

# FEM Analysis of Restitution Coefficient of Free Rocking Block with Tendon

Yanping Liang, Xiaozu Su\*

Department of Structural Engineering, College of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai  
Email: xiaozusu@mail.tongji.edu.cn

Received: Aug. 23<sup>rd</sup>, 2018; accepted: Sep. 10<sup>th</sup>, 2018; published: Sep. 17<sup>th</sup>, 2018

---

## Abstract

The values of coefficient of restitution (COR) of free rocking blocks with tendons were investigated by establishing numerical models using ABAQUS. The analysis parameters were the aspect ratio, tendon stiffness, and initial displacement. The results reveal that the COR showed some random nature. The aspect ratio had a significant effect on the COR, however the tendon stiffness and the initial displacement had little effect on the COR. The theoretical COR formula was accurate enough for slender blocks, but showed larger errors for dumpy blocks. The average values of COR for cases covered in this paper were given for reference use in related calculations.

## Keywords

Block, Free Rocking, Coefficient of Restitution, Tendon, ABAQUS

---

# 有力筋块体自由摇摆振动恢复系数有限元分析

梁艳苹, 苏小卒\*

同济大学土木工程学院建筑工程系, 上海  
Email: xiaozusu@mail.tongji.edu.cn

收稿日期: 2018年8月23日; 录用日期: 2018年9月10日; 发布日期: 2018年9月17日

---

## 摘要

采用ABAQUS数值模拟方法, 建立了有力筋块体自由摇摆振动的数值模型, 以块体的高宽比、力筋刚度、初始位移为分析参数, 研究了不同参数水平下块体自由摇摆振动的恢复系数。研究发现恢复系数具有一定的随机离散性; 高宽比对恢复系数有显著影响, 力筋的施加以及初始位移的大小对恢复系数几乎没有

\*通讯作者。

影响; 恢复系数的理论值, 可以直接用于高瘦型块体的计算, 但对矮胖型块体的计算则误差较大。给出了不同情况下恢复系数的试验平均值, 可供计算时参考。

## 关键词

块体, 自由摇摆振动, 恢复系数, 力筋, ABAQUS

Copyright © 2018 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

目前, 除了采用消震与隔震措施, 一般的建筑结构在地震作用下是通过自身的不可恢复变形和损伤来耗散地震能量, 在大震作用下, 即使结构没有发生倒塌, 因耗散地震能量而产生的变形和损伤也常常会导致结构难以修复或加固费用昂贵, 甚至需要推倒重建。而摇摆结构在地震作用下以刚体运动为主, 变形和损伤均很小, 因此受到越来越多研究者的关注[1] [2] [3] [4]。

摇摆结构的概念由 Housner [5]于 1963 年首次提出。Housner 以刚性地面上的平面矩形刚性块体(图 1)作为研究对象, 分析了块体在自由振动下的周期及耗能, 在常水平加速度、正弦波加速度及水平地震力作用下的倾覆反应。Pena [6]等通过试验研究了花岗岩块体在刚性基础上的自由振动摇摆响应, 并采用两种计算模型分别计算块体在正弦波激励和地震波激励下的反应。Cheng [8]用有力筋的钢筋混凝土试块模拟桥墩进行了自由振动试验, 分析了接触面材料、力筋面积、试件高宽比及横截面尺寸四个影响因素对混凝土块体在摇摆振动中的滑移、最大加速度、阻尼比等响应的影响。Maryam [9]等以 NEESR-CR 项目中的摇摆墙为原型, 进行了四个 1/3.6 单片有力筋的摇摆墙试件的振动台试验, 分析了初始预应力和力筋截面面积对墙体的底部应力、碰撞面范围及抬升高度的影响。Vassiliou 和 Makris [10]从理论出发研究了有力筋块体(图 2)在地震作用下的摇摆振动响应, 分析了力筋的刚度对系统刚度的影响。

Schau [11]等将摇摆振动理论方程所得位移响应与 ABAQUS 模拟结果进行了比较, 其中方程计算采用四阶 Runge-Kutta 迭代法并采用不同的恢复系数分析; ABAQUS 模拟中采用平面应力单元, 分析不同的接触条件、基础特性、刚体底部几何尺寸的微小改变对位移响应的影响。Kalliontzis [12] [13]等做了一系列摇摆振动试验, 基于 ABAQUS 对试验进行模拟, 并在模拟中引入 Rayleigh 阻尼系数, 研究了摇摆振动过程中柱的位移时程、速度 - 位移相图以及力筋中力的变化图。

