孪生素数[1]

区国平

西樵镇太平国兴小区国兴二街6号，广东 佛山
Email: 3299581878@QQ.COM

收稿日期：2021年2月7日；发布日期：2021年2月9日

摘 要

运用等差数列的概念去设想，证明孪生素数是无穷的。

关键词

‘孪生素数若是无穷的’那它所须的充要条件，孪生素数是无穷的

A Prime Number Theory

Guoping Ou

No.6, Guoxing 2nd Street, Taiping Guoxing community, Xiqiao Town, Guangdong Foshan
Email: 3299581878@QQ.COM

Received: Feb. 7nd, 2021, published: Feb.9nd, 2021

Abstract

Using the elementary method, we discuss and prove that the twin prime numbers are infinite.

Keywords

A Necessary and Sufficient Condition for the Existence of An Infinite Number of Twin Prime Numbers, The Prime Twins Are Infinite

1. 引言

因>3 的素数都必形如 $6n-1$ 或 $6n+1$ 的奇数。故若 n 取某一正整数时，$6n-1$ 和 $6n+1$ 这两个数如

[1] 文中所论述的形如 $6n-1$ 和 $6n+1$ 的数，都是正整数。即论述中 n 的值域都是 $n \in N^*$，不逐一地注明。并把具有无限多项的等差数列，称作无穷等差数列。又论述中的数列都是递增数列，也不逐一地注明。

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.61005. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 7 February 2021, publ: 9 February 2021

果都是素数，那就是孪生素数了。下面是对‘孪生素数’的论述。

2. 形如 6n − 1 和 6n + 1 的这些正整数中 n 的值是可以定义的

由于 n 取任意一正整数时，6n − 1 和 6n + 1 这两个数都必然是相互之差等于 2 的相邻奇数。所以当 n ∈ N^*时，就必然有无穷多组形如 6n − 1 和 6n + 1 这相互之差等于 2 的相邻奇数。

又由于 n 取任意一正整数时，6n − 1 和 6n + 1 这两个数都必然是相互之差等于 2 的相邻奇数。故当 n 取某一正整数时，若 6n − 1 和 6n + 1 这相邻奇数都是素数，那就是‘孪生素数’。而如果当 n 取某一正整数时，若 6n − 1 和 6n + 1 这相邻奇数都是合数或其中一个是合数，那就必然一定是‘非孪生素数’了。因而这可以说：当 n ∈ N^* 时的这每一组形如 6n − 1 和 6n + 1 的相邻奇数，若不是‘孪生素数’那就必然是‘非孪生素数’。若不是‘非孪生素数’那就必然是‘孪生素数’。

即是说，形如 6n − 1 和 6n + 1 的这些正整数中 n 的值，它不是能使 6n − 1 和 6n + 1 这相邻奇数都是素数，那就必然是能使 6n − 1 和 6n + 1 这相邻奇数都是合数或其中一个是合数。

而因为 n ∈ N^*，故 n 它就有无限多个的值。而 n 它的这无限多个的值必然是1, 2, 3, 4, 5, ⋯ 这公差 d = 1 的无穷等差数列中每项的数。所以，形如 6n − 1 和 6n + 1 的这些数当中 n 的值，它必然也是表示每个形如 6n − 1 和 6n + 1 的数的序号。如：当 n = 2 时，即那第二(2)个形如 6n − 1 的数是 11，那第二(2)个形如 6n + 1 的数是 13。

因而，那些形如 6n − 1 和 6n + 1 的相邻奇数如果都是素数时，那 n 所取的这些值则可以定义为**‘孪生素数的序号’**。而那些形如 6n − 1 和 6n + 1 的相邻奇数如果都是合数或其中一个是合数时，那 n 所取的这些值则可以定义为**‘非孪生素数的序号’**。即形如 6n − 1 和 6n + 1 的这些正整数中 n 的值是可以定义的。

这样，即对于这些形如 6n − 1 和 6n + 1 的正整数来说，它们中 n 的值，若不是‘孪生素数的序号’就必然是‘非孪生素数的序号’，若不是‘非孪生素数的序号’就必然是‘孪生素数的序号’。

因 n ∈ N^* 时就必有无穷多组形如 6n − 1 和 6n + 1 的相邻奇数。而又因 n 的值如果使 6n − 1 和 6n + 1 这相邻奇数都是素数时则就必然是‘孪生素数’，并且这时 n 的值则定义了为‘孪生素数的序号’。**所以‘孪生素数的序号’若是无穷的，那孪生素数就是无穷的了。若孪生素数是无穷的，那‘孪生素数的序号’也就必然是无穷的。**故根据这一原理就可以找出‘孪生素数若是无穷的’它所须的条件。

3. 导出‘孪生素数若是无穷的’那它所须的充要条件

如 2 中所论，形如 6n − 1 和 6n + 1 这些正整数中 n 的值，若不是‘孪生素数的序号’就必然是‘非孪生素数的序号’，若不是‘非孪生素数的序号’就必然是‘孪生素数的序号’。因 n ∈ N^*，故如 2 中所论，n 它是有无限多个的值。而 n 它的这无限多个的值必然是依次地排列的1, 2, 3, 4, 5, ⋯ 这公差 d = 1 的无穷等差数列中每项的数。

所以对于形如 6n − 1 和 6n + 1 的这些正整数来说，如果 n 它的这无限多个依次排列的值1, 2, 3, 4, 5, ⋯ 当中的不论是哪一个值，它后面的这些值如果都不会全部是属于‘非孪生素数的序号’，这就说明了 n 它的这无限多个依次排列的值1, 2, 3, 4, 5, ⋯ 当中的不论是哪一个值，它后面的这些值就一定都必存在着是属于‘孪生素数的序号’了。这样，那‘孪生素数的序号’就必然是无穷的了。因而孪生素数这就一定是无穷的。

而由于 n 它的这无限多个依次排列的值1, 2, 3, 4, 5, ⋯ 是一个公差 d = 1 的无穷等差数列，故 n 它的这无限多个依次排列的值1, 2, 3, 4, 5, ⋯ 当中的不论是哪一个值，它后面的这些值的依次排列都必仍然是一个

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.61005. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 7 February 2021, publ: 9 February 2021

公差 $d = 1$ 的无穷等差数列。

因此，形如 $6n-1$ 和 $6n+1$ 的这些正整数中的 n 它这无限多个依次排列的值 $1, 2, 3, 4, 5, \cdots$ 当中，如果那些是属于‘非孪生素数的序号’的这些值，若不论是以哪一个值作首项去进行排列，都总是不能排列出一个公差 $d = 1$ 的无穷等差数列，那就说明了 n 它的这无限多个依次排列的值 $1, 2, 3, 4, 5, \cdots$ 当中的不论是哪一个值，它后面的这些值就必然一定不会全部都是属于‘非孪生素数的序号’了。即都必有是属于‘孪生素数的序号’。这样，那‘孪生素数的序号’就一定是无穷的。

又因为如 2 中的定义所论，‘非孪生素数的序号’是那些形如 $6n-1$ 和 $6n+1$ 的合数的这些序号。即这是说，那些形如 $6n-1$ 和 $6n+1$ 的合数的这些序号当中，若不论是用哪一个序号作首项去进行排列，如果都总是不能排列出一个公差 $d = 1$ 的无穷等差数列，那‘孪生素数的序号’这就是无穷的了。而由于‘孪生素数的序号’是无穷的，那孪生素数这就一定是无穷的。所以那些形如 $6n-1$ 和 $6n+1$ 的合数的这些所有序号当中，不论是用哪一个序号作为首项去进行排列，都总是不能排列出一个公差 $d = 1$ 的无穷等差数列，这即就是‘孪生素数若是无穷的’它所须的条件，并且必然就是所须的充要条件了。

因此，只须证明了所有形如 $6n-1$ 和 $6n+1$ 的合数的这些序号当中，不论是用哪一个序号作首项去进行排列，都总是不能排列出一个公差 $d = 1$ 的无穷等差数列，那孪生素数就是无穷的了。所以，若要证明孪生素数是否无穷的，就必须找出所有形如 $6n-1$ 的合数以及所有形如 $6n+1$ 的合数的这些序号。

4. 形如 $6n-1$ 和 $6n+1$ 的合数的这些序号

因形如 $6n-1$ 和 $6n+1$ 的合数，都是奇数中的合数。所以下面通过解析奇数中的合数，去求出所有形如 $6n-1$ 和 $6n+1$ 的合数的这些序号。

解析 1.

