

层状岩质边坡弯曲倾倒破坏研究进展

沈均, 张涛

中铁二院工程集团有限责任公司, 四川 成都

收稿日期: 2022年12月30日; 录用日期: 2023年1月20日; 发布日期: 2023年1月31日

摘要

由于层状岩体特殊的地质力学结构特征, 在此类岩体中边坡可能发生多种类型的失稳破坏, 其中倾倒破坏是较常见的一种。根据发生机理的不同, 倾倒破坏可分为三种类型, 即弯曲倾倒、块体倾倒和块体-弯曲倾倒。弯曲倾倒主要发生在仅有一组陡倾节理的情况, 与块体倾倒不同, 弯曲倾倒的破坏机制为类似悬臂梁的弯曲破坏, 弯矩产生的拉应力超过岩石的抗拉强度是造成破坏的主要原因。本文就岩体边坡弯曲倾倒变形破坏机制与规律认识, 以及解析解、数值模拟和物理模拟研究进展进行了系统总结, 对有待深入思考的问题和可能的研究途径进行了探讨。

关键词

层状岩质边坡, 倾倒破坏, 弯曲倾倒, 稳定性分析

Developments in the Study on Flexural Toppling Failure of Foliated Rock Slopes

Jun Shen, Tao Zhang

China Railway Eryuan Engineering Group Co., Ltd., Chengdu Sichuan

Received: Dec. 30th, 2022; accepted: Jan. 20th, 2023; published: Jan. 31st, 2023

Abstract

Depending upon the geologic conditions and material properties of rock and discontinuities, various kinds of instabilities are likely to be encountered in slope excavation. One of these is the toppling failure which has become to be known recently. From the mechanism point of view, the main toppling failures are classified as flexural, blocky, and block-flexure. Flexural toppling typically occurs in rock masses composed of a set of parallel discontinuities and dipping steeply against the face slope. In such a case, failure occurs through bending of layers of rock in a similar manner to that of cantilever beams. Recent advances in the study of flexural toppling failure using analytical,

numerical and physical techniques have been demonstrated in this paper. Significant potential for furthering our understanding of both mechanisms/processes is also presented.

Keywords

Foliated Rock Slopes, Toppling Failure, Flexural Toppling, Stability Analysis

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

倾覆破坏是层状岩体边坡常见的一种破坏模式,在自然和工程边坡中均有发生。倾覆破坏发生时的最显著特征是岩块或岩柱在自重或其它外力作用下发生向斜坡下方的倾覆或弯曲失稳。一般认为,倾覆型破坏易于发生在具有遍布的不连续面或层理结构、岩层倾向为陡倾、走向与边坡大致平行的岩体[1],但也可发生于具有竖直或后倾裂隙的土体边坡[2][3]。倾覆型破坏的规模可大可小,运动速度既可能是缓慢、渐进式的,也可能是极快速的,通常情况下快速、大规模的倾覆破坏更可能造成灾害的发生。

倾覆型边坡在自然和工程边坡中均有发生,其中采矿工程特别是露天矿开采的矿坑边坡发生倾覆破坏见于文献最多,如我国的金川露天矿边坡滑动-倾覆复合变形破坏[4]、抚顺西大型露天煤矿矿坑边坡[5];国外如加拿大不列颠哥伦比亚的 Brenda 露天矿边坡[6]、落基山脉的露天煤矿矿坑边坡[7]以及南非最大的白金露天矿坑边坡[8]。这些大型矿坑边坡一旦发生失稳破坏,可能给采矿工程带来巨大的灾难性破坏,因此也得到了许多学者的重视和研究。

Goodman 和 Bray 是最早较系统地研究岩石边坡倾覆型破坏的学者,根据破坏机制的不同,Goodman 和 Bray [2]把主要的倾覆型破坏分为三类,即弯曲倾覆、块体倾覆与块体-弯曲倾覆。弯曲倾覆的破坏机制为:岩体仅具有一组优势不连续面(图 1(a)),且岩层的倾向为陡倾、走向与边坡走向近似平行,岩柱形成一系列相互作用的悬臂梁,当最大拉应力超过岩石的抗拉强度时即发生破坏。页岩、板岩在岩层倾向和走向满足条件时易发生弯曲倾覆型破坏。块体倾覆的破坏机制:当图 1(a)所示的岩层再增加一组近似正交的不连续面时(图 1(b)),岩柱被切割为岩块,失去抗拉能力,在重力或其它外力作用下很可能发生倾覆式破坏。因此,弯曲倾覆和块体倾覆的区别从地质学的角度看,就是岩