目前, 虽然对摇摆振动已有一定的理论与试验研究, 但理论研究基本都是基于块体和基础都为刚性且无弹跳与滑移的假定, 同时相应的试验研究成果较少, 如何建立合理有效的摇摆振动模型仍处于探索之中, 各参数对振动响应的影响也有待进一步分析与讨论。

本文提出一种模拟摇摆振动的 ABAQUS 建模方法, 通过与已有试验结果对比验证方法的正确性。模型根据实际情况定义材料特性和接触特性, 避免了理论研究的刚体假定和无弹跳、滑移的假定, 之后研究了不同参数水平下块体的碰撞恢复系数。

## 2. 有限元模型的建立与验证

### 2.1. 试验说明

本文以 Kalliontzis [13]完成的摇摆振动试验作为标定试验, 验证建模方法的正确性。试验中的摇摆系

统(图3)主要由柱、基础、柱顶质量块、水泥层以及柱内无粘结力筋组成,各部分尺寸如图3所示。柱的质量为553.4 kg,质量块重1080 kg,质量块顶部与柱顶齐平;力筋两端分别与柱顶面和基础底面锚固。力筋采用强度等级为Grade270的七束钢绞线,横截面面积为140 mm<sup>2</sup>,初始预应力为69.9 MPa,弹性模量为199,948 MPa。柱、质量块、基础的弹性模量为26,372.45 MPa,水泥层为41,368.55 MPa。试验中,液压千斤顶通过牵拉环在质量块的高度中部施加力,使柱产生初始角位移0.03 rad,之后释放该力,使柱体产生自由摇摆振动,并通过LED测控系统测量位移。

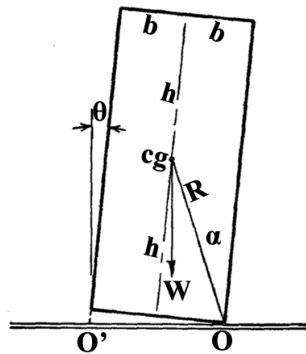


Figure 1. A rocking block [5]  
图1. 摇摆块体[5]

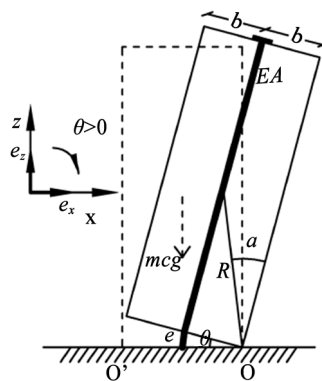


Figure 2. A rocking block with tendons [10]  
图2. 有力筋的摇摆块体[10]

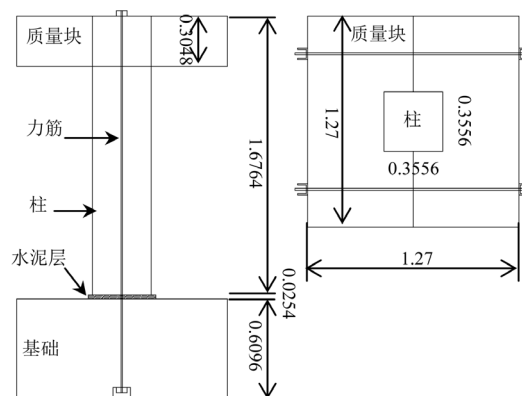


Figure 3. The experiment rocking system (unit: m)  
图3. 试验中的摇摆系统(单位: m)

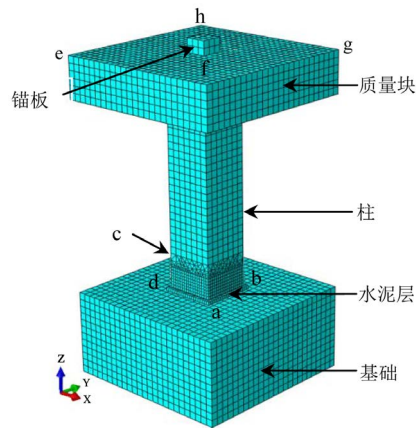


Figure 4. The ABAQUS model of the experiment rocking system  
图 4. 试验中摇摆系统的 ABAQUS 模型