∵形如 $6n-1$ 和 $6n+1$ 的合数，都是奇数中的合数，即都是奇合数。

又∵奇合数也是奇数，且奇数只能是被奇数整除。故根据合数的概念，那每一个的奇合数都必然一定是等于两个>1 的奇数的乘积。

∴若设：$2x+1$ 和 $2y+1$ $(x, y \in N^*)$分别是两个 >1 的奇数。

那么：$(2x+1)(2y+1) = 4xy + 2x + 2y + 1$。因而 $4xy + 2x + 2y + 1$ 它是任意奇合数的表达式了。即所有每一个奇合数都是形如 $4xy + 2x + 2y + 1$ 的数。形如 $4xy + 2x + 2y + 1$ 的数都是奇合数。**(论述中 x，y 的取值范围都是 $x, y \in N^*$，不逐一注明。)**

∵形如 $6n-1$ 和 $6n+1$ 的合数都是奇合数。而每个奇合数都是形如 $4xy + 2x + 2y + 1$ 的数，且每个形如 $4xy + 2x + 2y + 1$ 的数都是奇合数，即都是合数。

∴形如 $4xy + 2x + 2y + 1$ 的这些数当中，那些也是形如 $6n-1$ 和 $6n+1$ 的数，这就必然是形如 $6n-1$ 和 $6n+1$ 的合数了。

∵$n \in N^*$，故 n 它的值必然是 $1, 2, 3, 4, 5, \cdots$ 这公差 $d = 1$ 的无穷等差数列中每项的数。

∴$6n-1$ 和 $6n+1$ 中 n 的值，它必然也是表示每个形如 $6n-1$ 和 $6n+1$ 的数分别的序号。如：$n = 4$ 时，即那第四(4)个形如 $6n-1$ 的数是 23，那第四(4)个形如 $6n+1$ 的数是 25.也是说，每个形如 $6n-1$ 的合数和每个形如 $6n+1$ 的合数分别都必有它的序号。

∴只须在这些形如 $4xy + 2x + 2y + 1$ 的合数中，找出那些也是形如 $6n-1$ 和 $6n+1$ 的数而 n 相应分别所该取的这些值，那就是形如 $6n+1$ 和 $6n+1$ 这些合数分别的这些序号了。

解析 2.

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.61005. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 7 February 2021, publ: 9 February 2021

如解析 1 所论，每个奇合数都形如 $4xy + 2x + 2y + 1$ 的数。而又因 x，y $\in N^*$，所以可以把 $4xy + 2x + 2y + 1$ 中 x 的值划分为 $x = 1 + 3k$，$x = 2 + 3k$，$x = 3 + 3k$ (k $\in$ N)三大类。

∵在 $4xy + 2x + 2y + 1$ 中，当 $x = 1 + 3k$ 时

得：$4y(1 + 3k) + 2(1 + 3k) + 2y + 1 = 6(2ky + k + y) + 3$。

而∵$6(2ky + k + y) + 3$ 的数，都是形如 $6n + 3$ 的数，且 $6n + 3 \neq 6n - 1 \neq 6n + 1$。

∴当 $x = 1 + 3k$ (k $\in$ N)时这些形如 $4xy + 2x + 2y + 1$ 的合数当中是不存在形如 $6n - 1$ 和 $6n + 1$ 的合数。

又如解析 1 所论，形如 $6n - 1$ 和 $6n + 1$ 的合数是奇合数，奇合数都形如 $4xy + 2x + 2y + 1$ 的数，而因为 $x = 1 + 3k$ (k $\in$ N)时，这些形如 $4xy + 2x + 2y + 1$ 的合数当中，是不存在形如 $6n - 1$ 和 $6n + 1$ 的合数。又因为 $4xy + 2x + 2y + 1$ 中 x 的值，它是可划分为 $x = 1 + 3k$ 和 $x = 2 + 3k$ 及 $x = 3 + 3k$ 这三大类。且 $1 + 3k \neq 2 + 3k \neq 3 + 3k$。

∴只有当 $x = 2 + 3k$ 和 $x = 3 + 3k$ (k $\in$ N)时，这些形如 $4xy + 2x + 2y + 1$ 的合数，才含有并且是含有了所有形如 $6n - 1$ 和 $6n + 1$ 的合数。

下面的解析 3~6 是解析及求出了所有形如 $6n - 1$ 和 $6n + 1$ 这些合数，它们中分别的 n 相应所该取的这些值。

解析 3.

∵当 $x = 2 + 3k$ 和 $x = 3 + 3k$ (k $\in$ N)时，这些形如 $4xy + 2x + 2y + 1$ 的合数是必含有了所有形如 $6n - 1$ 和 $6n + 1$ 的合数。

∴❶首先设：$4xy + 2x + 2y + 1 = 6n - 1$。并首先以 $x = 2 + 3k$ (k $\in$ N)代入这等式中

那么得：$4y(2 + 3k) + 2(2 + 3k) + 2y + 1 = 6n - 1$

故得：$6n = 12ky + 6k + 10y + 6$。即 $n = 2ky + k + 1 + 5y \div 3$

∵$n \in N^*$，即 n 必须是正整数。且 $k \in N$

∴$n = 2ky + k + 1 + 5y \div 3$ 这等式中，y 必须是 $y = 3 + 3t$ 的数($t \in N$)等式才成立。

故以 $y = 3 + 3t$ 代入 $n = 2ky + k + 1 + 5y \div 3$ 这等式中

得：$n = 2k(3 + 3t) + k + 1 + 5(3 + 3t) \div 3$。即：$n = k(6t + 7) + 5t+6$

∵$k \in N$。故在 $n = k(6t + 7) + 5t + 6$ 等式中，令 $k = 0,1,2,3,\cdots,u,\cdots$ 依次分别去取值**(为避免混淆，这里以 u 替代惯用的 n。)**

∴得：$k = 0$ 时，有 $n_1 = 5t + 6$

$k = 1$ 时，有 $n_2 = 11t + 13$

$k = 2$ 时，有 $n_3 = 17t + 20$

……

$k = u$ 时，有 $n_u = 5t + 6 + (u - 1)(6t + 7)$

……

即 $n = k(6t + 7) + 5t + 6$ 中，令 $k = 0,1,2,3,\cdots,u,\cdots$ 依次分别去取值，那就必然得到了：

$n_1 = 5t+6, n_2 = 11t+13, n_3 = 17t+20,\cdots, n_u = 5t+6+(u-1)(6t+7),\cdots$. 这存在着$(6t + 7)$作为公差的无限多个等式。

又∵$t \in N$

∴ $n_1 = 5t+6, n_2 = 11t+13, n_3 = 17t+20,\cdots, n_u = 5t+6+(u+1)(6t+7),\cdots$. 这无限多个分别的等式中，令 $t = 0,1,2,3,\cdots$ 连续不断的去取值，就必然得到了无限多个的无穷等差数列。且以 $m \in N^*$表示这些数

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.61005. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 7 February 2021, publ: 9 February 2021

列中的项的序号。

即：$n_1 = 5t + 6$ 中，令 $t = 0,1,2,3,\cdots$

得：$n_1 = 6,11,16,21,\cdots$ 是一个无穷等差数列$\{a_m = 5m + 1\}$ (A_1)

而 $n_2 = 11t + 13$ 中，令 $t = 0,1,2,3,\cdots$

得：$n_2 = 13,24,35,46,\cdots$ 是一个无穷等差数列$\{a_m = 11m + 2\}$ (A_2)

而 $n_3 = 17t + 20$ 中，令 $t = 0,1,2,3,\cdots$

得：$n_3 = 20,37,54,71,\cdots$ 是一个无穷等差数列$\{a_m = 17m + 3\}$ (A_3)

……

即 $n_1,n_2,n_3,\cdots$ 这无限多个等式中，分别都令 $t = 0,1,2,3,\cdots$ 连续不断的去取值，就必然得到了 $(A_1),(A_2),(A_3),\cdots$ 这组无限多个的无穷等差数列。把这组无限多个的数列设为 A 组中的数列。

∵如 n_1，n_2，n_3 等式中所得到的(A_1)，(A_2)，(A_3)这三个无穷等差数列，它们分别都必然是以等式中 t 的系数作公差的。以等式中当 $t = 0$ 所得的值作首项的。而 $n_1,n_2,n_3,\cdots$ 这无限多个的等式中，等式与等式之间是存在($6t + 7$)的公差。

∴在作为等式与等式之间的公差 $6t + 7$ 中，t 的系数 6 就必然是 $(A_1),(A_2),(A_3),\cdots$ 这些数列中，数列与数列的公差之间所存在的公差。$6t + 7$ 中当 $t = 0$ 所得到的 7 这个值就必然是 $(A_1),(A_2),(A_3),\cdots$ 这些数列中，数列与数列的首项之间所存在的公差。即 $(A_1),(A_2),(A_3),\cdots$ 这无限多个的无穷等差数列中，从第二个数列开始，每个数列的首项与前一数列的首项之间是存在公差的。每个数列的公差与前一数列的公差之间也是存在公差的。

∴只须按照数列(A_1)，(A_2)，(A_3)它们中的首项与首项之间及公差与公差之间，分别所存在的公差去推算，这就能得到每个数列的下一个数列了。即不断的依次去推算，那就能得到 A 组中的这无限多个的无穷等差数列了。

因此 $x = 2 + 3k$ ($k \in N$)时这些形如 $4xy + 2x + 2y + 1$ 的合数当中，那些也是形如 $6n - 1$ 的合数而 n 分别相应所须取的那些值，必然一定是 A 组中它那规律性排列的：

$\{a_m = 5m+1\},\{a_m = 11m+2\},\{a_m = 17m+3\},\cdots$ 这无限多个数列中的这些数。

解析 4.