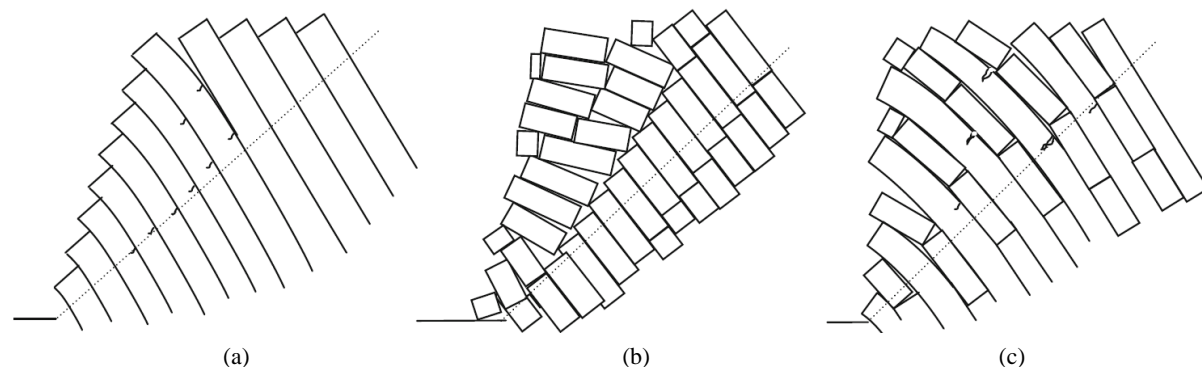


Figure 1. Toppling failure types of rock slope: (a) flexural toppling; (b) blocky toppling; (c) blocky-flexural toppling [2]

图 1. 岩质边坡倾覆破坏类型: (a) 弯曲倾覆; (b) 块体倾覆; (c) 弯曲-块体倾覆[2]

体中发育的不连续面不同; 从力学机制看, 则是岩柱体是否具有抗弯或抗拉能力。第三种倾倒破坏模式, 块体 - 弯曲倾倒则是上两种倾倒类型的组合, 其破坏机制既受岩石抗拉强度的控制, 也受到裂隙或不连续面的影响。

基于各自的破坏机制, 目前文献中针对弯曲倾倒和块体倾倒破坏都有多种分析方法, 这些研究提高了对岩质边坡倾倒破坏机理的认识并为倾倒型工程边坡稳定性分析提供了可行的途径。总体来说, 目前边坡倾倒机理及稳定性分析方法方面的研究可以概括为三类: 即理论分析、数值模拟和物理模拟。本文针对岩质边坡弯曲倾倒破坏问题, 论述以上三种分析方法在该问题上的研究进展。

2. 理论分析方法

2.1. Aydan-Kawamoto 极限平衡法

层状岩质边坡发生弯曲倾倒破坏的根本原因在于, 岩柱最大弯矩位置岩体收到的拉应力超过岩石材料的抗力强度, 导致岩柱发生断裂破坏。基于这一基本思想, Aydan and Kawamoto [9] [10] 岩柱简化为悬臂梁, 提出了一种层状岩质边坡弯曲倾倒极限平衡分析方法。该方法基于以下假设: 1) 每层岩柱可视为悬臂梁, 悬臂梁受重力及条间力作用如图 2、图 3 所示; 2) 在临界破坏状态, 所有的条块沿边坡潜在破坏面处于极限平衡状态; 3) 在极限状态时, 每个条块沿潜在在破裂面处的拉应力($\sigma_{x|y=b/2}$)等于材料的抗力强度, σ_t ; 4) 边坡潜在破坏面与岩层层面垂直。基于以上假定, 悬臂梁某截面上的轴向应力分布可由式(1)得出:

$$\sigma_x = -\frac{N}{A} + \frac{M}{I} y \quad (1)$$

其中, N 为轴向力, M 为弯矩, A 为截面面积, I 为截面惯性矩。 τ_j 、 τ_{j-1} 表示条间剪力, 在极限平衡状态下有:

$$T_j = \mu P_j, T_{j-1} = \mu P_{j-1} \quad (2)$$

其中, $\mu = \tan \phi_j$, ϕ_j 为节理摩擦角。根据式(1)、式(2)以及图 3 上的各力之间的关系, 整理可得:

$$P_{j-1} = \frac{\max(P_j, 0) \left(\chi h_j - \frac{1}{2} \mu b_j \right) + \frac{1}{2} S_j \bar{h}_j - \frac{2I_j}{b_j} \left(\frac{\sigma_{tj}}{FS} + \frac{N_j}{b_j} \right)}{\chi h_{j-1} + \frac{1}{2} \mu b_j} \quad (3)$$

其中, $I_j = b^3/12$, $W_j = \gamma b_j h_j$, $N_j = W_j \sin \alpha$, $S_j = W_j \cos \alpha$, $h_j = 0.5(h_j + h_{j-1})$; FS 为安全系数, α 为岩柱倾角, b_j 为岩柱厚度, γ 为岩石材料的重度。参数 $\chi \in (0,1)$ 表示条间法向力作用点的位置。用式(3)对边坡进行稳定分析时, 可采用逐条分步的计算方法, 首先计算最上一个条块, 然后把每步计算出的 P_{j-1} 的结果作为已知条件代入下一步计算, 最后得出坡脚条块上的剩余推力 P_0 , 然后根据 P_0 的值对边坡的稳定性进行判断:

$P_0 > 0$ —— 边坡不稳定。

$P_0 = 0$ —— 边坡处于极限平衡状态。

$P_0 < 0$ —— 边坡稳定。

通过调整 FS 的大小, 使其满足 $P_0 = 0$, 边坡处于极限平衡状态, 则可求得边坡的安全系数。

Aydan and Kawamoto [9] 通过试验发现边坡发生弯曲倾倒破坏的破坏面与岩层面垂直, 在公式(3)的推导过程中也应用了这一条件, 因此在图 3(a)中 θ 应为 0。Adhikary 等[11] [12] [13] 的离心试验发现破坏面与岩层垂直面之间有一定的夹角, θ 约为 10° 。

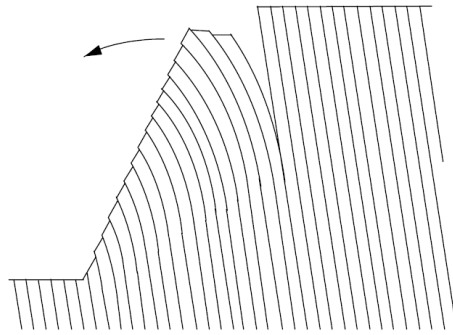


Figure 2. A schematic of the flexural toppling failure of foliated rock slopes

图 2. 层状岩质边坡弯曲倾倒破坏图示

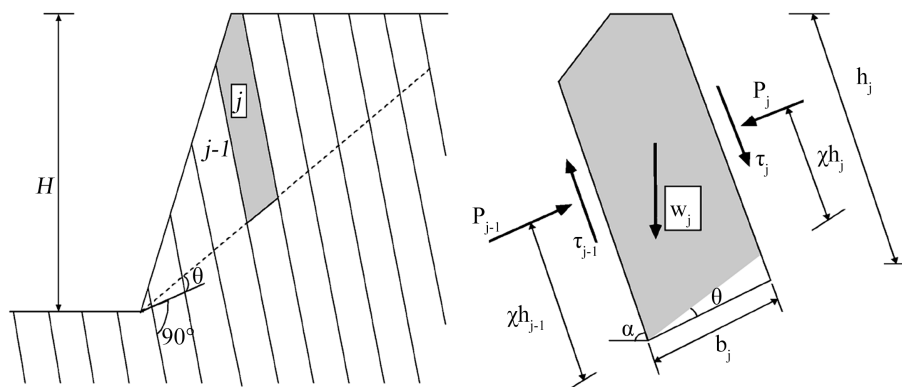


Figure 3. Schematic of the flexural toppling of foliated rock slopes: (a) slope geometry; (b) forces acting on a single column [13]

图 3. 层状岩质边坡弯曲倾倒图示: (a) 边坡几何尺寸; (b) 任意条块上的作用力[13]

2.2. Majdi-Amini 力学分析方法

2008 年 Majdi 与 Amini [14]提出了一种弯曲倾倒稳定性的理论分析方法。与 Aydan-Kawamoto 极限平衡法类似, 也把岩柱视为悬臂梁, 但是认为这些悬臂梁之间存在相互作用, 其稳定不但要满足平衡方程, 而且要满足变形协调的相容方程, 如图 4 所示。通过对平衡方程和相容方程进行联立求解, 他们给出了弯曲倾倒破坏的分析方法。之后, Amini 等[15]、Majdi 与 Amini [16]又对这一方法进行了完善, 给出了安全系数的计算公式:

$$F_s = \frac{t\sigma_t}{3\Psi^2\gamma\cos\delta} \quad (4)$$

其中, t 为岩层厚度, σ_t 为岩石单轴抗力强度, δ 为岩层面倾角, γ 为岩石材料的重度, F_s 为安全系数。 ψ 为岩柱的等效计算长度, 根据岩层及节理几何形状由下面的公式确定:

$$\Psi^2 = CH^2$$

$$C = \left[\frac{\zeta - (\zeta^2 - 4\eta\xi)^{0.5}}{2\eta} \right]^2$$

$$\eta = \frac{\tan(\delta - \varphi)\cos^2\varphi}{\tan(\delta - \varphi) + \tan(\theta - \delta + \varphi)}$$

$$\zeta = \frac{2 \cos(\theta - \delta + \varphi) \cos \varphi}{\sin(\theta)}$$

$$\xi = \left[\frac{\cos(\theta - \delta + \varphi)}{\sin(\theta)} \right]^2 \quad (5)$$

其中, C 为无量纲参数, H 为边坡坡高, θ 为边坡坡角, φ 为边坡破坏面与岩层面法向量之间的夹角。

需要指出的是, 以上的分析方法没有不考虑岩层内部节理、裂隙的影响, 即假定岩柱是均质、各向同性的连续体。Majdi 与 Amini [16]指出, 由于忽略了岩层内部软弱结构面的影响, 这一方法会高估边坡的安全性, 因此他们引入了反映软弱结构面影响的参数, 节理连通性参数(joint persistence), 对公式(4)进行了改进:

$$F_s = \frac{t(1-k)\sigma_t}{3\Psi^2\gamma \cos \delta \cos \varphi} \quad (6)$$

其中, $k = a/(a + b)$, a 和 b 分别为裂缝平均长度和岩桥平均长度的一半。此方法可以更好地对边坡稳定性进行评价, 但是在实际应用中, 准确获取参数 a 、 b 的值有很大难度, 目前一般可采用工程地质调查或结构面测绘进行估算。

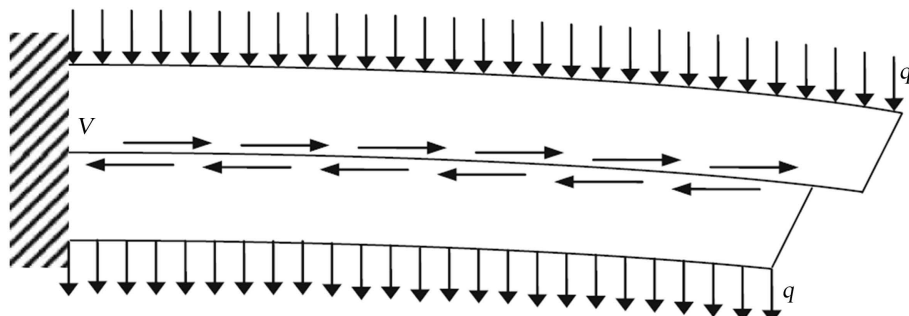


Figure 4. Schematic diagram of deflection of two superimposed cantilever beams with different lengths under constant distributed loads [15]

图 4. 两个不同长度叠加悬臂梁在均布荷载作用下的挠度[15]

2.3. 其它分析方法

伍法权[17]针对云母石英片岩斜坡弯曲倾倒变形问题, 认为当斜坡开挖、降雨入渗等外力因素扰动时, 边坡会发生瞬时弯曲倾倒变形, 瞬时强度变形结束后, 由于片理面上仍存在剪应力, 会继续发生蠕变弯曲倾倒变形。基于库仑强度理论, 作者对这两种情况分别进行分析, 给出了瞬时变形结束时片理面法线夹角的理论公式, 以及该夹角在随后的蠕变变形过程中的时间关系公式。

3. 数值模拟方法

3.1. 离散元法

如图 1 所示, 边坡倾倒破坏发生的地质环境是层状、块状岩体, 这些岩层、岩块被层理、节理等不连续面切割为离散的岩石单元。Pritchard 与 Savigny [1]于 1990 年采用离散元法对倾倒现象进行研究, 认为离散元程序 UDEC [18]非常适于模拟倾倒破坏发生的自然过程。图 5 为文献[1]给出的某露天矿坑边坡弯曲倾倒破坏的分析结果, 从图 5 可以看出, UDEC 可以很好地描述边坡发生倾倒破坏时的主要特征。

图 5(a)中断层两侧相邻节点上的速度方向差异表现出在断层面上具有剪切作用; 图 5(b)显示的边坡破坏

面为曲面, 这与理论分析时假设的直线型破坏面有一定的区别; 另外, 考虑孔隙水压力作用时发现, 孔压对边坡弯曲倾倒稳定性有明显影响, 但不影响破坏面形态。

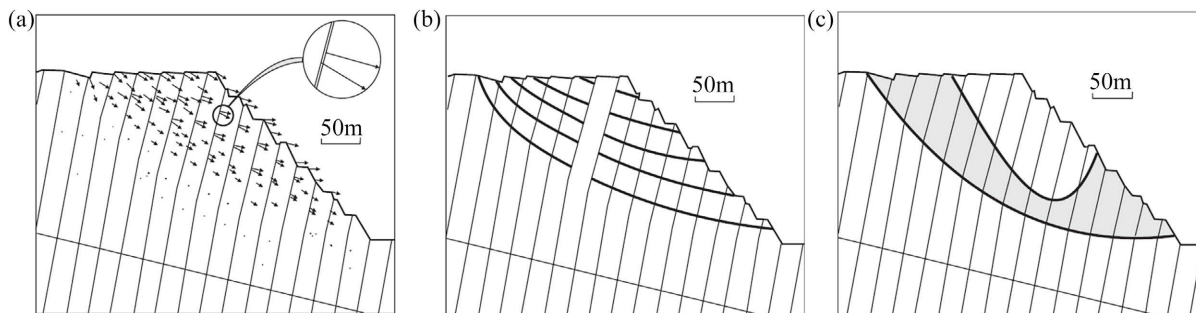


Figure 5. UDEC model of flexural toppling pit slope: (a) pure flexural toppling deformation with grid point velocity vectors; (b) contours of horizontal displacement for toppling slopes; (c) area of failed nodes due to flexure [1]

图 5. 露天矿坑边坡弯曲倾倒破坏 UDEC 数值模型: (a) 岩块弯曲变形及节点速度矢量图; (b) 水平位移云图; (c) 节点破坏区[1]

Nichol 等[19]采用 UDEC 程序研究大型岩质斜坡的倾倒破坏, 通过改变岩石单轴抗压强度(UCS)、节理倾角、密度以及坡脚切割情况等参数, 探讨影响其破坏模式的关键参数。图 6 给出了不同岩石强度时边坡的最终弯曲倾倒变形。经过一系列参数研究, 他们认为弯曲倾倒是一个柔性、自稳定的过程, 发生在只有一组优势不连续面的软弱岩体; 块体倾倒发生于赋存两组节理面的硬质岩体, 是脆性过程, 易于发生大型灾难性的高速破坏。

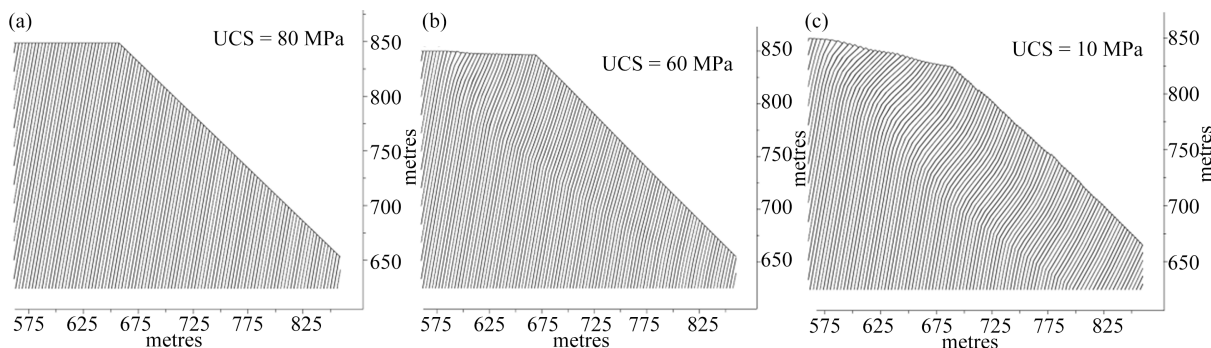


Figure 6. Final flexural toppling deformation of slope under different rock mass strength: (a) strong rock, UCS = 80 MPa; (b) UCS = 60 MPa; and (c) weak rock, UCS = 10 MPa [19]

图 6. 不同岩石强度条件下边坡的最终弯曲倾倒变形: (a) 硬岩 UCS = 80 MPa; (b) 次硬岩 UCS = 60 MPa; (c) 软岩 UCS = 10 MPa [19]

虽然 UDEC 可以很好地描述岩层 - 节理 - 岩层之间的相互作用, 但 Alzo'ubi 等[20]也指出, UDEC 不能直接地描述岩层内部的间断裂隙或离散的不连续面, 因此他们采用 UDEC 中的 Voronoi joint, 即沃罗诺伊节理, 来模拟原岩中存在的离散节理。Voronoi 节理可以在岩层内生成随机的多边形块, 可以用于模拟岩体中的缺陷或细小破裂, 这样在外力作用下, 岩体不但可以发生沿节理面的破坏, 同时由于这些内部裂隙的存在, 切层破坏也可能发生。他们把这种改进的模型称为 UDEC-DM, 即 UDEC damage model 或 UDEC 损伤模型。通过对离心机模型试验的模拟, 他们认为传统的 UDEC 模拟没有考虑岩层内部的损伤, 会高估边坡破坏极限荷载, 破坏面位置也与试验差距较大, 而 UDEC 损伤模型可以更好地模拟弯曲倾倒时边坡破坏面的位置、破坏模式以及极限荷载。图 7 给出了 UDEC-DM 数值模拟得到的边坡破裂面和试验结果的对比。

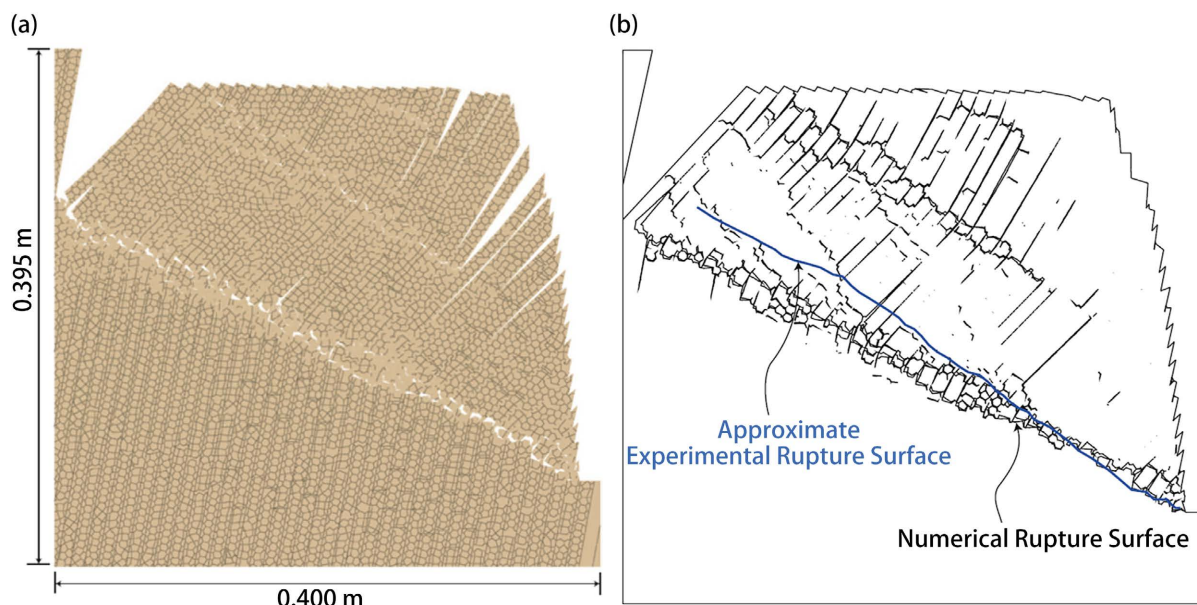


Figure 7. Comparison of the rupture surface as predicted by the UDEC-DM model and the experimental rupture surface at ensile strength of 1.1 MPa: (a) toppling observed in the model; (b) rupture surface [20]

图 7. 在强度为 1.1 MPa 时, UDEC-DM 数值模拟得到的边坡破裂面和试验结果的对比: (a) 倾倒破坏; (b) 破裂面对比[20]

Scholtès-Donzé 采用开源三维离散元程序 YADE, 模拟破碎岩体边坡的渐进破坏。与 UDEC 不同, YADE 的模型由离散的球体单元组成, 破坏即可以沿节理面发生也可能在原岩中发生。图 8 为层状岩质边坡破坏时的速度场, 层面倾角分别为 40° (左)和 80° (右), 从图中可以看出前者的破坏面接近于圆弧形而后者为倾倒型破坏[21]。

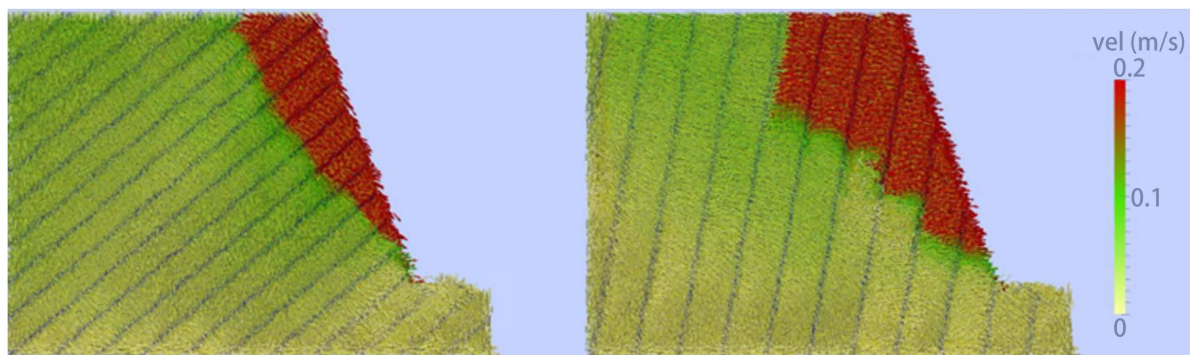


Figure 8. Velocity field of failure of foliated rock slope with foliation dipping respectively at (left) 40° and (right) 80° [21]

图 8. 层状岩质边坡破坏时的速度场, 层面倾角分别为 40° (左)和 80° (右) [21]

3.2. 有限元法

早在一九七零年代, Burman 等[22]、Kalkani [23]以及 Hittinger [24]开发的有限元程序中都提供了对节理单元的支持, 可以用于倾倒分析。有限元法克服了许多极限平衡法中的许多局限, 岩层与节理都可以得到比较真实的模拟, 孔隙水压、几何条件、地质因素以及外部荷载均可以得到有效考虑。但有限元法在分析倾倒问题时, 其连续方程遇到很大挑战, 当节点发生大的位移变形时, 总刚度矩阵必须进行调整, 因此在进行大变形分析时计算效率会大大降低, 甚至无法求解。Adhikary 等[11] [25] [26]基于 Cosserat 连续模型, 把分层材料采用等效连续体进行处理, 采用有限元法进行计算。采用 Cosserat 模型的有限元

法与直接采用有限元模拟节理具有一定的优势, 如网格划分可以不必十分精细。近些年来, 随着离散元的发展, 及离散元法在模拟大变形、大位移问题时的优势, 有限元法在倾倒分析中的应用很少。

4. 物理模拟方法

物理模拟方法是最早被用于研究倾倒破坏机理的方法, 主要采用的物理模型试验大致可分为三种类型: 倾斜台试验[27] [28]、基底摩擦试验[10] [29] [30]和离心模型试验[11] [13] [31] [32]。这些模型试验大多针对块体倾倒型破坏, 仅有 Adhikary 等[11] [13]的离心模型试验则对弯曲倾倒破坏机理进行了深入研究。

采用离心模型试验, 使试验模型在几何尺寸被缩小 n 倍时, 通过对试验模型施加 ng 大小的加速度, 可以使其应力状态达到原型尺寸时一倍重力加速度作用下的状态。离心模型试验对许多受体积力(如重力)控制的力学行为或破坏机制问题非常适用。Adhikary 等[11] [13]的离心模型试验采用了几种类型的试验材料, 并采用三种不同的模型制作方法: 1) 用石英砂和 2% 硅酸盐水泥浇筑成块体, 然后切割成板, 再堆垛在一起形成边坡模型; 2) 用纤维水泥板切割成需要的形状尺寸, 然后堆垛建立模型; 3) 用钛铁矿砂和 15% 的石膏分层浇筑成需要的块体, 然后再切割为边坡模型。根据文献[13], 采用第三种方法制作出的模型节理均匀、力学效果最为理想。通过对模型施加逐渐增大的重力荷载来模拟边坡高度的增加, 并对关键点的位移进行监测。模型高度为 0.33 m 时, 边坡在 80 至 85 倍重力加速度时发生破坏。图 9 为采用第二种模型制作方法得到的边坡发生弯曲倾倒破坏时的形态, 根据塑性变形发展的程度, 边坡被分为三个区域, 仅在(i)区有肉眼可见的边坡破坏面产生。

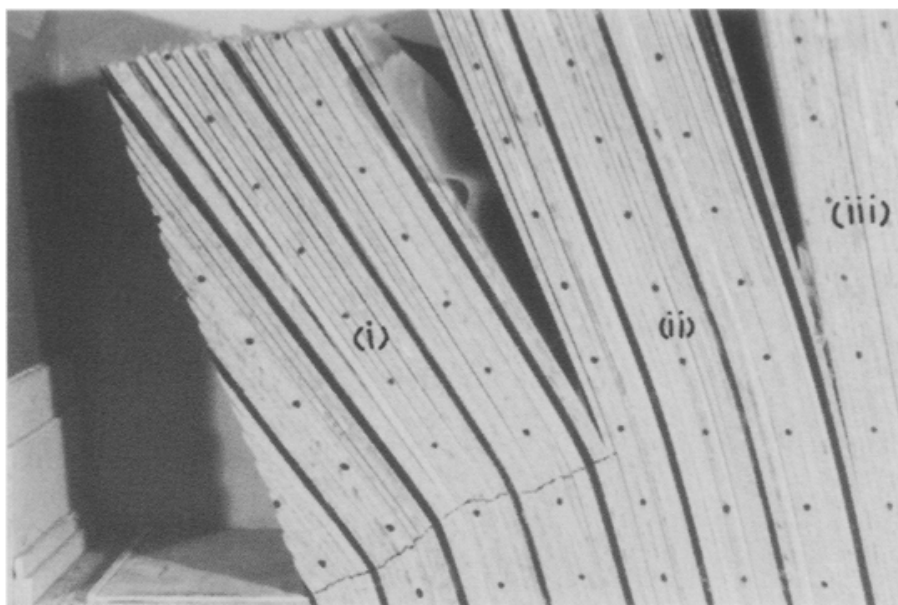


Figure 9. Shape of the flexural toppling failure of slope: (i) zone of fully developed plastic deformation with visible fractures, (ii) zone of partially developed plastic deformation, (iii) zone of elastic deformation [11]

图 9. 边坡弯曲倾倒破坏形态: (i) 塑性变形充分发展区, 破坏面可见; (ii) 塑性变形部分发展; (iii) 弹性变形区[11]

5. 结论与展望

综合本文前面内容可见, 对岩质边坡弯曲倾倒破坏的研究已经有近半个世纪, 通过物理试验和数值模拟方法的研究, 对发生弯曲倾倒破坏的力学机制已经比较清楚, 提出的理论分析方法可以用于指导工

程实践。但是, 目前关于岩质边坡弯曲倾倒变形的研究仍存在诸多问题, 需要在进一步的研究中逐渐克服。

1) 对于发生弯曲倾倒破坏时, 边坡的整体破坏面位置、方向(即与岩层层面之间的关系)以及破坏面的形状(直线或曲线), 不同的研究得出了不同的结果。在理论分析中, 通常对破坏面的位置、形状进行一种简单假定, 然后据此进行力学分析, 必然存在一定的误差。

2) 现有的分析方法, 无论是理论分析方法、数值模拟或物理试验, 一般都仅考虑节理为不连续面, 忽略岩层内部的微小裂隙的影响。事实上岩层原岩内部也存在许多小裂隙, 这些小的不连续面对岩石的抗拉强度有很大影响, 如何在理论和数值分析中正确反映这些因素仍然比较困难。

3) 与其它研究方法相比, 离散元数值模拟技术在倾倒分析时表现出了很大优势, 在以后的研究中, 如何在 UDEC、3DEC、PFC 等离散元程序中考虑节理、裂隙等地质力学因素, 是进一步提升倾倒研究的一个思路。

参考文献

- [1] Pritchard, M.A. and Savigny, K.W. (1990) Numerical Modelling of Toppling. *Canadian Geotechnical Journal*, **27**, 823-834. <https://doi.org/10.1139/t90-095>
- [2] Goodman, R.E. and Bray, J.W. (1976) Toppling of Rock Slopes. *Proceedings of the ASCE Specialty Conference on Rock Engineering for Foundations and Slopes*, Boulder, 15-18 August 1976, 201-234.
- [3] 叶万军, 董西好, 杨更社, 李晓. 倾倒型黄土崩塌稳定性判据及其影响范围研究[J]. 岩土力学, 2013, 34(z2): 242-246, 251.
- [4] 王思敬. 金川露天矿边坡变形机制及过程[J]. 岩土工程学报, 1982, 4(1): 76-83.
- [5] 张布荣. 倾倒型岩石边坡工程加固的研究[J]. 土木工程学报, 1995, 28(5): 70-75.
- [6] Pritchard, M.A. and Savigny, K.W. (1991) The Heather Hill Landslide: An Example of a Large Scale Toppling Failure in a Natural Slope. *Canadian Geotechnical Journal*, **28**, 410-422. <https://doi.org/10.1139/t91-051>
- [7] Wyllie, D.C. (1980) Toppling Rock Slope Failures Examples of Analysis and Stabilization. *Rock Mechanics*, **13**, 89-98. <https://doi.org/10.1007/BF01238952>
- [8] Byea, A.R. and Bell, F.G. (2001) Stability Assessment and Slope Design at Sandsloot Open Pit, South Africa. *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences*, **38**, 449-466. [https://doi.org/10.1016/S1365-1609\(01\)00014-4](https://doi.org/10.1016/S1365-1609(01)00014-4)
- [9] Aydan, Ö. and Kawamoto, T. (1987) Toppling Failure of Discontinuous Rock Slopes and Their Stabilization. *Journal of the Mining and Metallurgical Institute of Japan*, **103**, 763-770.
- [10] Aydan, Ö. and Kawamoto, T. (1992) The Stability of Slopes and Underground Openings against Flexural Toppling and Their Stabilization. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, **25**, 143-165. <https://doi.org/10.1007/BF01019709>
- [11] Adhikary, D.P., Dyskin, A.V., Jewell, R.J. and Stewart, D.P. (1997) A Study of the Mechanism of Flexural Toppling Failure of Rock Slopes. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, **30**, 75-93. <https://doi.org/10.1007/BF01020126>
- [12] Adhikary, D.P., Dyskin, A.V. and Jewell, R.J. (1995) Modeling of Flexural Toppling Failures of Rock Slopes. *Proceedings of the 8th International Congress Rock Mechanics*, Tokyo, 25-30 September 1995, 25-29.
- [13] Adhikary, D.P. and Dyskin, A.V. (2007) Modeling of Progressive and Instantaneous Failure of Foliated Rock Slopes. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, **40**, 349-362. <https://doi.org/10.1007/s00603-006-0085-8>
- [14] Majdi, A. and Amini, M. (2008) A New Analytical Method for Analysis of Flexural Toppling Failure in Rock Slopes. *Proceedings of the 42nd U.S. Rock Mechanics Symposium*, San Francisco, San Francisco, 29 June-2 July 2008, 10 p.
- [15] Amini, M., Majdi, A. and Aydan, Ö. (2009) Stability Analysis and the Stabilization of Flexural Toppling Failure. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, **42**, 751-782. <https://doi.org/10.1007/s00603-008-0020-2>
- [16] Majdi, A. and Amini, M. (2011) Analysis of Geo-Structural Defects in Flexural Toppling Failure. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, **48**, 175-186. <https://doi.org/10.1016/j.ijrmmms.2010.11.007>
- [17] 伍法权. 云母石英片岩斜坡弯曲倾倒变形的理论分析[J]. 工程地质学报, 1997, 5(4): 306-311.
- [18] Itasca Consulting Group, Inc. (2004) UDEC—Universal Distinct Element Code, Version 4.0. Itasca Consulting Group, Inc., Minneapolis.
- [19] Nichol, S.L., Hungr, O. and Evans, S.G. (2002) Large-Scale Brittle and Ductile Toppling of Rock Slopes. *Canadian*

-
- Geotechnical Journal*, **39**, 773-788. <https://doi.org/10.1139/t02-027>
- [20] Alzo'ubi, A.K., Martin, C.D. and Cruden, D.M. (2010) Influence of Tensile Strength on Toppling Failure in Centrifuge Tests. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, **47**, 974-982. <https://doi.org/10.1016/j.ijrmms.2010.05.011>
- [21] Scholtès, L. and Donzé, F.V. (2012) Modelling Progressive Failure in Fractured Rock Masses Using a 3D Discrete Element Method. *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences*, **52**, 18-30. <https://doi.org/10.1016/j.ijrmms.2012.02.009>
- [22] Burman, B.C., Trollope, D.H. and Philip, M.G. (1975) The Behaviour of Excavated Slopes in Jointed Rock. *Australian Geomechanics Journal*, 26-31.
- [23] Kalkani, E.C. (1977) Two Dimensional Finite Element Analysis for the Design of Rock Slopes. *16th U.S. Symposium on Rock Mechanics*, Minneapolis, 22-24 September 1975, 15-24.
- [24] Hittinger, M. (1978) Numerical Analysis of Toppling Failures in Jointed Rock. Ph.D. Thesis, University of California, