

Shear Bearing Capacity Analysis of Protective Beams on the Basis of Softened Truss Theory

Shan Yao¹, Chuanzheng Chai², Yun Song¹

¹Gansu Engineering Design & Research Institute Limited Liability Company, Lanzhou Gansu

²Western Theater Command Air Force Prospect and Design Institute, Chengdu Sichuan

Email: yaoshan8@126.com

Received: Jan. 28th, 2020; accepted: Feb. 13th, 2020; published: Feb. 20th, 2020

Abstract

On the basis of softened truss theory, established constitutive models for the softening characteristics of Fiber Reinforced Cementitious Composite (FRCC), High-stress Fine Grain Bar and FRCC Beams are studied with the application of strip method. Shear bearing capacity analysis is calculated with different sectional, FRCC strength, bar strength and reinforcement ratio. The result manifested that: with the increase of the beam section, the strength of FRCC and the Bar, the shear bearing capacity increases linearly, but increasing slowly when the strength of the Bar exceeds 700 MPa; the compatibility of FRCC and the Bar influences entirety shear bearing capacity.

Keywords

Softened Truss Theory, Protective Beams, Strip Method, Shear Bearing Capacity

基于软化桁架理论的人防框架梁 受剪承载力分析

姚山¹, 柴传政², 宋赞¹

¹甘肃省工程设计研究院有限责任公司, 甘肃 兰州

²西部战区空军勘察设计院, 四川 成都

Email: yaoshan8@126.com

收稿日期: 2020年1月28日; 录用日期: 2020年2月13日; 发布日期: 2020年2月20日

摘要

以高强细晶粒钢筋和纤维增强水泥基复合材料人防框架梁为研究对象, 基于软化桁架理论, 构造水泥基材料软化特征下的本构模型, 应用条带法编制非线性计算程序, 计算不同截面、水泥基材强度、钢筋强度和配筋率下人防框架梁斜截面受剪承载力大小, 计算结果表明: 随着梁截面的增大、水泥基材强度和钢筋强度的提高, 受剪承载力基本呈线性增长, 但钢筋强度但超过700 MPa后受剪承载力增长减缓, 水泥基材强度与钢筋强度的匹配性, 影响整体受剪承载力。

关键词

软化桁架理论, 人防框架梁, 条带法, 受剪承载力

Copyright © 2020 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

影响混凝土构件受剪强度的因素众多, 其破坏形态复杂, 对于承受冲击荷载的防护结构构件更是如此。高强细晶粒钢筋是一种强度高、延性好的新型钢筋。纤维增强水泥基复合材料(Fiber Reinforced Cementitious Composite, 简称 FRCC)是一种由金属或非金属纤维增强水泥和其他基材的复合材料, 其抗拉、抗压、抗折强度以及抗裂性能较普通混凝土有明显的提高, 用高强细晶粒钢筋增强 FRCC, 可形成一种新型的配筋水泥基结构[1], 研究其受剪承载能力, 有较为重要的意义。国内外提出的钢筋混凝土结构剪切破坏分析方法较多, 由 Thomas T.C. Hsu、Mo Y.J 和 Mau S.T 等建立的“软化桁架理论”属于非线性有限元分析法的一种, 随着计算机编程技术的发展而出现, 对于一般线性构件的受剪承载力分析略显复杂, 但对于由新型材料组成的构件分析仍然具有一定的应用价值。

2. 基本理论和计算原理

2.1. 基本原理

软化桁架理论的基本假定为: 构件中混凝土平均应力和平均应变分别服从莫尔应力和应变圆, 且主应力与主应变方向一致; 混凝土和钢筋应力应变曲线均采用软化的应力应变曲线, 软化系数由主应变决定。根据开裂后裂缝方向是否变化分为变角软化桁架理论和定角软化桁架理论[2]。