∵当 $x = 2 + 3k$ 和 $x = 3 + 3k$ ($k \in N$)时，这些形如 $4xy + 2x + 2y + 1$ 的合数是必含有了所有形如 $6n - 1$ 的合数。而解析 3 已对 $x = 2 + 3k$ 时这些形如 $4xy + 2x + 2y + 1$ 的合数当中，那些同时也是形如 $6n - 1$ 的合数进行了解析。

∴❷设：$4xy + 2x + 2y + 1 = 6n – 1$。且以 $x = 3 + 3k$ ($k \in N$)代入这等式中

那么得：$4y(3 + 3k) + 2(3 + 3k) + 2y + 1 = 6n - 1$

故得：$6n = 12ky + 6k + 14y + 8$。即 $n = 2ky + k + (7y + 4) \div 3$

∵$n \in N^*$，即 n 必须是正整数。且 $k \in N$

∴$n = 2ky + k + (7y + 4) \div 3$ 这等式中，y 必须是 $y = 2 + 3t$ 的数($t \in N$)等式才成立。故以 $y = 2 + 3t$ 代入 $n = 2ky + k + (7y + 4) \div 3$ 这等式中

得：$n = 2k(2 + 3t) + k + [7(2 + 3t) + 4] \div 3$。即：$n = k(6t + 5) + 7t + 6$

∵$k \in N$。故在 $n = k(6t + 5) + 7t + 6$ 等式中，令 $k = 0,1,2,3,\cdots,u,\cdots$ 依次分别去取值

∴得：$k = 0$ 时，有 $n_1 = 7t + 6$

$k = 1$ 时，有 $n_2 = 13t + 11$

$k = 2$ 时，有 $n_3 = 19t + 16$

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.61005. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 7 February 2021, publ: 9 February 2021

……

$k = u$ 时，有 $n_u = 7t + 6 + (u - 1)(6t + 5)$

……

即 $n = k(6t + 5) + 7t + 6$ 中，令 $k = 0,1,2,3,\cdots,u,\cdots$ 依次分别去取值，那就必然得到了：

$n_1 = 7t+6, n_2 = 13t+11, n_3 = 19t+16,\cdots, n_u = 7t+6+(u-1)(6t+5),\cdots.$

这存在着$(6t + 5)$作为公差的无限多个等式。

又∵ $t \in N$

∴ $n_1 = 7t+6, n_2 = 13t+11, n_3 = 19t+16,\cdots, n_u = 7t+6+(u-1)(6t+5),\cdots$ 这无限多个分别的等式中，令 $t = 0,1,2,3,\cdots$ 连续不断的去取值，就必然得到了无限多个的无穷等差数列。也以 $m \in N^*$表示这些数列中的项的序号。

即：$n_1 = 7t + 6$ 中，令 $t = 0,1,2,3,\cdots$

得：$n_1 = 6,13,20,27,\cdots$ 是一个无穷等差数列$\{a_m = 7m - 1\}$ (B_1)

而 $n_2 = 13t + 11$ 中，令 $t = 0,1,2,3,\cdots$

得：$n_2 = 11,24,37,50,\cdots$ 是一个无穷等差数列$\{a_m = 13m - 2\}$ (B_2)

而 $n_3 = 19t + 16$ 中，令 $t = 0,1,2,3,\cdots$

得：$n_3 = 16,35,54,73,\cdots$ 是一个无穷等差数列$\{a_m = 19m - 3\}$ (B_3)

……

即 $n_1,n_2,n_3,\cdots$ 这无限多个等式中，分别都令 $t = 0,1,2,3,\cdots$ 连续不断的去取值，就必然得到了 $(B_1),(B_2),(B_3),\cdots$ 这组无限多个的无穷等差数列。把这组无限多个的数列设为 B 组中的数列。

∵ $n_1,n_2,n_3,\cdots$ 这无限多个的等式中，等式与等式之间是存在$(6t + 5)$的公差。

∴如同解析 3 所论，$(B_1),(B_2),(B_3),\cdots$ 这无限多个的无穷等差数列中，数列与数列的首项之间是存在公差的。数列与数列的公差之间也是存在公差的。

因此 $x = 3 + 3k$ $(k \in N)$时这些形如 $4xy + 2x + 2y + 1$ 的合数当中，那些也是形如 $6n - 1$ 的合数而 n 分别相应所须取的那些值，必然一定是 B 组中它那规律性排列的：

$\{a_m = 7m-1\}$，$\{a_m = 13m-2\},\{a_m = 19m-3\},\cdots$ 这无限多个数列中的这些数。

所以解析 3 解析 4 是导出了：形如 $4xy + 2x + 2y + 1$ 的合数当中，那些也是形如 $6n - 1$ 的合数而 n 分别相应所必须取的这些值，一定是 A，B 两组分别都是规律性排列的无限多个无穷等差数列中的这些数。$(m \in N^*)$

A 组的无限多个数列：$\{a_m = 5m+1\},\{a_m = 11m+2\},\{a_m = 17m+3\},\cdots$

B 组的无限多个数列：$\{a_m = 7m-1\},\{a_m = 13m-2\},\{a_m = 19m-3\},\cdots$

因解析 2 论证了当 $x = 2 + 3k$ 和 $x = 3 + 3k$ $(k \in N)$时，这些形如 $4xy + 2x + 2y + 1$ 的合数是必含有了所有形如 $6n - 1$ 的合数。

所以 A，B 这两组无限多个数列中的这些数，就是全部所有形如 6n − 1 的合数而 n 分别相应所必须取的这些值了。因 6n − 1 中 n 的值它也是表示每个形如 6n − 1 的数的序号，故所有形如 6n − 1 的合数的这些序号，那就是 A，B 两组无限多个无穷等差数列中的这些数。

解析 5.

∵当 $x = 2 + 3k$ 和 $x = 3 + 3k$ $(k \in N)$时，这些形如 $4xy + 2x + 2y + 1$ 的合数是必含

有了所有形如 $6n - 1$ 和 $6n + 1$ 的合数。解析 3 和解析 4 已对 $x = 2 + 3k$ 和 $x = 3 + 3k$ 时形如

$4xy + 2x + 2y + 1$ 的这些合数当中，那些同时也是形如 $6n - 1$ 的合数进行了解析。

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.61005. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 7 February 2021, publ: 9 February 2021

∴❸设：$4xy + 2x + 2y + 1 = 6n + 1$。且首先以 $x = 2 + 3k$ $(k \in N)$代入这等式中

那么得：$4y(2 + 3k) + 2(2 + 3k) + 2y + 1 = 6n + 1$

故得：$6n = 12ky + 6k + 10y + 4$。即 $n = 2ky + k + (5y + 2) \div 3$

∵ $n \in N^*$，即 n 必须是正整数。且 $k \in N$

∴ $n = 2ky + k + (5y + 2) \div 3$ 这等式中，y 必须是 $y = 2 + 3t$ 的数$(t \in N)$等式才成立

故以 $y = 2 + 3t$ 代入 $n = 2ky + k + (5y + 2) \div 3$ 这等式中

得：$n = 2k(2 + 3t) + k + [5(2 + 3t) + 2] \div 3$。即：$n = k(6t + 5) + 5t + 4$

∵$k \in N$。故在 $n = k(6t + 5) + 5t + 4$ 等式中，令 $k = 0,1,2,3,\cdots,u,\cdots$ 依次分别去取值

∴得：$k = 0$ 时，有 $n_1 = 5t + 4$

$k = 1$ 时，有 $n_2 = 11t + 9$

$k = 2$ 时，有 $n_3 = 17t + 14$

……

$k = u$ 时，有 $n_u = 5t + 4 + (u - 1)(6t + 5)$

……

即 $n = k(6t + 5) + 5t + 4$ 中，令 $k = 0,1,2,3,\cdots,u,\cdots$ 依次分别去取值，那就必然得到了：

$n_1 = 5t+4, n_2 = 11t+9, n_3 = 17t+14, \cdots, n_u = 5t+4+(u-1)(6t+5), \cdots.$

这存在着$(6t + 5)$作为公差的无限多个等式。

又∵$t \in N$

∴ $n_1 = 5t+4, n_2 = 11t+9, n_3 = 17t+14, \cdots, n_u = 5t+6+(u-1)(6t+5), \cdots.$

这无限多个分别的等式中，令 $t = 0,1,2,3,\cdots$ 连续不断的去取值，就必然得到了无限多个的无穷等差数列。也以 $m \in N^*$表示这些数列中的项的序号。

即：$n_1 = 5t + 4$ 中，令 $t = 0,1,2,3,\cdots$

得：$n_1 = 4,9,14,19,\cdots$ 是一个无穷等差数列$\{a_m = 5m - 1\}$ (C_1)

而 $n_2 = 11t + 9$ 中，令 $t = 0,1,2,3,\cdots$

得：$n_2 = 9,20,31,42,\cdots$ 是一个无穷等差数列$\{a_m = 11m - 2\}$ (C_2)

而 $n_3 = 17t + 14$ 中，令 $t = 0,1,2,3,\cdots$

得：$n_3 = 14,31,48,65,\cdots$ 是一个无穷等差数列$\{a_m = 17m - 3\}$ (C_3)

……

即 $n_1,n_2,n_3,\cdots$ 这无限多个等式中，分别都令 $t = 0,1,2,3,\cdots$ 连续不断的去取值，就必然得到了 $(C_1),(C_2),(C_3),\cdots$这组无限多个的无穷等差数列。把这组无限多个的数列设为 C 组中的数列。

∵ $n_1,n_2,n_3,\cdots$ 这无限多个的等式中，等式与等式之间是存在$(6t + 5)$的公差。

∴如同解析 3 所论，$(C_1),(C_2),(C_3),\cdots$这无限多个的无穷等差数列中，数列与数列的首项之间是存在公差的。数列与数列的公差之间也是存在公差的。

因此 $x = 2 + 3k$ $(k \in N)$时这些形如 $4xy + 2x + 2y + 1$ 的合数当中，那些也是形如 $6n + 1$ 的合数而 n 分别相应所须取的那些值，必然一定是 C 组中它那规律性排列的：

$\{a_m = 5m-1\},\{a_m = 11m-2\},\{a_m = 17m-3\},\cdots$ 这无限多个数列中的这些数。

解析 6.