## 2.2. ABAQUS 有限元模型说明

对摇摆振动选用显式动力学方法建立接触条件更为容易, 因此选用 ABAQUS 6.13/Explicit 作为分析平台。模型中各部分尺寸及材料参数按照试验取定, 材料为弹性, 力筋线膨胀系数根据钢结构设计规范取  $1.2 \times 10^{-5}$ 。完成的 ABAQUS 模型如图 4 所示, 对建模中关键内容说明如下。

### 2.2.1. 网格划分及单元类型选取

在系统摇摆过程中, 整体以刚体运动为主, 只有柱底部与水泥层有碰撞, 为减小模型的体量, 将柱沿高度方向分段划分网格。上部和下部采用 C3D8R 单元, 增强沙漏控制(enhanced), 中间过渡部分选择 C3D4 单元。力筋选用 T3D2, 基础、质量块、水泥层以及锚板的单元类型与柱上部相同。

### 2.2.2. 各部件之间相互作用定义

柱与质量块、基础与水泥层分别以一个部件建模; 柱顶部和锚板、基础底部和锚板之间用束缚约束(Tie)连接在一起。以柱底面和水泥层顶面作为接触面定义通用接触, 切向特性中摩擦公式选罚函数(Penalty), 摩擦系数取 0.6, 法向特性中选硬接触(“Hard” Contact), 其余取默认值。

### 2.2.3. 分析步的设置及荷载、边界条件施加

试验通过五个分析步来实现。初始分析步, 加 z 向重力  $g = -9.8 \text{ m/s}^2$ , 约束基础底面三个方向的平动位移。第二个分析步, 以降温法给力筋施加初始预应力, 分析步时长 0.01 s。第三个分析步, 给柱体及质量块施加绕 y 轴初始角位移 0.03 rad, 时长 0.2 s; 为防止出现三维振动, 约束柱体和质量块的 y 向平动位移直至分析结束。第四个分析步, 使柱体及质量块在初始位移状态下保持稳定, 时长 0.05 s。第五个分析步, 释放初始位移, 使结构摇摆, 时长 5 s。

## 2.3. 有限元结果与试验结果对比

### 2.3.1. 数值计算有效性分析

在 ABAQUS/Explicit 分析中, 可以通过各种能量之间的比较, 帮助评估一个分析是否得到了合理及准确的响应(ABAQUS 6.13 帮助文件), 通常总能量(total energy, ETOTAL)应保持为一个常数或接近于一个常数, 伪应变能(artificial energy, ALLAE)与实际的能量如动能(kinetic energy, ALLKE)、内能(internal energy, ALLIE)相比应是可以忽略的。图 5 给出摇摆过程中的能量图, 可以看到, 总能量的数值基本保持在 2~5 之内, 伪应变能接近于零, 与动能和内能相比, 总能量接近于一个常数, 伪应变能可以忽略, 因

此认为模型结果计算有效。

### 2.3.2. 位移时程对比及分析

通过 GetData Graph Digitizer 软件对试验结果(文献[13]中的 Figure 4-18)进行数据提取, 试验与数值模拟所得的角位移时程对比结果见图 6。

由图 6 可以看到, 在振动前 4 s, 试验结果与数值模拟所得结果在振动周期上吻合度很好, 振幅间的差值随着振动时间的增加逐渐增加。造成振幅有差值的原因主要是数值模拟中没有考虑力筋与管道之间的摩擦产生的能量损失。实际试验中, 力筋与管道之间不可避免的存在着摩擦, 在结构摇摆的过程中, 力筋反复伸长与回缩, 与管道之间产生摩擦进而产生能量损耗, 导致振幅减小。由于目前的建模方法还不能准确的模拟这部分耗能对振幅的影响, 同时考虑到本文主要探讨不同参数对恢复系数的影响, 因而本文数值试验中均不考虑此项摩擦。

## 3. 无力筋时碰撞恢复系数的有限元试验设计

### 3.1. 数值试验模型

图 7 为有力筋块体摇摆振动的计算简图。块体以角点 O 或 O' 为转动轴作刚体运动, 当块体运动到  $\theta = 0$  时, 与基础发生碰撞, 随之转动轴发生改变, 因而摇摆振动的方程是分段连续的。根据块体绕角点 O 的动量平衡推导得到块体绕一个角点的运动方程如式(1):

$$I_o \frac{d^2\theta}{dt^2} + WR \sin(\alpha - \theta) + (F_0 + F_e) b = 0 \quad (1)$$