根据软化桁架模型, 配有腹筋的梁在受剪时, 先是混凝土沿倾角 θ 开裂, 形成“混凝土斜压杆”。随着剪切荷载的增加, “混凝土斜压杆”中的主压应变 ε_n 逐渐增大, 同时由于主拉应变 ε_t 的存在和增大, 使得平均主压应力 σ_n 被“软化”。裂缝间纵向钢筋和竖向钢筋中的平均应力也逐渐增加。在梁发生受剪破坏之前, 梁底纵向钢筋一般达不到屈服, 否则在梁弯矩最大而剪力较小的截面将发生受弯破坏。然而, 当斜裂缝处竖向钢筋(主要是箍筋)达到屈服后, 箍筋对“混凝土斜压杆”的横向约束作用明显降低, 主拉应变 ε_t 的增加显著, 使得“混凝土斜压杆”的平均主压应力 σ_n 增长缓慢。当“混凝土斜压杆”的主压应力 σ_n 下降时, 桁架模型中的斜向压杆软化失效, 造成桁架内的荷载传递线路发生改变, 箍筋的内力将急剧增加, 同时斜裂缝将迅速增宽, 使得裂缝处骨料咬合力急剧下降, 梁沿斜裂缝断面发生错动, 形成受

剪破坏。因而，受剪破坏的控制条件应该是“混凝土斜压杆”平均主压应力 σ_n 达到最大值。将上述理论应用于高强细晶粒钢筋和纤维增强水泥基复合材料人框架梁的受剪承载力计算，仍可通过截面平衡方程、变形协调方程和本构关系得到。为方便表述，本文将高强细晶粒钢筋简称为钢筋；纤维增强水泥基复合材料简称为水泥基材。

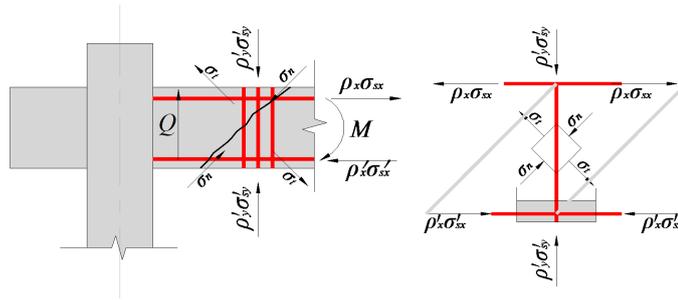


Figure 1. Softened truss figure
图 1. 软化桁架模型图

2.2. 截面平衡方程

取弯剪区钢筋水泥基材软化桁架模型如图 1，取斜截面中微元体进行分析，图 2。在平面内应力—应变坐标变换中， x 、 y 坐标为初始坐标， x 方向和纵向钢筋方向一致， y 方向和箍筋方向一致； n 、 t 坐标为主应力方向坐标， n 为主压应力， t 为主拉应力。根据假定，作用在水泥基材微元体上的应力符合摩尔应力圆。若不考虑钢筋的销栓作用，即钢筋仅能抵抗轴向应力，钢筋水泥基材平面微元体的应力状态即等价于水泥基材应力状态与钢筋应力状态之和。