∵当 $x = 2 + 3k$ 和 $x = 3 + 3k$ $(k \in N)$时，这些形如 $4xy + 2x + 2y + 1$ 的合数是必含有了所有形如 $6n + 1$ 的合数。而解析 5 已对 $x = 2 + 3k$ 时这些形如 $4xy + 2x + 2y + 1$ 的合数

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.61005. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 7 February 2021, publ: 9 February 2021

当中，那些同时也是形如 $6n + 1$ 的合数进行了解析。

∴❹设：$4xy + 2x + 2y + 1 = 6n + 1$。且以 $x = 3 + 3k$ ($k \in N$)代入这等式中

那么得：$4y(3 + 3k) + 2(3 + 3k) + 2y + 1 = 6n + 1$

故得：$6n = 12ky + 6k + 14y + 6$。即 $n = 2ky + k + 1 + 7y \div 3$

∵$n \in N^*$，即 n 必须是正整数。且 $k \in N$

∴$n = 2ky + k + 1 + 7y \div 3$ 中，y 必须是 $y = 3 + 3t$ 的数($t \in N$)等式才成立。

故以 $y = 3 + 3t$ 代入 $n = 2ky + k + 1 + 7y \div 3$ 这等式中

得：$n = 2k(3 + 3t) + k + 1 + 7(3 + 3t) \div 3$。即：$n = k(6t + 7) + 7t + 8$

∵$k \in N$。故在 $n = k(6t + 7) + 7t + 8$ 等式中，令 $k = 0,1,2,3,\cdots,u,\cdots$ 依次分别去取值

∴得：$k = 0$ 时，有 $n_1 = 7t + 8$

$k = 1$ 时，有 $n_2 = 13t + 15$

$k = 2$ 时，有 $n_3 = 19t + 22$

……

$k = u$ 时，有 $n_u = 7t + 8 + (u - 1)(6t + 7)$

……

即 $n = k(6t + 7) + 7t + 8$ 中，令 $k = 0,1,2,3,\cdots,u,\cdots$ 依次分别去取值，那就必然得到了：

$n_1 = 7t+8, n_2 = 13t+15, n_3 = 19t+22,\cdots, n_u = 7t+8+(u-1)(6t+7),\cdots$. 这存在着$(6t + 7)$作为公差的无限多个等式。

又∵$t \in N$

∴ $n_1 = 7t+8, n_2 = 13t+15, n_3 = 19t+22,\cdots, n_u = 7t+8+(u-1)(6t+7),\cdots$. 这无限多个分别的等式中，令 $t = 0,1,2,3,\cdots$ 连续不断的去取值，就必然得到了无限多个的无穷等差数列。也以 $m \in N^*$表示这些数列中的项的序号。

即：$n_1 = 7t + 8$ 中，令 $t = 0,1,2,3,\cdots$

得：$n_1 = 8,15,22,29,\cdots$ 是一个无穷等差数列$\{a_m = 7m + 1\}$ (D_1)

而 $n_2 = 13t + 15$ 中，令 $t = 0,1,2,3,\cdots$

得：$n_2 = 15,28,41,54,\cdots$ 是一个无穷等差数列$\{a_m = 13m + 2\}$ (D_2)

而 $n_3 = 19t + 22$ 中，令 $t = 0,1,2,3,\cdots$

得：$n_3 = 22,41,60,79,\cdots$ 是一个无穷等差数列$\{a_m = 19m + 3\}$ (D_3)

……

即 $n_1,n_2,n_3,\cdots$ 这无限多个等式中，分别都令 $t = 0,1,2,3,\cdots$ 连续不断的去取值，就必然得到了 $(D_1),(D_2),(D_3),\cdots$ 这组无限多个的无穷等差数列。把这组无限多个的数列设为 D 组中的数列。

∵ $n_1,n_2,n_3,\cdots$ 这无限多个的等式中，等式与等式之间是存在$(6t + 7)$的公差。

∴如同解析 3 所论，$(D_1),(D_2),(D_3),\cdots$ 这无限多个的无穷等差数列中，数列与数列的首项之间是存在公差的。数列与数列的公差之间也是存在公差的。

因此 $x = 3 + 3k$ ($k \in N$)时这些形如 $4xy + 2x + 2y + 1$ 的合数当中，那些也是形如 $6n + 1$ 的合数而 n 分别相应所须取的那些值，必然一定是 D 组中它那规律性排列的：

$\{a_m = 7m+1\},\{a_m = 13m+2\},\{a_m = 19m+3\},\cdots$ 这无限多个数列中的这些数。所以解析 5 解析 6 是导出了：形如 $4xy + 2x + 2y + 1$ 的合数当中，那些也是形如 $6n + 1$ 的合数而 n 分别相应所必须取的这些值，一定是 C，D 两组分别都是规律性排列的无限多个无穷等差数列中的这些数。($m \in N^*$)

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.61005. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 7 February 2021, publ: 9 February 2021

C 组的无限多个数列：$\{a_m = 5m-1\},\{a_m = 11m-2\},\{a_m = 17m-3\},\cdots$

D 组的无限多个数列：$\{a_m = 7m+1\},\{a_m = 13m+2\},\{a_m = 19m+3\},\cdots$

因解析 2 论证了当 x = 2 + 3k 和 x = 3 + 3k (k ∈ N)时，这些形如 4xy + 2x + 2y + 1 的合数是必含有了所有形如 6n + 1 的合数。

所以 C，D 这两组无限多个数列中的这些数，就是全部所有形如 6n + 1 的合数而 n 分别相应所必须取的这些值了。因 6n + 1 中 n 的值它也是表示每个形如 6n + 1 的数的序号，故所有形如 6n + 1 的合数的这些序号，那就是 C，D 两组无限多个无穷等差数列中的这些数。

解析 7.

解析 3~6 所解析的 n，都是表示形如 6n − 1 和 6n + 1 的这些合数在排列中分别的序号。而 n 分别相应所必须取的这些值是 A，B，C，D 这四组无限多个数列中的这些数。

所以，如解析 3 解析 4 所解析的，那 A，B 这两组无限多个数列中的这些数，就是所有形如 6n − 1 的合数的这些序号。又如解析 5 解析 6 所解析的，那 C，D 这两组无限多个数列中的这些数，就是所有形如 6n + 1 的合数的这些序号。

即所有形如 6n − 1 和 6n + 1 这些合数的序号，是下面 A，B，C，D 这四组无限多个无穷等差数列中的这些数。(m ∈ N^*)

A 组的无限多个数列：$\{a_m = 5m+1\},\{a_m = 11m+2\},\{a_m = 17m+3\},\cdots$

B 组的无限多个数列：$\{a_m = 7m-1\},\{a_m = 13m-2\},\{a_m = 19m-3\},\cdots$

C 组的无限多个数列：$\{a_m = 5m-1\},\{a_m = 11m-2\},\{a_m = 17m-3\},\cdots$

D 组的无限多个数列：$\{a_m = 7m+1\},\{a_m = 13m+2\},\{a_m = 19m+3\},\cdots$

所以，若证明了 A，B，C，D 这四组无限多个数列中的这些数，不论是用哪一个数作首项去进行排列，都不能排列出一个公差 d = 1 的无穷等差数列，这即就是证明了所有形如 6n − 1 和 6n + 1 这些合数的这些序号当中，不论是用哪一个序号作首项去进行排列，都是不可能排列出一个公差 d = 1 的无穷等差数列。而这样，根据 3 中所论，那即就是证明了孪生素数是无穷的。

而又因为 A，B，C，D 这四组无限多个的数列，都是公差 > 1 的之正整数无穷等差数列。故须论证多个及无限多个都是公差 > 1 的之正整数无穷等差数列中所有的这些数重新依次地排列的性质，方可以去证明 A，B，C，D 这四组无限多个数列中的这无限多个的数，不论是用哪一个数作首项去进行排列，是否都不能排列出一个公差 d = 1 的无穷等差数列。即这才能够去证明孪生素数是否无穷的。

5. 多个及无限多个都是公差 > 1 的之正整数无穷等差数列这些数重新依次排列的性质

5.1. 定义

如 $2,4,6,8,10,12,14,\cdots$ 与 $3,6,9,12,15,\cdots$ 这两个无穷等差数列中的所有数，按从小到大的顺序依次地去重新排列，它必然是可合并为一个依次排列的无穷数列：$2,3,4,6,7,8,9,10,12,14,15,\cdots$。

所以多个无穷等差数列中的所有数，若能按从小到大或按从大到小的顺序去依次地排列的，那么这多个无穷等差数列中的所有数，是可重新依次排列而成为一个无穷数列的。故可作以下定义。

定义：两个或两个以上的无穷等差数列相互间所有的这些数，若可按从小到大或按从大到小的顺序，重新依次排列合并为一个的无穷数列。则把这所有数列中的数按顺序依次的重新排列，称为**可合并后的依次排列**。这些数按顺序依次重新排列的这些排列点，叫做**可合并后的依次排列点**。

根据定义，递增的无穷等差数列是不可以与递减的无穷等数列进行可合并后的依次排列的。而下面

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.61005. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 7 February 2021, publ: 9 February 2021

所论述的都是递增的无穷等差数列可合并后的依次排列性质。

5.2. 多个的无穷等差数列可合并后的依次排列性质

∵两个(2 个)无穷等差数列可合并后的依次排列性质，这就等同于多个无穷等差数列可合并后的依次排列性质了。

∴设：(1)，(2)这两个无穷等差数列，是可以进行可合并后的依次排列的。

$$a_1, a_1+d_1, a_1+2d_1, a_1+3d_1, \cdots, a_1+(n-1)d_1, \cdots \quad (1)$$

$$u_1, u_1+d_2, u_1+2d_2, u_1+3d_2, \cdots, u_1+(n-1)d_2, \cdots \quad (2)$$

又设：(1)，(2)两个无穷等差数列可合并后的依次排列，是能得到一个以 d_3 作公差的无穷等差数列出现的。

那么，以 d_3 作公差的无穷等差数列，它的首项必然是数列(1)某项的数，或是数列(2)某项的数。但不论是数列(1)或数列(2)某项的数，其性质是一样的。

故设：d_3 作公差的无穷等差数列，它的首项是数列(1)某项的数 a_1+kd_1. $k \in N$。

即 d_3 作公差的这个无穷等差数列是：

$$(a_1+kd_1), (a_1+kd_1)+d_3, (a_1+kd_1)+2d_3, (a_1+kd_1)+3d_3, \cdots, (a_1+kd_1)+(n-1)d_3, \cdots \quad (3)$$

∵数列(3)是(1)，(2)这两个数列在可合并后的依次排列中的这些项，所排列出来的数列。

∴(1)，(2)这两个数列中 $\geq(a_1+kd_1)$的数的这些项，都必须排列在数列(3)之中。因此，数列(3)任意项的数，它不是数列(1)某项的数，那就是数列(2)某项的数。不是数列(2)某项的数，那就是数列(1)某项的数。

∵(1)，(2)这两个数列中 $\geq(a_1+kd_1)$的数的这些项，都必排列在数列(3)之中。

i.故设：数列(3)某项的数$[(a_1+kd_1)+cd_3]$是数列(1)某项的数 a_1+xd_1。

并设数列(3)某另一项的数$[(a_1+kd_1)+md_3]$也是数列(1)某另一项的数 a_1+yd_1. $(k, c, m, x, y \in N)$

那么有：$[(a_1+kd_1)+md_3]-[(a_1+kd_1)+cd_3]=(a_1+yd_1)-(a_1+xd_1)$

得：$md_3-cd_3=yd_1-xd_1$

即：$d_3(m-c)=d_1(y-x)$

又∵在 $d_3(m-c)=d_1(y-x)$中

若当$(m-c)=(y-x)$时

得：$d_3=d_1$

若当$(m-c)\neq(y-x)$时

得：$d_3=d_1[(y-x)\div(m-c)]$，或 $d_1=d_3[(m-c)\div(y-x)]$

∴这就说明了 d_3 与 d_1 是相等的，或 d_3 与 d_1 之间是互为因数与倍数的关系。

ii.又设：数列(3)某项的数$[(a_1+kd_1)+c_1d_3]$是数列(2)某项的数 $u_1+x_1d_2$。

并设数列(3)某另一项的数$[(a_1+kd_1)+m_1d_3]$也是数列(2)某另一项的数 $u_1+y_1d_2$. $(k, c_1, m_1, x_1, y_1 \in N)$

那么有：$[(a_1+kd_1)+m_1d_3]-[(a_1+kd_1)+c_1d_3]=(u_1+y_1d_2)-(u_1+x_1d_2)$

得：$m_1d_3-c_1d_3=y_1d_2-x_1d_2$

即：$d_3(m_1-c_1)=d_2(y_1-x_1)$

而∵在 $d_3(m_1-c_1)=d_2(y_1-x_1)$中

若当$(m_1-c_1)=(y_1-x_1)$时

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.61005. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 7 February 2021, publ: 9 February 2021

得：$d_3 = d_2$

若当$(m_1 - c_1) \neq (y_1 - x_1)$时

得：$d_3 = d_2[(y_1 - x_1) \div (m_1 - c_1)]$，或 $d_2 = d_3[(m_1 - c_1) \div (y_1 - x_1)]$

∴这也说明了 d_3 与 d_2 是相等的，或 d_3 与 d_2 之间是互为因数与倍数的关系。

故从 i.ii 中便得到了：d_1，d_2 分别都是与 d_3 相等的，或都是与 d_3 互为因数与倍数的关系。即这是说，d_1 与 d_2 必须是相等的，或是互为因数与倍数的关系。

因而这就证明了(1)，(2)这两个无穷等差数列可合并后的依次排列，若能得到一个无穷等差数列(3)出现的，那(1)，(2)两个无穷等差数列中的公差 d_1 与 d_2 必须是相等的，或是互为因数与倍数的关系。否则(1)，(2)两个无穷等差数列可合并后的依次排列，是不可能得到无穷等差数列(3)出现的。

∵两个(2 个)无穷等差数列可合并后的依次排列性质，这就等同于多个的无穷等差数列可合并后的依次排列性质了。

∴从 i.ii 的解析中可以论断：多个的无穷等差数列可合并后的依次排列，若是能得到一个无穷等差数列出现的，那这多个数列中的这些公差必须是相等的，或是互为因数与倍数的关系。

∵多个的无穷等差数列可合并后的依次排列，若是能得到一个无穷等差数列出现的，那这多个数列中的这些公差必须是相等的，或是互为因数与倍数的关系。

∴反过来，这就可以论断：多个公差相异的，且公差之间又并不是互为因数与倍数关系的无穷等差数列，它们可合并后的依次排列，那就一定是不可能得到一个无穷等差数列出现的。

故把这一性质定义为：‘多个都是公差相异的无穷等差数列可合并后的依次排列性质’。记为 5.2 之性质。

5.3. 多个公差相等的且都是公差 ＞1 的之正整数无穷等差数列可合并后的依次排列性质

因 5.2 之性质必然是包括了：多个都是公差 ＞1 的，**公差相异的**之正整数无穷等差数列可合并后的依次排列性质。所以这又必须解析证明：多个都是公差 ＞1 的且**公差相等的**之正整数无穷等差数列可合并后的依次排列性质。

根据等差数列通项公式 $a_n = a_1 + (n - 1)d$ 原理，两个公差相等的无穷等差数列，若它们这两个首项之间的差是公差的倍数时，那这两个数列中的这些数，都必然一定是这两个数列的其中某个数列中的数。也是说，这两个数列是可重合的数列。(证明可略)

所以下面是以 k(k > 1 的整数)表示数列的列数或称数列的个数，以 b 表示等差数列中的公差。并且通过 k = 2 时的 k 个都是以 b(b > 1)作公差的、不重合的之正整数无穷等差数列可合并后的依次排列性质，去论证 k 个都是以 b(b > 1)作公差的、不重合的之正整数无穷等差数列可合并后的依次排列性质。

故设：数列(4). $a_1, a_2, a_3, a_4, \cdots, a_n, \cdots$. 是公差 ＞1 的之正整数无穷等差数列。

数列(5). $u_1, u_2, u_3, u_4, \cdots, u_n, \cdots$. 也是公差 ＞1 的之正整数无穷等差数列。

并设：(4)，(5)无穷等差数列中的公差是相等的，且用 b 表示。

又设：$u_1 > a_1$，$(u_1 - a_1) = L \neq$ 公差 b 的倍数，且 L mod b = t。

∴(4)，(5)数列是 k = 2 的 k 个(2 个)都是以 b(b > 1)作公差的，首项之间的差并不是公差的倍数之正整数无穷等差数列。(即这 k，b 以及 t 都必然是正整数)

那么(4)，(5)这两个公差相等的无穷等差数列可合并后的依次排列，两个数列的项如【图 1】是不会重合的。而这两个公差相等的又不会重合的等差数列，它们首项之间的差，被公差整除后是必有余数 t。

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.61005. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 7 February 2021, publ: 9 February 2021

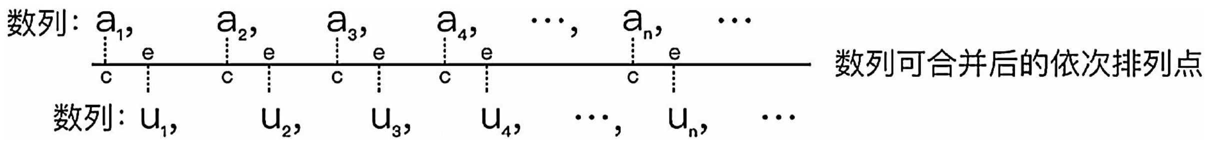

Figure 1. The sequence of the two infinite arithmetic sequences（4）and（5）which can be merged
图 1. 表示(4)和(5)这两个公差相等的无穷等差数列可合并后的依次排列

