布日期：2021年4月30日

摘　要

本文证明了n维单形各顶点在其所对侧面的垂足所组成的垂足单形之体积小于等于原n维单形各侧面重心所组成的重心单形之体积，等号当且仅当该n维单形为正则单形时成立。

关键词

n维单形，垂足，几何不等式

Geometric Inequalities of Pedal and Centroid in Each Side of N-Simplex

Qi Zhang

Qi Zhang Institute of Mathematics, Hong Kong
Email: 742096830@qq.com

Received: Apr. 28th, 2021, published: Apr. 30th, 2021

Abstract

This paper proves that the volume of the pedal simplex composed of the pedals about the vertexes of the n-simplex on the opposite sides is less than or equal to the volume of the centroid simplex composed of the centroids in each side of the primitive n-simplex, the equal sign can be tenable if and only if the n-simplex is regular.

Keywords

N-Simplex, Pedal, Geometric Inequalities

1. 引言

设 n 维单形 $A_0A_1A_2\cdots A_n$ 的体积为 V，顶点 A_i 所对的 $n-1$ 维侧面体积为 S_i，S_i 与 S_j 所夹的二面角为 θ_{ij}，S_i 与 S_j 相交处的 $n-2$ 维单形体积为 f_{ij}， $0\le i\ne j\le n$， $n\ge 3$。

首先介绍几个引理。

引理 1 $V=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{S_iS_j}{f_{ij}}\cdot\sin\theta_{ij}$。

引理 2 $S_i=\sum\limits_{j=0,j\ne i}^{n}S_j\cos\theta_{ij}$ 。

引理 3 $\sum\limits_{0\le i<j\le n}\cos^2\theta_{ij}\ge\frac{n+1}{2n}$。等号当且仅当 n 维单形 $A_0A_1A_2\cdots A_n$ 为正则单形时成立。

引理 1 的证明详见文[1]，引理 2 和引理 3 的证明详见文[2]。

2. 主要结论

定理设 n 维单形 $A_0A_1A_2\cdots A_n$ 的体积为 $V\left(A_0A_1A_2\cdots A_n\right)$，顶点 A_i 所对的 $n-1$ 维侧面体积为 S_i，A_i 在 S_i 上的垂足为 H_i，S_i 的重心为 G_i，$0\le i\le n$。则 n 维单形 $H_0H_1H_2\cdots H_n$ 的体积小于等于 n 维单形 $G_0G_1G_2\cdots G_n$ 的体积，即

$$V\left(H_0H_1H_2\cdots H_n\right)\le V\left(G_0G_1G_2\cdots G_n\right)=\frac{n-1}{2n}V\left(A_0A_1A_2\cdots A_n\right)。$$

等号当且仅当 n 维单形 $A_0A_1A_2\cdots A_n$ 为正则单形时成立。

证明：设 S_i 与 S_j 所夹的二面角为 θ_{ij}， S_i 与 S_j 相交的 $n-2$ 维单形体积为 f_{ij}， $0\le i\ne j\le n$， $n\ge 3$。

在 $n-1$ 维侧面 S_i 中，令 $S\left(G_if_{ij}\right)$ 为 G_i 与 f_{ij} 所围的 $n-1$ 维单形体积。$V\left(G_{ij}\right)$ 为 G_i、 G_j 与 f_{ij} 所围的 n 维单形体积。根据重心的性质和引理 1 可知

$$S\left(G_if_{ij}\right)=\frac{S_i}{n}，\quad V\left(G_{ij}\right)=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{S\left(G_if_{ij}\right)\cdot S\left(G_jf_{ij}\right)}{f_{ij}}\cdot\sin\theta_{ij}=\frac{1}{n^2}V\left(A_0A_1A_2\cdots A_n\right)。$$

因此

$$V\left(G_0G_1G_2\cdots G_n\right)=V\left(A_0A_1A_2\cdots A_n\right)-\sum_{0\le i<j\le n}V\left(G_{ij}\right)=\frac{n-1}{2n}V\left(A_0A_1A_2\cdots A_n\right)。$$

再令 $S\left(H_if_{ij}\right)$ 为 H_i 与 f_{ij} 所围的 $n-1$ 维单形体积。$V\left(H_{ij}\right)$ 为 H_i、 H_j 与 f_{ij} 所围的 n 维单形体积。根据垂足的性质和引理 1、引理 2 可知

$$S\left(H_if_{ij}\right)=S_j\cos\theta_{ij}，\quad V\left(H_{ij}\right)=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{S\left(H_if_{ij}\right)\cdot S\left(H_jf_{ij}\right)}{f_{ij}}\cdot\sin\theta_{ij}=V\left(A_0A_1A_2\cdots A_n\right)\cos^2\theta_{ij}。$$

因此

$$V\left(H_0H_1H_2\cdots H_n\right)=V\left(A_0A_1A_2\cdots A_n\right)-\sum_{0\le i<j\le n}V\left(H_{ij}\right)=\left(1-\sum_{0\le i<j\le n}\cos^2\theta_{ij}\right)V\left(A_0A_1A_2\cdots A_n\right)。$$

将引理 3 代入上式即得

$$V\left(H_0H_1H_2\cdots H_n\right)\le\frac{n-1}{2n}V\left(A_0A_1A_2\cdots A_n\right)。$$

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.61008. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 28 April 2021, publ: 30 April 2021

故

$$V\left(H_0H_1H_2\cdots H_n\right)\le V\left(G_0G_1G_2\cdots G_n\right)=\frac{n-1}{2n}V\left(A_0A_1A_2\cdots A_n\right)。$$

等号当且仅当 n 维单形 $A_0A_1A_2\cdots A_n$ 为正则单形时成立。

参考文献

[1] 苏化明. 关于单形二面角平分面面积的不等式[J]. 数学杂志, 1992, 12(3): 315-318.

[2] 王学斌. E_n 空间二面角的另一类不等式[J]. 岳阳师范学院学报, 2000, 13(4): 6-11.

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.61008. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 28 April 2021, publ: 30 April 2021