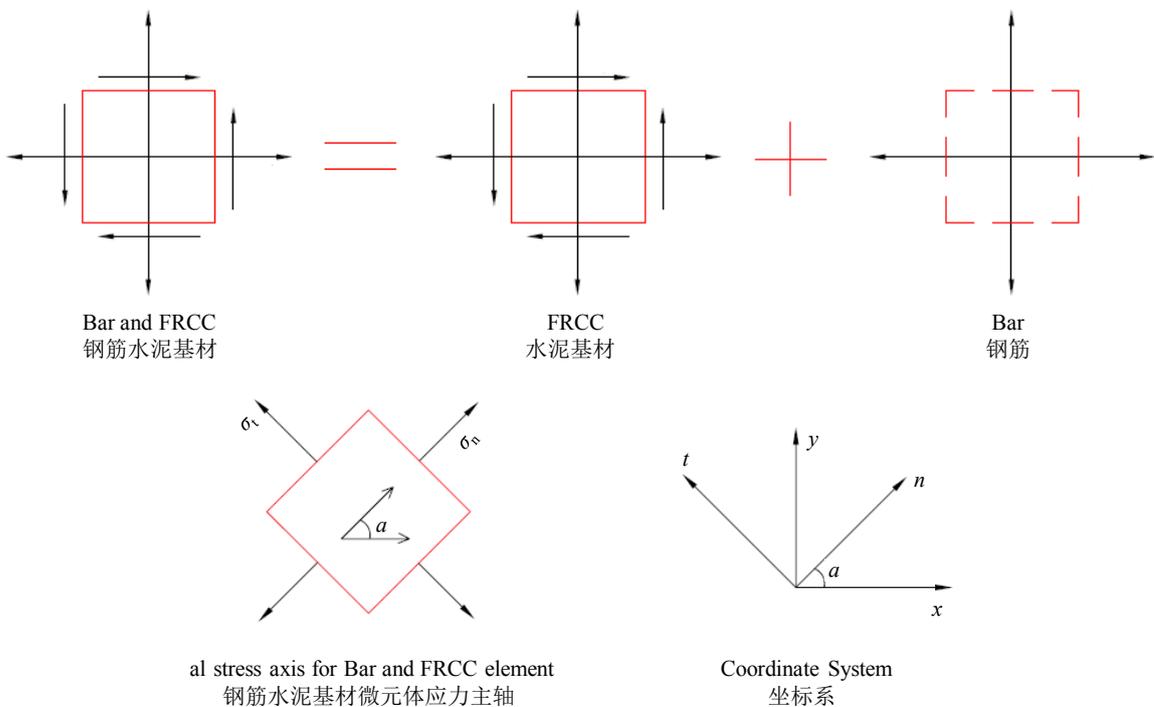


Figure 2. Stress State of plane microelement for Bar and FRCC
图 2. 钢筋水泥基材平面微元体应力状态

根据以上微元体受力平衡原则, 由水泥基材和钢筋的应力变换关系, 即得软化桁架模型三个平衡方程:

$$\begin{cases} \sigma_x = \sigma_t \sin^2 \alpha + \sigma_n \cos^2 \alpha + \rho_x \sigma_{sx} \\ \sigma_y = \sigma_t \cos^2 \alpha + \sigma_n \sin^2 \alpha + \rho_y \sigma_{sy} \\ \tau_{xy} = (\sigma_n - \sigma_t) \sin \alpha \cdot \cos \alpha \end{cases} \quad (1)$$

式中: σ_x 、 σ_y — x 和 y 方向的正应力(受拉为正); σ_n 、 σ_t — n 和 t 方向的主应力(受拉为正); τ_{xy} — x 、 y 坐标系中的剪应力(图 2 所示为正方向); α — n 轴对 x 轴的倾角; ρ_x 、 ρ_y —纵向非预应力钢筋、箍筋的配筋率; σ_{sx} 、 σ_{sy} —纵向非预应力钢筋、箍筋的应力。

2.3. 变形协调方程

根据假定, 钢筋应变与水泥基材应变协调, 且水泥基材单元中的应力 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} 相对应的应变 ε_x 、 ε_y 、 γ_{xy} 符合 Mohr 应变圆, 从而可得桁架模型三个变形协调方程:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \varepsilon_t \sin^2 \alpha + \varepsilon_n \cos^2 \alpha \\ \varepsilon_y = \varepsilon_t \cos^2 \alpha + \varepsilon_n \sin^2 \alpha \\ \gamma_{xy} = (\varepsilon_n - \varepsilon_t) \sin \alpha \cdot \cos \alpha \end{cases} \quad (2)$$

式中: ε_x 、 ε_y — x 和 y 方向的正应变(受拉为正); ε_n 、 ε_t — n 和 t 方向的主应变(受拉为正); γ_{xy} — x 、 y 坐标系中的剪应变(图 2 所示为正方向); α — n 轴对 x 轴的倾角。

2.4. 材料本构关系

FRCC 受压区应力—应变分段曲线为[3]:

$$\sigma_{cf} = \begin{cases} f_{cf} [\alpha_1 \xi + (3 - 2\alpha_1) \xi^2 + (\alpha_1 - 2) \xi^3] & \varepsilon_{cf} \leq \varepsilon_{0cf} \\ f_{cf} \frac{\xi}{\alpha_2 (\xi - 1)^2 + \xi} & \varepsilon_{cf} > \varepsilon_{0cf} \end{cases} \quad (3)$$

式中, $\xi = \varepsilon_{cf} / \varepsilon_{0cf}$, $\alpha_1 = E_0 / E_p$; E_0 为初始弹模, E_p 为峰值弹模; f_{cf} 为 FRCC 的抗压强度; ε_{0cf} 为 FRCC 的峰值压应变; σ_{cf} 和 ε_{cf} 分别为 FRCC 在任意点的压应力和压应变。

通过试验数据的统计分析, 可以得出 $\alpha_2 = 0.29 f_{cf}^{0.78} + 0.42$, α_2 为反映水泥基材塑性和脆性的参数, 通过变化 α_1 、 α_2 两个参数的值可以得到不同强度等级、不同材料水泥基材的应力—应变曲线, 这样, 就有可能利用既有的普通混凝土的本构关系将 FRCC 的本构关系构造出来, α_1 一般可以直接给出, 而 α_2 需要利用模型公式, 根据实测曲线数据用最小二乘法计算求出, 对 FRCC 而言, 这两个参数和纤维品种、纤维掺量和材料配合比相关。这时, 已将重新建立 FRCC 本构关系的问题转化为对特定混凝土本构方程中有关参数及关键指标的研究, 从而提出符合 FRCC 受力特点的参数或指标的问题。

同样的, 对抗拉试验, 可采用的分段拟合曲线方程为[3]:

$$\sigma_{tf} = \begin{cases} f_{tf} (\alpha_0 + \alpha_1 \xi + \alpha_6 \xi^6) & \varepsilon_{tf} \leq \varepsilon_{0tf} \\ f_{tf} \frac{\xi}{\alpha_t (\xi - 1)^\beta + \xi} & \varepsilon_{tf} > \varepsilon_{0tf} \end{cases} \quad (4)$$

上式中, $\xi = \varepsilon_{tf} / \varepsilon_{0tf}$, f_{tf} 为 FRCC 的抗拉强度; ε_{0tf} 为 FRCC 的峰值拉应变; σ_{tf} 和 ε_{tf} 分别为 FRCC 在任意点的拉应力和拉应变; 指数 β 一般可取为 1.8, α_t 根据实测曲线数据用最小二乘法计算求出,

$\alpha_{yf} = 0.44f_{yf}^2$ 。由于对于上升段, 需要满足边界条件为: $x = 0$ 时, $y = 0$ 和 $dy/dx = E_0/E_p$; $x = 1$ 时, $y = 1$ 和 $dy/dx = 0$; 对于下降段, 需要满足边界条件为: $x = 1$ 时, $y = 1$ 和 $dy/dx = 0$; $x \rightarrow \infty$ 时, $y \rightarrow 0$ 和 $dy/dx \rightarrow \infty$; 通过联立方程组, 可以求出 α_0 、 α_1 、 α_6 的值。

目前尚无针对水泥基材料受双向应力状态时软化特征方面的研究, 但可以将软化系数 ψ 引入(3)式, 将上述试验得到的受压区本构关系乘以软化系数 ψ , 从而构造出具有软化特征的水泥基材料本构模型:

$$\sigma_n = \begin{cases} \psi f_{cp} [\alpha_1 \xi + (3 - 2\alpha_1) \xi^2 + (\alpha_1 - 2) \xi^3] & \varepsilon \leq \psi \varepsilon_0 \\ \psi f_{cp} \frac{\xi}{\alpha_2 (\xi - 1)^2 + \xi} & \varepsilon > \psi \varepsilon_0 \end{cases} \quad (5)$$

上式中, ψ —软化系数, $\psi = 0.9(1 + 400\varepsilon_t)^{-0.5}$ 。

2.5. 剪跨区内微元体的应力

根据假定, 剪应力在正截面上平均分布, 对于矩形截面有:

$$\tau_{xy} = \frac{Q}{bh_0} \quad (6)$$

竖向正应力 σ_y 是由荷载与支座反力的联合作用或两者的局部作用产生的。对于集中荷载作用的人防框架梁, 剪跨比较小时, 上部荷载和反力的联合作用导致水平轴上有很大的横向压应力, 这些应力和弯曲正应力及剪应力的联合作用在腹板中形成复杂的应力状态。根据文献分析[2], σ_t 与外荷载 Q 成正比, 与剪应力 τ_{xy} 的关系, 可用比例常数 k_1 确定。

当 $a/h \leq 0.5$ 时, $k_1 = 2dch$; 当 $0.5 < a/h \leq 2$ 时, $k_1 = \frac{dc}{h} \left(\frac{4h}{3a} - \frac{2}{3} \right)$; 当 $a/h > 2$ 时, $k_1 = 0$ 。

在计算竖向正应力 σ_y 时, 还需考虑荷载或者反力的局部作用。该应力的实际分布情况非常复杂。根据文献[2]分析, 可按下述方法近似计算。

$$k_2 = \frac{dc}{2h} \left(1 - 0.3\lambda \frac{h_0}{h} \right) \quad (7)$$

总的来说, σ_y 可用剪应力 τ_{xy} 与某一比例常数 k 乘积决定, 即:

$$\sigma_y = k\tau_{xy} \quad (8)$$

对于人防框架梁, 弯矩对截面纵向应力的影响不可忽视, 应考虑剪跨比的影响, 根据软化桁架理论的基本假设, 引用平截面假定, 首先确定截面的平均纵向应变 ε_x , 以代表 σ_x 的作用。由于腹板的平均纵向应变为:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2}(\varepsilon_a + \varepsilon_b) \quad (9)$$

式中: ε_a —桁架上弦杆的应变; ε_b —桁架下弦杆的应变。

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = \frac{E}{2}(\varepsilon_a + \varepsilon_b) \quad (10)$$

3. 软化桁架理论模型计算

分析以上各个方程, 模型中基本方程的 12 个独立方程有: ① 3 个平衡方程; ② 3 个协调方程; ③ 6 个本构方程; 共有 12 个未知变量, 这些未知变量中, 有 7 个应力(σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} 、 σ_n 、 σ_t 、 σ_{sx} 、 σ_{sy}), 5 个应

变(ε_x 、 ε_y 、 ε_n 、 ε_t 、 γ_{xy})，以及角度 α 。再根据由外荷载得出的三个补充方程(6)、(8)、(10)与(σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy})三个变量的相关性，剪力大小可由下式表达：

$$Q = \begin{cases} \left\{ \psi f_{cp} \left[\alpha_1 \xi + (3 - 2\alpha_1) \xi^2 + (\alpha_1 - 2) \xi^3 \right] - f_{tp} (\alpha_0 + \alpha_1 \xi + \alpha_6 \xi^6) \right\} \sin \alpha \cos \alpha b h_0 & \varepsilon \leq \psi \varepsilon_0 \\ \left(\psi f_{cp} \frac{\xi}{\alpha_2 (\xi - 1)^2 + \xi} - f_{tp} \frac{\xi}{\alpha_t (\xi - 1)^\beta + \xi} \right) \sin \alpha \cos \alpha b h_0 & \varepsilon > \psi \varepsilon_0 \end{cases} \quad (11)$$

要计算出构件的受剪承载力，式(11)必须确定未知量主拉应变 ε_t 、“水泥基材斜压杆”角度 α 。进行构件受剪的全过程分析时，将主拉应变 ε_t 和角度 α 代入平衡方程、材料的应力应变关系和变形协调方程，不断迭代计算出截面所能承受的最大剪力，采用计算软件编制基于软化桁架理论的人防框架梁斜截面受剪全过程分析的计算程序如下：

- ① 每次取主压应力 $\varepsilon_n := \varepsilon_n + \Delta \varepsilon_n$ ；
- ② 假定 ε_t 值；
- ③ 根据 $\psi = 0.9(1 + 400\varepsilon_t)^{-0.5}$ ，求软化系数 ψ ；
- ④ 由本构关系求出 σ_n 、 σ_t ；
- ⑤ 计算 α ；
- ⑥ 由 σ_n 、 σ_t 、 α 根据平衡方程解出 τ_{xy} ；
- ⑦ 将每次计算的內力求和判断是否满足平衡条件；
- ⑧ 如不满足，修改假定的 ε_t ，重复③到⑦；
- ⑨ 由 τ_{xy} ，根据截面宽度及高度解出 Q ；
- ⑩ 重复①到⑨。

计算程序流程图如图3。计算时，给定一个初值 ε_n （比如 $\varepsilon_n = 0.0005$ ），以迭代法求出相应的 ε_t ，并求得一个相应的截面剪力 Q 。以0.0005为增量，改变 ε_n ，又可算出另一个相应的剪力 Q 。直到水泥基材最后受压破坏，或者钢筋屈服。对每个 ε_n 可以求解剪力 Q 以及其它的未知变量，这样就可以模拟构件受力的全过程。在一系列剪力 Q 中，最大者即为极限受剪承载力。

依据上述程序框图，可利用MATLAB编程，通过计算机进行计算，分析水泥基材强度、钢筋强度、配筋率及截面关系变化对人防框架梁受剪承载力的影响。

试件计算表格(表1)共分为5组，A组：仅改变梁截面；B组：仅改变水泥基材强度；C组：仅改变钢筋强度；D组，仅改变纵筋配筋率，E组，仅改变箍筋配筋率，F组为剪跨比，由于剪跨比和加载方式、截面高度相关，对受剪承载力的影响和普通钢筋混凝土构件一致，此次计算不再单独列出。

从表1和图4可以看出：

- 1) 人防框架梁的受剪承载力随着梁截面的增大基本呈线性增长，但随着剪跨比增大，其提高作用相对减小。
- 2) 人防框架梁的受剪承载力随着水泥基材强度的提高而增大，与 f_c 或 f_t 近似呈线性关系。
- 3) 和水泥基材强度的提高类似，人防框架梁的受剪承载力同样随着钢筋强度的提高而增大，但超过700 MPa后增长减缓，此时钢筋强度的计算值过高，和水泥基材强度已不匹配，影响到整个截面受剪承载力。
- 4) 箍筋对人防框架梁的受剪承载力有明显的提高作用，且两者具有线性关系，但剪跨比不同，配箍率对抗剪承载力的提高作用也稍有不同。
- 5) 在此次计算中，人防框架梁的受剪承载力随着纵筋配筋率的增大呈现出线性增长的趋势。由于剪

切破坏的应力状态复杂，裂缝开展的多样性和不确定性，出于偏安全的考虑，现有设计方法一般不考虑纵筋对受剪承载力的影响，对于人防框架梁，纵向钢筋在构件受剪设计中的作用值得进一步研究。

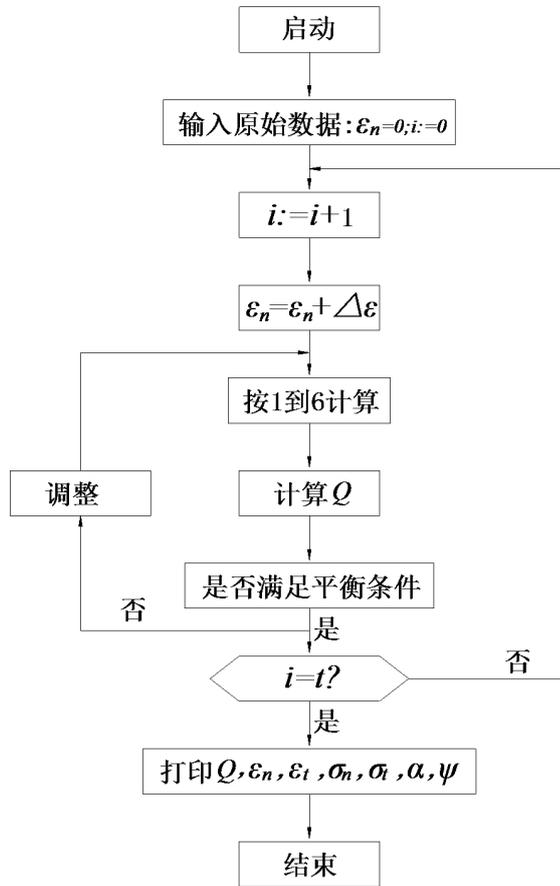


Figure 3. Program block diagram
图 3. 程序框图

Table 1. Shear bearing capacity with different sectional, FRCC strength, bar strength and reinforcement ratio
表 1. 人防框架梁受剪承载力与截面、水泥基材强度、钢筋强度及配筋率关系

A		B		C		D		E		F
$b \times h_0$ (mm × mm)	Q (kN)	f_c (N/mm ²)	Q (kN)	f_y (N/mm ²)	Q (kN)	$A_{sh}/(bh_0)$	Q (kN)	A_{sv}/s	Q (kN)	$M/(Qh_0)$
150 × 250	153	30	136	215	144	1.0%	137	1.0	302	-
150 × 300	229	40	142	300	171	1.2%	165	1.2	332	-
150 × 350	394	50	166	335	204	1.4%	194	1.4	362	-
150 × 400	478	60	187	400	242	1.6%	218	1.6	392	-
200 × 250	201	70	192	500	302	1.8%	241	1.8	422	-
200 × 300	321	80	210	600	357	2.0%	270	2.0	452	-
200 × 350	390	90	231	700	417	2.2%	299	2.2	482	-
200 × 400	472	100	252	800	417	2.4%	320	2.4	512	-

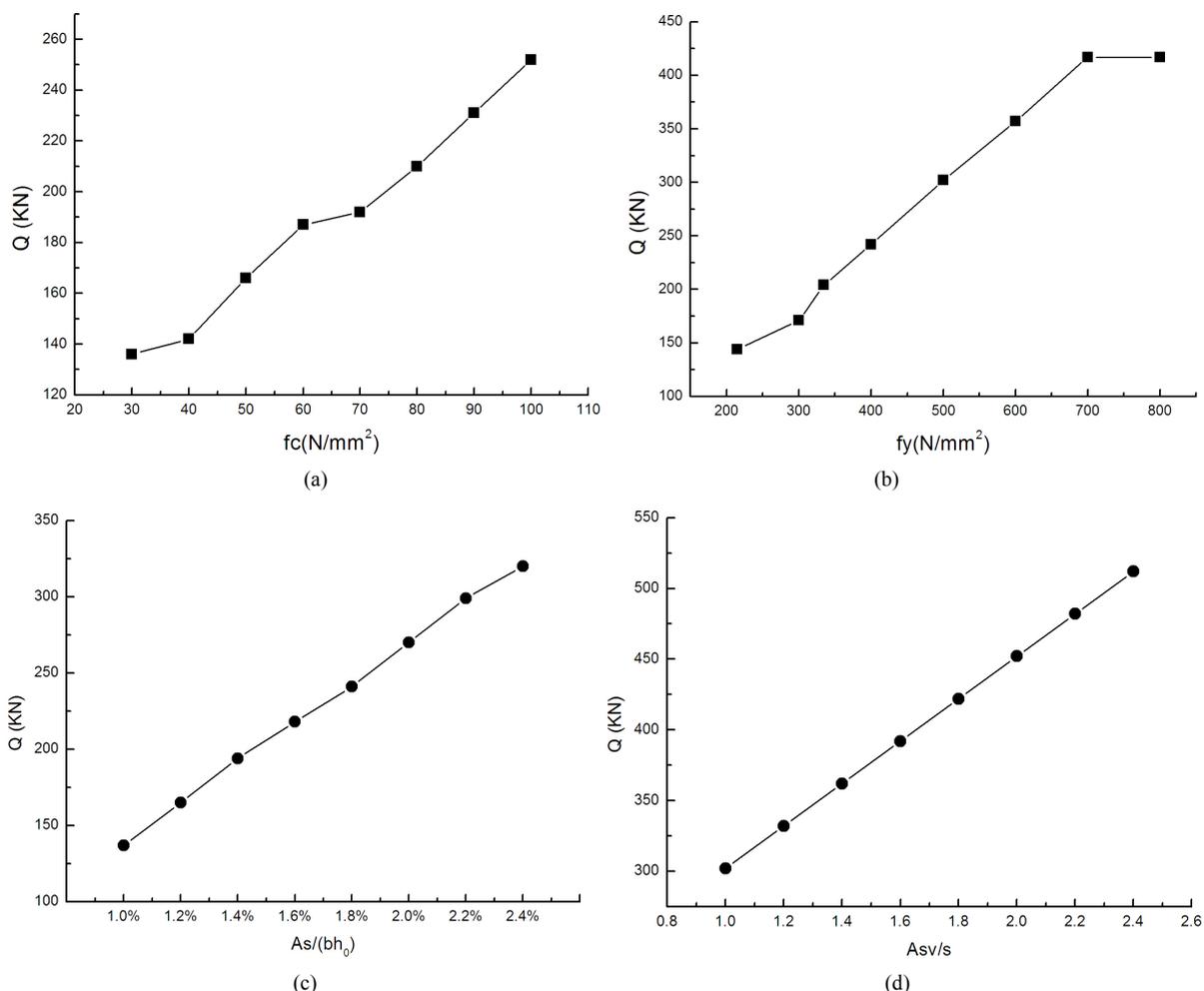


Figure 4. Variety of shear capacity with different parameters. (a) Shear capacity with the strength of FRCC; (b) Shear capacity with the strength of Bar; (c) Shear capacity with the ratio of longitudinal bar; (d) Shear capacity with stirrup ratio

图 4. 不同参数下受剪承载力变化。(a) 水泥基材强度与受剪承载力关系；(b) 钢筋强度与受剪力承载力关系；(c) 纵筋配筋率与受剪力承载力关系；(d) 配箍率与受剪力承载力关系

4. 结论

本文构造水泥基材材料软化特征下的本构模型，应用条带法对高强细晶粒钢筋和纤维增强水泥基复合材料梁截面受剪承载力进行了理论计算，可以发现：

截面大小、水泥基材强度、钢筋强度及配筋率对受剪承载力都有一定影响，其中，截面大小、水泥基材强度和受剪承载力相关性较为明确，近似呈线性增长，在设计中可以通过增大截面或提高水泥基材强度加强受剪承载力；钢筋强度超过 700 MPa 后受剪承载力增长减缓，因此，超高强度钢筋在受剪设计中有一定限值；箍筋配筋率和纵筋配筋率提高，受剪承载力均有提高，但后者对受剪承载力的具体影响，还需要试验进一步验证。

参考文献

- [1] Yao, S., Zhang, J.W. and Tu, Y.M. (2011) Discussion on HRBF500 Grain Reinforcement and C100 High-Performance Fiber Reinforced Cementitious Composites (HPFRCC) in the Civil Air Defense Work. *Journal of Advanced Materials Research*, **168-170**, 1658-1664. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMR.168-170.1658>

- [2] Thomas, T.C. (1988) Softened Truss Model Theory for Shear and Torsion. *ACI Structural Journal*, **85**, 624-635.
<https://doi.org/10.14359/2740>
- [3] 姚山. 高强细晶粒钢筋与纤维增强水泥基复合材料在新型大跨度防护结构中的应用研究[D]: [博士学位论文].
南京: 东南大学, 2013.