∵【图 1】是两个公差相等，不重合的之正整数无穷等差数列可合并后的依次排列。又【图 1】中直线上的 c 点是属于数列(4)的项的项点，e 点是属于数列(5)的项的项点。

∴如【图 1】这(4)和(5)数列，在开始可合并后的依次排列中的这些项，分别是属于每个数列每相邻的这两个项之间，都必有包括了一个项的项点在内的两个(2 个)可合并后的依次排列点 c 点和 e 点。

而∵c 点属于数列(4)的项的项点。故如【图 1】数列(4)它每相邻两项之间的这两个(2 个)可合并后的依次排列点的排列，是 c 点→e 点排列。因 $u_1 > a_1$，故 c 点→e 点排列的距离必然一定是等于$(u_1 - a_1)$的差 L 被公差 b 整除后所得的余数 t。**(符号‘→’是排列的方向。)**

又∵e 点属于数列(5)的项的项点。故如【图 1】数列(5)它每相邻两项之间的这两个(2 个)可合并后的依次排列点的排列，是 e 点→c 点排列。又如【图 1】因 c 点→e 点的距离是等于 t。并且(4)和(5)数列各自分别相邻两项之间的距离，都必然是等于(4)和(5)数列各自分别的公差 b，即 e 点→c 点排列的距离那就必然是等于$(b - t)$。故设 e 点→c 点排列的距离是：$b - t = t_1$。

∴如【图 1】这(4)和(5)数列，在开始可合并后的依次排列的这些项当中，属于每个数列每相邻的两项之间的距离即公差 b，都被划分为 t 和 t_1 这两段(2 段)的点距。即必有 $t + t_1 = b$。

∵$t + t_1 = b$。且(4)和(5)数列是无穷等差数列，故【图 1】直线上有无限多个的 c 点和 e 点。

∴若 $t + t_1 = b$ 中，如果 $t_1 = t$，即若 $2t = b$ 时，那排列在【图 1】直线上这无限多个的 c 点和 e 点，它们相互间的距离就是相等的了。即这些 c 点与 e 点相互间是等距离地排列的。

∵每个 c 点是属于数列(4)的一个项。每个 e 点是属于数列(5)的一个项。

∴若 $2t = b$。那(4)和(5)这两个无穷等差数列，在开始可合并后的依次排列中的这些项暨每个项与前一项的差那就必然都是相等的，且都相等于 t。即(4)和(5)这两个无穷等差数列可合并后的依次排列，是必能得到了一个以 t 作公差的无穷等差数列出现的。

∵t，b 是正整数，故若 $2t = b$ 时那必然 $t < b$.而 b 是(4)和(5)这两个无穷等差数列分别的公差。

∴那所得到的这个以 t 作公差的无穷等差数列，并不是(4)和(5)这两个的数列。

因此，如列举【图 1】中的原理，这说明了在一定条件下，k 个都是以 $b(b > 1)$作公差的、不重合的之正整数无穷等差数列，它们可合并后的依次排列，是可以得到一个 $< b$ 作公差的无穷等差数列出现的。

所以，按照【图 1】列举的原理如此类推，这就可以论断：**k 个都是以 $b(b > 1)$作公差的、不重合的之正整数无穷等差数列，它们中的这些首项从小到大依次每两个两个之间的差，分别被公差 b 整除后必有的这些余数都是相等于 t，而且 $kt = b$。这是这 k 个数列可合并后的依次排列，能得到一个无穷等差数列出现的唯一条件。并且能得到的这个出现的无穷等差数列，必然是以这个相等的余数 $t(t < b)$作公差的。** 否则，这 k 个数列可合并后的依次排列，是不可能得到一个无穷等差数列出现的。即这是 k 个都是以 $b(b > 1)$作公差的、不重合的之正整数无穷等差数列可合并后的依次排列性质。记为 2.5.3.之性质。

5.4. k 个以 b $(b > 1)$作公差的不重合之正整数无穷等差数列可合并后的依次排列之性质 1 与 2

设：k 个都是以 $b(b > 1)$作公差的、不重合的之正整数无穷等差数列，它们中的这些首项从小到大依

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.61005. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 7 February 2021, publ: 9 February 2021

次每两个两个之间的差，分别被公差 b 整除后必有的这些余数都是相等于 t。且 $kt = b$。

那么根据 5.3 之性质中所论的：k 个都是以 $b(b > 1)$作公差的、不重合的之正整数无穷等差数列可合并后的依次排列，能得到一个无穷等差数列出现的唯一条件。以及根据能得到的这个出现的无穷等差数列，又必然一定是以 $< b$ 的这个相等余数作公差的。所以这就得到了：$kt = b$ 时的一个以 t 作公差的无穷等差数列。

∵$kt = b$，故若 $k = b$ 时，那就必然是：$t = 1$。

∴$k = b$ 时的 k 个都是以 $b(b > 1)$作公差的、不重合的之正整数无穷等差数列，它们可合并后的依次排列所必能得到的这个出现的无穷等差数列，就一定是以 $t = 1$ 作公差的无穷等差数列。

故即证明了：**$k = b$ 时的 k 个都是以 $b(b > 1)$作公差的、不重合的之正整数无穷等差数列可合并后的依次排列，它是一定能得到一个‘以 1 作公差’的之正整数无穷等差数列出现的。**这是 $k = b$ 的 k 个都是以 $b(b > 1)$作公差的、不重合的之正整数无穷等差数列可合并后的依次排列性质。记为 5.4 之性质 1。

∵如 5.3 中所论，这 k,b,t 都是正整数，故 $kt = b$ 中是不存在 $k > b$ 的。

∴k 个都是以 $b(b > 1)$作公差的之正整数无穷等差数列，它是不存在 $k > b$ 的 k 个以 $b(b > 1)$作公差而不重合的数列。即以 $b(b > 1)$作公差的正整数无穷等差数列，它最多是只有 b 个不重合的无穷等差数列。

又∵k，b，t 都是正整数，故 $kt = b$ 中，必然 $t < b$。如若 $k < b$ 时，那 $kt = b$ 中就必然 $t > 1$。

∴$kt = b$ 时，而又 $k < b$ 的 k 个都是以 $b(b > 1)$作公差的、不重合的之正整数无穷等差数列可合并后的依次排列，所能得到的这个出现的无穷等差数列，必然是以 $t(1 < t < b)$作公差的。

因此，$k < b$ 的 k 个都是以 $b(b > 1)$作公差的、不重合的之正整数无穷等差数列可合并后的依次排列，若能得到一个无穷等差数列出现的，那这个出现的无穷等差数列，它的公差一定是小于原来的公差 b 而又一定是 > 1 的。

所以，这说明了 $k < b$ 的 k 个都是以 $b(b > 1)$作公差的之正整数无穷等差数列，不论是重合与否，它们可合并后的依次排列，若能得到一个无穷等差数列出现的，那这个出现的无穷等差数列的公差肯定是 > 1。且又这 k 个数列本身都是以 $b(b > 1)$作公差的。

故此，这证明了 $k < b$ 的 k 个都是以 $b(b > 1)$作公差的之正整数无穷等差数列中的这些数，不论是怎样地去排列，都总是不可能得到一个‘以 1 作公差’的无穷等差数列出现的。这是 $k < b$ 的 k 个都是以 $b(b > 1)$作公差的之正整数无穷等差数列可合并后的依次排列性质。记为 2.5.4 之性质 2。

综合 5.2 之性质，5.3 之性质，5.4 之性质 1 与 2 所论，就可得到了：都是正整数的那多个无穷等差数列可合并后的依次排列性质。分别如下：(k，$b > 1$ 的整数)

<1> 多个都是公差 > 1 的且公差相异的，又公差之间并不是因数与倍数关系的之正整数无穷等差数列，它们可合并后的依次排列，是不可能得到一个无穷等差数列出现的。

<2> 只有 $k = b$ 时的 k 个都是以 $b(b > 1)$作公差的、不重合的之正整数无穷等差数列可合并后的依次排列，才能而且是必能出现一个‘以 1 作公差’的无穷等差数列。若 $k < b$ 时的 k 个都是以 $b(b > 1)$作公差的之正整数无穷等差数列中的这些数，不论是怎样地去排列，都总是不可能有‘以 1 作公差’的无穷等差数列出现的。

<3> $k < b$ 时的 k 个都是以 $b(b > 1)$作公差的、不重合的之正整数无穷等差数列，若它们的这些首项从小到大依次每两个两个之间的差，分别被公差 b 整除后的这些余数都是相等于 t，且 $kt = b$。

那它们可合并后的依次排列，必然是能出现一个以余数 $t(1 < t < b)$作公差的无穷等差数列。否则，它们可合并后的依次排列，是不可能得到一个无穷等差数列出现的。

<1> <2> <3>可称：多个都是公差 > 1 的之正整数无穷等差数列可合并后的依次排列三性质。

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.61005. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 7 February 2021, publ: 9 February 2021

5.5. 无限多个都是公差 ＞1 的之正整数无穷等差数列可合并后的依次排列性质

∵无限多个的数列当中，是有无限多个的首项。如果这无限多个的首项之间是存在公差的，那么无限多个数列的这无限多个首项的依次排列，必然是以它们首项相互间的这个公差作公差的一个无穷等差数列。

∴无限多个的无穷等差数列的首项之间若是存在公差的，那它们这无限多个的首项就必然能排列出无穷等差数列。这是无限多个的无穷等差数列可合并后的依次排列所存在的可能性特殊性质。而也必然是：无限多个的都是公差 ＞1 的之正整数无穷等差数列可合并后的依次排列，所存在的可能性特殊性质。

∵根据等差数列通项公式 $a_n = a_1 + (n - 1)d$ 原理，多个无穷等差数列可合并后的依次排列，以及无限多个无穷等差数列可合并后的依次排列，它们分别是否能得到一个无穷等差数列出现，这都一定是必决定于这些无穷等差数列中的那些首项及那些公差相互之间的关系。

∴首项之间存在公差的无限多个之正整数无穷等差数列，它们可合并后的依次排列的这些性质中，除了它们的首项是能排列出无穷等差数列的这一特殊性质之外，其余的性质必然是等同于：都是正整数的多个无穷等差数列可合并后的依次排列性质。并且是不会再有另外的潜在性质了。

因此根据上面‘多个都是公差 ＞1 的之正整数无穷等差数列可合并后的依次排列三性质’，结合无限多个无穷等差数列可合并后的依次排列所存在的可能性特殊性质，那就可推理的得到：无限多个的都是公差 ＞1 的之正整数无穷等差数列可合并后的依次排列性质了。性质分别如下：

<4> 首项之间是存在公差的无限多个之无穷等差数列中，它们这无限多个的首项的依次排列，必然是一个无穷等差数列。

<5> 无限多个的都是公差 ＞1 的且相异的，又公差之间并不是互为因数与倍数关系,首项之间不存在公差的之正整数无穷等差数列，它们可合并后的依次排列是不可能得到一个无穷等差数列出现的。

<6> 无限多个的都是公差 ＞1 的，首项之间不存在公差的之正整数无穷等差数列当中，若是存在着 $k = b$ 的 k 个都是以 $b(b > 1)$作公差的之正整数无穷等差数列，那这无限多个的之正整数无穷等差数列可合并后的依次排列，是必可以得到一个‘以 1 作公差’的无穷等差数列出现的。否则它们可合并后的依次排列，是不可能有‘以 1 作公差’的无穷等差数列出现。

<4> <5> <6>称为：无限多个的都是公差 ＞1 的之正整数无穷等差数列可合并后的依次排列三性质。

6. 关于 A，B，C，D 这四组无限多个的无穷等差数列

因 3 中论证了，只须证明了所有形如 $6n - 1$ 和 $6n + 1$ 的合数的这些序号当中，不论是用哪个序号作首项去进行排列，都是不能排列出一个公差 $d = 1$ 的无穷等差数列，那孪生素数就是无穷的了。

而又如 4 中的解析 7 所论，所有形如 $6n-1$ 和 $6n+1$ 的合数的这些序号，是下面 A，B，C，D 四组无限多个数列中的这些数。$(m \in N^*)$

A 组的无限多个数列：$\{a_m = 5m+1\}, \{a_m = 11m+2\}, \{a_m = 17m+3\}, \cdots$

B 组的无限多个数列：$\{a_m = 7m-1\}, \{a_m = 13m-2\}, \{a_m = 19m-3\}, \cdots$

C 组的无限多个数列：$\{a_m = 5m-1\}, \{a_m = 11m-2\}, \{a_m = 17m-3\}, \cdots$

D 组的无限多个数列：$\{a_m = 7m+1\}, \{a_m = 13m+2\}, \{a_m = 19m+3\}, \cdots$

所以下面是关于 A，B，C，D 这四组无限多个数列的分析与论断。

分析：

∵A，B，C，D 这四组无限多个的数列，它们分别都是无穷等差数列。且又如 4 中的解析中所论：A，B，C，D 这每组的无限多个数列当中，各自从第二个数列开始，每个数列与前一数列的首项之间及

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.61005. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 7 February 2021, publ: 9 February 2021

公差之间，分别都是存在着公差的。

∴只须按照 A，B，C，D 分别每组中的每个数列与数列的首项之间及公差之间分别所存在的公差去推算，这就能得到每组数列中每个数列的下一个数列了。故可作以下论断。

论断 i.

∵A，B，C，D 分别每组的这无限多个无穷等差数列中这无限多个的首项之间及这无限多个的公差之间，分别都是存在公差的。

∴A，B，C，D 分别每组各自从第二个数列开始，按照每个数列的首项与前一数列的首项之间的差，以及按照每个数列的公差与前一数列的公差之间的差，这就可以论断：

A 组 D 组分别每组的无限多个无穷等差数列中这无限多个的首项之间，都必存在一个等于 7 的公差。

B 组 C 组分别每组的无限多个无穷等差数列中这无限多个的首项之间，都必存在一个等于 5 的公差。

A，B，C，D 分别每组的无限多个无穷等差数列中这无限多个的公差之间，也都必存在一个等于 6 的公差。

论断 ii.

∵论断 i 论断了：A 与 D 每组的无限多个数列中这无限多个的首项之间，都必存在等于 7 的公差。B 与 C 每组的无限多个数列中这无限多个的首项之间，都必存在等于 5 的公差。

∴这就可以论断：A，D 两组数列的这些首项与 B，C 两组数列的这些首项，它们相互之间是不存在公差的。**即 A，B，C，D 这四组无限多个数列所有的这些首项之间，是属于不存在公差的。**

论断 iii.

∵论断 i 又论断了：A，B，C，D 分别每组中的这无限个无穷等差数列的这无限个公差之间，也都是存在一个等于 6 的公差。

∴这就可以论断：A，B，C，D 分别每组中的这些无穷等差数列中的公差，都必然一定是互不相等的。而又由于 A 组 C 组分别第一数列中的公差都是等于 5，B 组 D 组分别第一数列中的公差都是等于 7。故等于 5 的公差，那就必然是这四组无限多个无穷等差数列中的最小公差了。

论断 iv.

∵论断 i 论断了：A，B，C，D 分别每组的无限多个无穷等差数列中的这无限多个的公差之间，也都是存在一个等于 6 的公差。

而∵A 组 C 组分别每组中的第一个无穷等差数列的公差都是等于 5。

B 组 D 组分别每组中的第一个无穷等差数列的公差都是等于 7。

∴这就可立即论断：

A 组中每个无穷等差数列的公差与 C 组中每个无穷等差数列的公差，一定都分别是互相对应地相等的。

B 组中每个无穷等差数列的公差与 D 组中每个无穷等差数列的公差，一定也分别是互相对应地相等的。

论断 v.

∵A，B，C，D 分别每组中这无限多个无穷等差数列的这无限个公差之间，也都存在一个等于 6 的公差。而且：A 组 C 组分别每组中的第一个无穷等差数列的公差都是等于 5。

B 组 D 组分别每组中的第一个无穷等差数列的公差都是等于 7。

∴A，C 每组中任意一个无穷等差数列的公差都可表为：$d = 5 + 6(n - 1) = 6n - 1$ ($n \in N^*$)，即必然都是形如 $6n - 1$ 的数。

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.61005. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 7 February 2021, publ: 9 February 2021

B，D 每组中任意一个无穷等差数列的公差都可表为：$d = 7 + 6(n - 1) = 6n + 1$ ($n \in N^*$)，即必然都是形如 6n+1 的数。

∵A，C 每组中任意一个无穷等差数列的公差都必然是形如 $6n - 1$ 的数。

B，D 每组中任意一个无穷等差数列的公差都必然是形如 $6n + 1$ 的数。

∴这就可得到了 A，B，C，D 四组无限多个无穷等差数列分别的这些公差依次之间的比值。

即：都是形如 $6n - 1$ 的这些公差，它们依次相互间的比值必然是：

$[6(n + 1) - 1] \div (6n - 1) = 1 + 6 \div (6n - 1)$

都是形如 $6n + 1$ 的这些公差，它们依次相互间的比值必然是：

$[6(n + 1) + 1] \div (6n + 1) = 1 + 6 \div (6n + 1)$

都是形如 $6n + 1$ 的与都是形如 $6n - 1$ 的这些公差，它们依次相互间的比值必然是：

$(6n + 1) \div (6n - 1) = 1 + 2 \div (6n - 1)$

又∵ $n \in N^*$，故这些比值分别都不可能是整数。但 A，B，C，D 这四组无限多个无穷等差数列的这些公差，分别都是 > 1 的形如 $6n - 1$ 和 $6n + 1$ 的正整数。

∴根据 A，B，C，D 这四组数列中的这些公差与公差之间的比值都不可能是整数。故结合整数中的因数与倍数的概念，这就可以论断：**A，B，C，D 这四组无限多个无穷等差数列中的这些公差，并不是互为因数与倍数的关系。**

论断 vi.

∵论断 iii 论断了：A，B，C，D 分别每组中的这些无穷等差数列中的公差，都是互不相等的。

又∵论断 iv 论断了：A 组每个无穷等差数列的公差与 C 组每个无穷等差数列的公差，一定是分别互相对应地相等的。B 组每个无穷等差数列的公差与 D 组每个无穷等差数列的公差，一定也是分别互相对应地相等的。

∴这就可以论断：A，B，C，D 这四组无限多个的无穷等差数列中，公差相等的这些数列，都是只有两个(2 个)的数列。

论断 vii.

∵论断 vi 论断了：A，B，C，D 这四组无限多个的无穷等差数列中，公差相等的这些数列，都是只有两个(2 个)的数列。且论断 iii 论断了 A 组与 C 组分别的第一个无穷等差数列的公差都等于 5。它是这四组无限多个无穷等差数列中的最小公差。即最小的这个相等公差是 5。

∴若设：公差相等的数列的列数即数列的个数是 k。那么得：$k = 2$。

最小的这个相等公差是 b。那么得：$b = 5$。

∵$k = 2$，$b = 5$。而 $2 < 5$。即 $k < b$ ($b > 1$)。且 A，B，C，D 这四组的数列，分别都是无限多个的公差 > 1 的之正整数无穷等差数列。而 5 又是最小的这个相等公差。

∴这就可以论断：**A，B，C，D 这四组无限多个的无穷等差数列里，是只有‘$k < b$ 的 k 个都是以 $b(b > 1)$作公差的之正整数无穷等差数列’。**

论断 viii.

∵A，B，C，D 这四组无限多个的无穷等差数列里，除了公差相等的数列之外，还有无限多个公差互不相等的数列。

又∵论断 ii 论断了：A，B，C，D 这四组无限多个无穷等差数列中这无限多个的首项之间，是属于不存在公差的。并且论断 v 又论断了：A，B，C，D 这四组无限多个无穷等差数列中的这无限多个公差，并不是互为因数与倍数的关系。而且 A，B，C，D 这四组数列分别都是公差 > 1 的之正整数无穷等差数

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.61005. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 7 February 2021, publ: 9 February 2021

列。

∴综合起来就可以论断：**A，B，C，D 这四组无限多个的无穷等差数列中，所有公差互不相等的这无限多个数列，那是属于‘无限多个的都是公差 ＞1 的且相异的，又公差之间并不是互为因数与倍数关系，首项之间不存在公差的之正整数无穷等差数列’。**

7. 孪生素数是无穷的

因为 3 中论证了，只须证明了所有形如 6n － 1 和 6n + 1 的合数的这些序号当中，不论是用哪个序号作首项去进行排列，都是不能排列出一个公差 d = 1 的无穷等差数列，那孪生素数就是无穷的了。

而又因为 4 中证明了，那些形如 6n － 1 和 6n + 1 的合数的这些序号，是如 6 中所论的这 A，B，C，D 四组无限多个无穷等差数列中的这些数。所以只须证明 A，B，C，D 这四组无限多个无穷等差数列中的这些数，不论是用哪一个数作为首项去进行排列，都是不可能排列出公差 d = 1 的无穷等差数列，那孪生素数就是无穷的了。

又因为根据等差数列通项公式 $a_n = a_1 + (n - 1)d$ 原理，无限多个无穷等差数列可合并后的依次排列，它能否得到一个无穷等差数列的出现，这都一定是必决定于这无限多个数列中的那些首项和那些公差相互之间的关系。而又如 6 中所论，这 A，B，C，D 四组数列都是正整数的无穷等差数列，并且在 5 中论证了多个及无限多个的都是正整数的无穷等差数列，它们可合并后的依次排列性质。所以这又只须：

i.证明 A，B，C，D 这四组无限多个无穷等差数列中这无限多个首项的排列，是不可能排列出一个‘以 1 作公差’的无穷等差数列。

ii.根据 5 中所论的性质，证明 A，B，C，D 这四组无限多个的无穷等差数列中，这些公差相等的以及公差互不相等的无穷等差数列中的这些数，分别不论是怎样地去排列，也都是不可能有‘以 1 作公差’的无穷等差数列出现的。

这样，那就是完全地证明了 A，B，C，D 这四组无限多个无穷等差数列中的这些数，不论是用哪一个数作首项去进行排列，它都是不可能排列出公差 d = 1 的无穷等差数列。即就是完全地证明了孪生素数是无穷的。证明如下。

证明 1：

∵6 中的论断 ii 论断了：A，B，C，D 这四组无限多个数列所有的这些首项之间，是属于不存在公差的。又 6 中的论断 i 论断了：A 组 D 组每组中的这无限多个无穷等差数列中这无限多个的首项之间，都是必存在等于 7 的公差。B 组 C 组每组中的这无限多个无穷等差数列中这无限多个的首项之间，都是必存在等于 5 的公差。

∴A，B，C，D 这四组的无限多个无穷等差数列当中，它们这些首项的依次排列，只可以是排列出公差等于 7 和公差等于 5 的无穷等差数列。而由于 7 > 5 > 1.

∴这就证明了 A，B，C，D 这四组无限多个无穷等差数列中的这些首项，是不可能排列出一个‘以 1 作公差’的无穷等差数列。

证明 2：

∵6 中的论断 vii 论断了：A，B，C，D 这四组无限多个的无穷等差数列里，是只有 k < b 的 k 个都是以 b(b > 1)作公差的之正整数无穷等差数列。

而 5 中的性质<2>证明了：若 k < b 时的 k 个都是以 b(b > 1)作公差的之正整数无穷等差数列中的这些数，不论是怎样地去排列，都总是不可能有‘以 1 作公差’的无穷等差数列出现的。

∴这就证明了 A，B，C，D 这四组无限多个的无穷等差数列里，它们公差相等的这些无穷等差数列

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.61005. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 7 February 2021, publ: 9 February 2021

中的这些数，不论是怎样地去排列，分别都是一定不可能有‘以 1 作公差’的无穷等差数列出现的。

证明 3.

∵6 中的论断ⅷ论断了：A，B，C，D 这四组无限多个的无穷等差数列中，所有公差互不相等的这无限多个数列，是属于：无限多个的都是公差 ＞1 的且相异的，又公差之间并不是互为因数与倍数关系，首项之间不存在公差的之正整数无穷等差数列。

而 5 中的性质<5>证明了：无限多个的都是公差 ＞1 的且相异的，又公差之间并不是互为因数与倍数关系，首项之间不存在公差的之正整数无穷等差数列，它们可合并后的依次排列，是不可能得到一个无穷等差数列出现的。

∴这证明了 A，B，C，D 这四组无限多个的无穷等差数列里，它们公差互不相等的这些无穷等差数列可合并后的依次排列，是不可能得到一个无穷等差数列出现的。

又∵A，B，C，D 这四组无限多个的无穷等差数列里，它们公差互不相等的这些无穷等差数列可合并后的依次排列，是不可能得到一个无穷等差数列出现的。但 A，B，C，D 这四组无限多个无穷等差数列中的最小公差是 5 而不是 1.

∴就证明了 A，B，C，D 这四组无限多个的无穷等差数列中，公差互不相等的这些无穷等差数列中的这些数，不论是怎样地去排列，也都是不可能有‘以 1 作公差’的无穷等差数列出现的。

证明 4.

∵证明 1，证明 2，证明 3，分别证明了 A，B，C，D 这四组无限多个的无穷等差数列，它们中这无限多个首项的排列，是不可能排列出一个‘以 1 作公差’的无穷等差数列的。它们中公差相等的以及公差互不相等的这些无穷等差数列中的这些数，分别不论是怎样地去排列，也都总是不可能有‘以 1 作公差’的无穷等差数列出现的。

∴这就完全地证明了 A，B，C，D 这四组无限多个无穷等差数列里的这些数，不论是用哪一个数作为首项去进行排列，都是不可能排列出公差 $d = 1$ 的无穷等差数列的。

又∵A，B，C，D 这四组无限多个无穷等差数列里的这些数，就是所有形如 $6n - 1$ 和 $6n + 1$ 的合数的这些序号。

∴证明 1，证明 2，证明 3 这即就是证明了：所有那些形如 $6n - 1$ 和 $6n + 1$ 的合数的这些序号，不论是用哪一个序号作首项去进行排列，都是不可能排列出公差 $d = 1$ 的无穷等差数列的。而在 3 中论证了：只须证明了所有形如 $6n - 1$ 和 $6n + 1$ 的合数的这些序号，不论是用哪一个序号作首项去进行排列，都总是不能排列出公差 $d = 1$ 的无穷等差数列，那孪生素数就必然一定是无穷的了。

∴根据证明 1，证明 2，证明 3 的证明，那就证明了孪生素数是无穷的。即这就证明了：孪生素数是有无穷多组的[1]。

以上的 1~7 是对‘孪生素数是无穷的’暨证明与论述。

《孪生素数》是利用等差数列的概念去构思，证明了孪生素数是有无穷多组的。

参考文献

[1] Hardy-Littlewood 猜想.

HANS PrePrints | https://doi.org/10.12677/hans.preprints.61005. | CC-BY 4.0 Open Access | rec: 7 February 2021, publ: 9 February 2021