式中  $I_o = 4 MR^2/3$  是矩形块体对角点 O 的动量矩, W 是块体重力,  $F_e = E_s A_s \varepsilon = E_s A_s \tan \alpha |\sin \theta/2|$  是由力筋伸长产生的恢复力,  $F_0 = \sigma_0 A_s$  是由初始预应力产生的恢复力。由(1)式可以看到, 在振动过程中, 有力

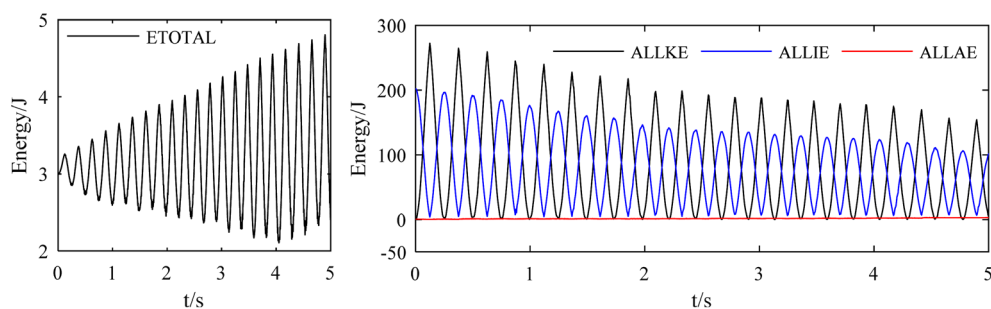


Figure 5. The energy in the system

图 5. 系统能量图

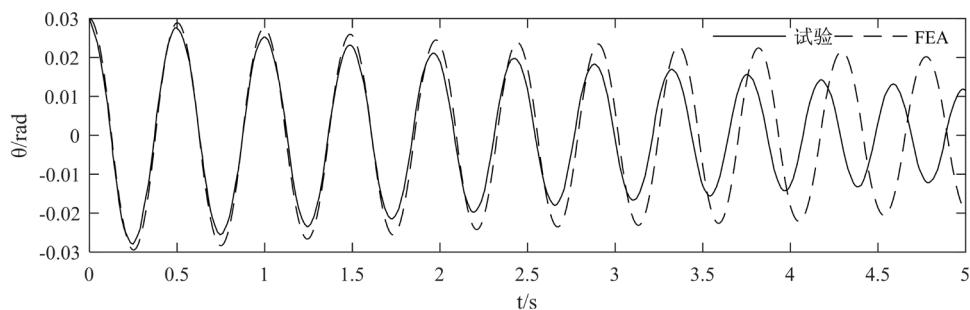


Figure 6. Comparison of angular displacement time histories

图 6. 角位移时程对比图

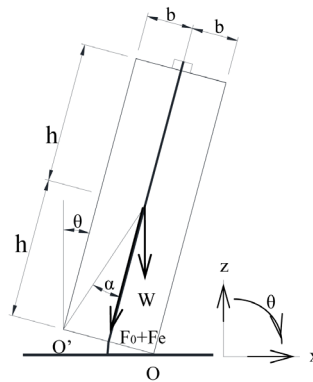


Figure 7. A rocking block with tendons  
图 7. 有力筋块体计算简图

筋的块体有三部分恢复力,  $W$ 、 $F_c$  及  $F_0$ , 当  $F_0 = 0$  和  $F_c = 0$  同时满足时, (1)式即为无力筋的摇摆振动系统的运动方程, 只有重力恢复力, 同 Housner [5]提出的运动方程一样。

理论方程中一般假定能量损耗集中在碰撞过程, 并以 Housner [5]提出的恢复系数  $r$  来表示能量损耗。当  $r$  值已知, 则摇摆振动的整个运动过程即确定, 因此  $r$  在摇摆振动的研究中有极为重要的作用。 $r$  定义为碰撞后与碰撞前块体的动能之比, 对矩形无力筋的块体  $r = (1 - 3\sin^2 \alpha/2)^2$ , 目前关于恢复系数的研究 [6] [7] [14] 仍是基于试验在此基础上进行修正, 并没有统一有效的方法可以直接计算恢复系数, 而对有力筋块体的恢复系数目前还没有相关计算公式。

