Hans Journal of Computational Biology 计算生物学, 2019, 9(4), 81-85
Published Online December 2019 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/hjcb
https://doi.org/10.12677/hjcb.2019.94010

Hans汉斯

Introduction of Several Biological Population Models

Chenyang Li, Jian Sun, Hailiang Zhang*

Department of Mathematics, Zhangjiang Ocean University, Zhoushan Zhejiang
Email: *hlzhang88wy@163.com

Received: Nov. 29th, 2019; accepted: Dec. 11th, 2019; published: Dec. 18th, 2019

Abstract

In this paper, the constructions of single-population biological model and dual-population biological model are introduced. With the help of mathematical theory and method, the growth trend of biomass of a single population in infinite time is described, including the Malthus model of infinite growth trend of biomass and the Logistic model of finite growth trend of biomass. Biological dual-population systems with mutual competition and symbiosis are discussed and the corresponding biological models are derived according to the change law.

Keywords

Single Population, Double Population, Competition, Symbiosis

若干生物种群模型简介

李晨阳，孙　健，张海亮*

浙江海洋大学数学系，浙江　舟山
Email: *hlzhang88wy@163.com

收稿日期：2019年11月29日；录用日期：2019年12月11日；发布日期：2019年12月18日

摘　要

本文介绍了单种群生物模型和双种群生物模型的构建。借用数学理论和方法，阐述了单种群在无限时间内生物量的增长趋势，包括在无限时间生物量无限增长趋势的马尔萨斯模型和生物量有限增长趋势的Logistic模型；讨论了两种存在相互竞争和共生关系的生物种群系统，根据变化规律推出相应的生物模型。

*通讯作者。

文章引用: 李晨阳, 孙健, 张海亮. 若干生物种群模型简介[J]. 计算生物学, 2019, 9(4): 81-85.
DOI: 10.12677/hjcb.2019.94010

关键词

单种群，两种群，竞争，共生

1. 引言

种群生态问题是生物学研究的焦点内容，利用数学理论和思想构建模型成为生物学研究的重要手段，见文献[1] [2] [3]。本文旨在介绍和分析单种群生物模型和双种群生物模型的构建过程，是已有文献的有益补充或完善。

借用数学理论和方法，首先阐述了单种群在无限时间内生物量的增长趋势，包括在无限时间生物量无限增长趋势的马尔萨斯模型和生物量有限增长趋势的 Logistic 模型；随后讨论了两种存在相互竞争和共生关系的生物种群系统，根据变化规律推出相应的生物模型。通过对本文的研读，可促进生物数学初学者对模型内涵的理解，提升对模型的扩展能力。

2. 单一生物种群模型

设该种群生物其繁衍发展不受其他种群的影响，与其它种群生物相互没有迁徙形态。考察物种群体数量在一定环境下的变化，设 t 时刻该群体生物的总数用 $N(t)$ 表示。

2.1. 马尔萨斯(Malthus)模型

设物种的生育率 b 和死亡率 d 不变，种群的自然增长率 $r=b-d$ 为常数。显然，在时间段 $[t,t+\Delta t]$，群体变化量为

$$N(t+\Delta t)-N(t)=r\times\Delta t\times N(t)$$

由此得该物种变化方程

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=r\times N \tag{1}$$

设 t_0 是初始时刻， $N(t_0)=N_0$，结合(1)式得到

$$N(t)=N_0\mathrm{e}^{r(t-t_0)} \tag{2}$$

公式(1)称为马尔萨斯模型，种群函数表达式为(2)。

根据表达式(2)可以得出：随着时间 t 的增大，种群数量将会趋于无穷大，这是不符合实际的，特别是种群生存资源的有限性没有考虑。说明马尔萨斯模型考虑因素不够全面，不利于长时间预测。

2.2. 在有限空间内的 Logistic 增长模型

对马尔萨斯模型引入非常数自然增长率 $r=r-aN$，此时微分方程变为

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=(r-aN)N \text{ 或 } \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=r\left(1-\frac{N}{K}\right)N \tag{3}$$

上式称为 Logistic 模型。由于(3)式一次项系数为负数，从而种群数量很大时，会对自身数量产生抑制作用。

下面求解模型的种群表达式。将(3)式改写为

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=k\cdot\left(K-N\right)N$$

变量分离，得

$$\left(\frac{1}{N}+\frac{1}{K-N}\right)\mathrm{d}N=kK\mathrm{d}t$$

两边积分，得

$$N=\frac{K}{1+C\cdot\mathrm{e}^{-kKt}}$$

令 $N\left(0\right)=N_0$，则

$$C=\frac{K-N_0}{N_0}$$

所以(3)式的满足初始条件 $N\left(0\right)=N_0$ 的解为

$$N\left(t\right)=\frac{N_0K}{N_0+\left(K-N_0\right)\cdot\mathrm{e}^{-kKt}}$$

可知

$$N\left(0\right)=N_0,\quad \lim_{t\to\infty}N\left(t\right)=K$$

由上面得到的种群函数表达式可作出 Logistic 模型种群曲线，如图 1 所示。相比于 Malthus 模型的“J”型无限增长趋势，Logistic 模型呈“S”字型增长趋势，一定时间后种群数量将进入饱和期，不会无限增长。

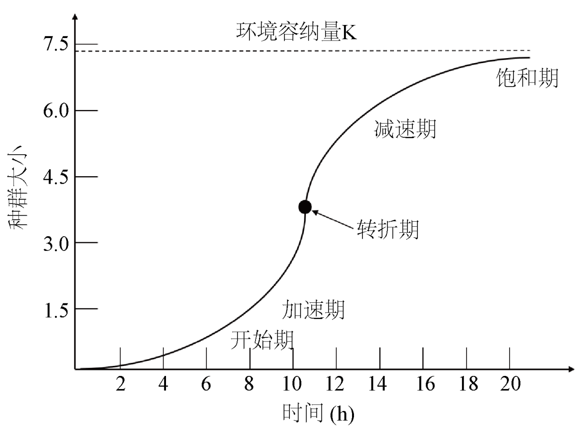

Figure 1. S-type growth curve
图 1. S 型增长曲线

3. 多种群生物模型

3.1. 两物种相互竞争的数学模型

设两种群在同一环境下依赖同一有限资源生存，种群获得的资源与其增长率呈现正相关，如生长在

同一块草原上的羊和兔子。设时刻 t 时两物种群体数分别为 $N_1(t)$ 和 $N_2(t)$，种群的增长均受到自身规律的制约，自然增长率分别为 r_1 和 r_2，当对方灭绝时生存数分别 K_1 和 K_2。

设定初始时刻两种群数量均较小。由于开始时资源丰富，第二种群对第一种影响不大，可以认为第一种群以自然增长率增长。但随着两种群繁衍增多，资源减少，第一种群增长减缓，当资源消耗到一定程度，第一种群不再增长，增长率变为 0。若第二种群个体消耗资源是第一种群个体消耗的 a_1 倍，则第一物种群体的增长率为

$$r_1 \cdot \left(1 - \frac{N_1 + a_1 N_2}{K_1}\right) N_1$$

类似地，若第一种群个体消耗资源是第二种群个体消耗的 a_2 倍，则第二物种群体的增长率为

$$r_2 \cdot \left(1 - \frac{N_2 + a_2 N_1}{K_2}\right) N_2$$

从而，两种群总数 $N_1(t)$ 和 $N_2(t)$ 满足下列微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}t} = r_1 \cdot \left(1 - \dfrac{N_1 + a_1 N_2}{K_1}\right) N_1 \\ \dfrac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t} = r_2 \cdot \left(1 - \dfrac{N_2 + a_2 N_1}{K_2}\right) N_2 \end{cases} \tag{4}$$

引入

$$b_{11} = \frac{r_1}{K_1},\quad b_{12} = \frac{r_1 a_1}{K_1},\quad b_{21} = \frac{r_2 a_2}{K_2},\quad b_{22} = \frac{r_2}{K_2} \tag{5}$$

将(5)式代入(4)式得

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}t} = N_1 \left(r_1 - b_{11} N_1 - b_{12} N_2\right) \\ \dfrac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t} = N_2 \left(r_2 - b_{21} N_1 - b_{22} N_2\right) \end{cases} \tag{6}$$

赋予种群初值后，方程组(6)即为两物种竞争系统的数学模型。

3.2. 具共生形式的种群数学模型

两个种群共生的现象也是很常见的。如植物与昆虫，昆虫以植物花粉为食，昆虫授粉能加快植物的生长速度，昆虫在没有植物的情况下是无法单独生存的。共生现象可以描述如下：设甲种群能够独立存在并按照 Logistic 模型的规律发展，乙种群能够为甲种群提供食物，促进甲的增长。

类似于方程(4)，可以写出种群数量演化规律：

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = r_1 x_1 \left(1 - \frac{x_1}{N_1} + a_1 \frac{x_2}{N_2}\right) \tag{7}$$

其中 a_1 表示单位数量的种群乙可为单位数量的种群甲提供所需要的食物的倍数，上式隐含着种群甲的消失会导致种群乙的灭亡。

设种群乙的死亡率为 r_2，则其单独自然生存满足

$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = -r_2 x_2 \tag{8}$$

当种群甲可为种群乙提供食物时，上式右端应加上种群甲对种群乙的增长促进作用，这时有

$$\frac{dx_2}{dt}=r_2x_2\left(-1+a_2\frac{x_1}{N_1}\right) \tag{9}$$

由于同时种群乙的增长还受到自身繁衍增长的阻滞作用，所以(9)式右端还应添加 Logistic 抑制项，这样，方程最终定格为

$$\frac{dx_2}{dt}=r_2x_2\left(-1+a_2\frac{x_1}{N_1}-\frac{x_2}{N_2}\right) \tag{10}$$

表达式(7)和(10)共同构成共生生物系统的数学模型。

4. 小结

种群生态问题是生物学研究的焦点内容，利用数学理论和思想构建模型成为生物学研究的重要手段。本文较详细地介绍了单种群和双种群基本模型的构建过程，可促进初学生物数学者对模型内涵的理解，提升对模型的扩展能力。

基金项目

浙江海洋大学 2018 年度大学生创新训练计划项目(xj2018097)。

参考文献

[1] 王力勤, 彭白桦. Logistic 模型及其应用[J]. 成都气象学院学, 1997(12): 36-39.

[2] 马志恩. 种群生态学的建模与研究[M]. 合肥: 安徽教育出版社, 1996.

[3] 李百炼, 靳祯, 等. 生物入侵的数学模型[M]. 北京: 高等教育出版社, 2013.