### 3.2. 试验说明

数值试验模型包括块体、基础、力筋及锚板(图 8)。基础和块体的材料选 C30 混凝土, 弹性模量为  $3 \times 10^{10}$  Pa, 密度为  $2400 \text{ kg/m}^3$ 。块体与基础间的摩擦系数取 0.6。所有模型中的基础尺寸均为  $1.5 \text{ m} \times 1.5 \text{ m} \times 0.4 \text{ m}$  (长  $\times$  宽  $\times$  高)。力筋采用钢绞线, 弹性模量为  $1.95 \times 10^{11}$  Pa, 密度为  $7850 \text{ kg/m}^3$ , 线膨胀系数  $\alpha = 1.2 \times 10^{-5}/^\circ\text{C}$ ; 锚板选用钢板, 弹性模量  $2.06 \times 10^{11}$  Pa, 密度  $7850 \text{ kg/m}^3$ 。为防止三维振动, 约束块体  $y$  方向中面(即 ABC 面)的  $y$  向位

根据定义, 恢复系数由碰撞后与碰移, 分析步设置、边界条件以及荷载施加方式都与标定试验相同。

定义力筋刚度为  $\Pi_E = E_s A_s / W$ , 角位移为  $\Theta = \theta / \alpha$ , 数值试验中取块体宽度为  $0.4 \text{ m}$ , 初始预应力为 0, 以块体高宽比  $h/b$ 、力筋刚度  $\Pi_E$  及初始角位移  $\Theta_0$  为变量设计了具有不同水平的 12 个数值模型(见表 1), 可以看到, 这三个参数均是无量纲参数, 当  $\Pi_E = 0$  时即为无力筋的情况。模型名称按照 “ $h/b - \Pi_E - \Theta_0$ ” 的方式编写, 如 4-300-0.1 表示块体高宽比为 4, 力筋刚度  $\Pi_E = 300$ , 初始角位移  $\Theta_0 = 0.1$ 。

### 4. 试验结果及分析

撞前的动能之比求得, 在本文计算中, 由于在摇摆过程中块体无明显损伤, 故认为块体质量在整个摇摆过程中保持不变, 由碰撞后与碰撞前速度的平方之比求得各数值模型的恢复系数。图 9(a)~图 9(d)给出了 12 个数值试验的恢复系数随碰撞次数  $n$  的变化图, 图中实线为恢复系数理论值(以下简称理论值), 高宽比为 4、6、10 时, 理论值分别为 0.83132、0.92056、0.97052。

由图 9 可以看到, 因为考虑了块体和基础的实际材质以及接触条件, 数值试验所得的恢复系数(以下简称试验值)并不是一个固定值, 而是在振动过程中以理论值为基准线随机波动, 整体呈现离散状态, 由文献[14]也可看到这一点。高宽比为 6 和 10 的块体, 恢复系数的离散性较小, 且高宽比为 6 的块体其理论值是试验值的下限, 而高宽比为 10 的块体其理论值则基本是试验值的均值, 相比较而言, 高宽比为 4

的块体的恢复系数离散性更大, 理论值是试验值的偏上界。

对块体在整个振动过程中的恢复系数取平均值, 并将试验平均值  $r_1$  与理论值  $r_0$  进行比较, 以  $e = (r_1 - r_0)/r_0$  表示试验平均值与理论值的相对差值, 见表 2。

**Table 1.** Parameters of model specimens

**表 1.** 模型试件参数

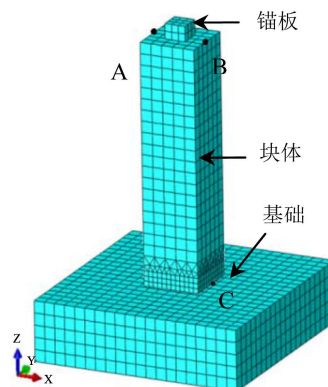
模型名称	h/b	$\Pi_E$	$\Theta_0$
4-0-0.1	4	0	0.1
4-300-0.1	4	300	0.1
4-650-0.1	4	650	0.1
6-0-0.1	6	0	0.1
6-300-0.1	6	300	0.1
6-650-0.1	6	650	0.1
10-0-0.1	10	0	0.1
10-650-0.1	10	650	0.1
10-6500-0.1	10	6500	0.1
6-0-0.5	6	0	0.5
6-70-0.5	6	70	0.5
6-300-0.5	6	300	0.5

**Table 2.** Average values of COR

**表 2.** 恢复系数平均值

高宽比(初始位移)	无力筋情况		有力筋情况 1		有力筋情况 2		理论解 $r_0$
	$r_1$	$e$ (%)	$r_1$	$e$ (%)	$r_1$	$e$ (%)	
4 (0.1)	0.69588	-16.292	0.76454	-8.033	0.77014	-7.360	0.83132
6 (0.1)	0.95589	3.838	0.95761	4.025	0.96437	4.759	0.92056
10 (0.1)	0.96489	-0.580	0.9394	-3.207	0.97978	0.954	0.97052
6 (0.5)	0.94899	3.088	0.95207	3.423	0.94718	2.892	0.92056

注: 有力筋情况 1 包括 4-300-0.1、6-300-0.1、10-650-0.1、6-70-0.5, 有力筋情况 2 包括 4-650-0.1、6-650-0.1、10-6500-0.1、6-300-0.5。



**Figure 8.** ABAQUS model used in the numerical analysis

**图 8.** 数值分析的 ABAQUS 模型

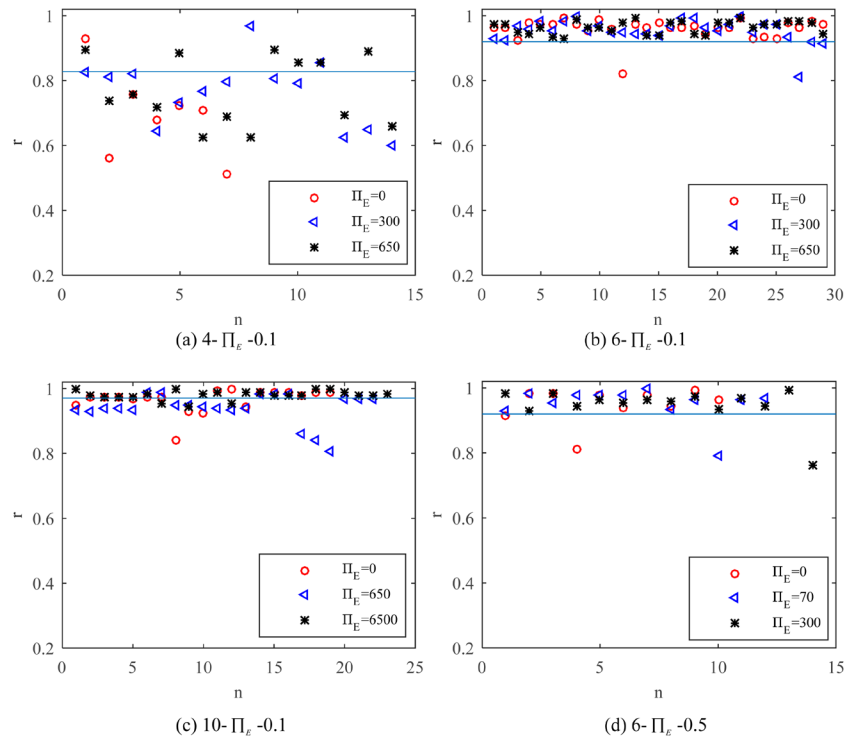


Figure 9. The values of COR of model specimens  
图 9. 模型试件的恢复系数

从表 2 看, 对高宽比为 4 的块体, 力筋的施加对恢复系数  $r$  的平均值有较为明显的影响, 但由图 9(a) 可以看到, 因为  $r$  本身具有极大的离散性, 所以实际的  $r$  并不因力筋的施加而具有显著变化; 对高宽比为 6 和 10 的块体, 无论是从表 2 中  $r$  的试验平均值方面还是图 9(b)~图 9(d) 中  $r$  随碰撞次数变化方面, 力筋的施加对恢复系数都不具有显著影响。由图 9(b)、图 9(d) 以及表 2 可以看到, 初始位移对恢复系数没有显著影响。

## 5. 结论

1) 在振动过程中, 恢复系数  $r$  具有一定的随机离散性, 并不像理论所得为一恒定值, 且矮胖型块体的恢复系数离散性更大。

2) 对瘦高型的块体, 其恢复系数可以用理论计算值表示, 相对误差很小; 但是对于矮胖型块体, 理论值存在较大误差。本文给出的各工况下的恢复系数试验平均值, 可供相关计算参考。

3) 块体是否加力筋以及所加力筋的大小, 对恢复系数似无显著影响。

4) 初始位移的大小对恢复系数无明显影响。

本文的建模方法未考虑力筋与管道之间的摩擦, 同时因为计算时间原因对高宽比为 6 和 10 的块体并未分析其运动全过程, 只分析了前 10 s 的运动, 之后的研究可以在这些方面进一步改进与探讨。

## 基金项目

国家自然科学基金项目(51178328)。

## 参考文献

- [1] 周颖, 吕西林. 摇摆结构及自复位结构研究综述[J]. 建筑结构学报, 2011, 32(9): 1-10.



- [2] 曹海韵, 潘鹏, 叶列平, 等. 混凝土框架摇摆墙结构体系的抗震性能分析[J]. 建筑科学与工程学报, 2011, 28(1): 64-69.
- [3] 吕西林, 崔晔, 刘兢兢. 自复位钢筋混凝土框架结构振动台试验研究[J]. 建筑结构学报, 2014, 35(1): 19-26.
- [4] 鲁亮, 樊宇, 吕西林, 等. 受控摇摆式钢筋混凝土框架抗震机理研究[J]. 地震工程与工程振动, 2015, 1(1): 66-76.
- [5] Housner, G.W. (1963) The Behavior of Inverted Pendulum Structures during Earthquakes. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **53**, 403-417.
- [6] Peña, F., Prieto, F., Lourenço, P.B., et al. (2007) On the Dynamics of Rocking Motion of Single Rigid-Block Structures. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, **36**, 2383-2399. <https://doi.org/10.1002/eqe.739>
- [7] Elgawady, M.A., Ma, Q., Butterworth, J.W., et al. (2011) Effects of Interface Material on the Performance of Free Rocking Blocks. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, **40**, 375-392. <https://doi.org/10.1002/eqe.1025>
- [8] Cheng, C.-T. (2007) Energy Dissipation in Rocking Bridge Piers under Free Vibration Tests. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, **36**, 503-518. <https://doi.org/10.1002/eqe.640>
- [9] Nazari, M., Aaleti, S. and Sritharan, S. (2014) Shake Table Testing of Unbonded Post-Tensioned Precast Concrete Walls. *Proceedings of the 10th National Conference in Earthquake Engineering*, Earthquake Engineering Research Institute, Anchorage, AK.
- [10] Vassiliou, M.F. and Makris, N. (2015) Dynamics of the Vertically Restrained Rocking Column. *Journal of Engineering Mechanics*, **141**, 04015049. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)EM.1943-7889.0000953](https://doi.org/10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0000953)
- [11] Schau, H. and Johannes, M. (2014) Numerical Analysis of Rocking of Unanchored Bodies Subjected to Seismic Load Using Finite Element Analyses. *Proceedings of the 9th International Conference on Structural Dynamics, EURO DYN*, Porto, 30 June-2 July 2014.
- [12] Kalliontzis, D. and Sri, S. (2014) A Finite Element Approach for Modelling Controlled Rocking Systems. *2nd European Conference on Earthquake Engineering and Seismology*, Istanbul, 25-29 August 2014.
- [13] Kalliontzis, D. (2014) Dynamic Decay of Motion of Rocking Concrete Members. MD Thesis, Iowa State University, Ames, Iowa.
- [14] Kalliontzis, D., Sritharan, S. and Schultz, A. (2016) Improved Coefficient of Restitution Estimation for Free Rocking Members. *Journal of Structural Engineering*, **142**, 06016002. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)ST.1943-541X.0001598](https://doi.org/10.1061/(ASCE)ST.1943-541X.0001598)

#### 知网检索的两种方式:

1. 打开知网页面 <http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD>  
下拉列表框选择: [ISSN], 输入期刊 ISSN: 2326-3458, 即可查询
2. 打开知网首页 <http://cnki.net/>  
左侧“国际文献总库”进入, 输入文章标题, 即可查询

投稿请点击: <http://www.hanspub.org/Submission.aspx>  
期刊邮箱: [hjce@hanspub.org](mailto:hjce@hanspub.org)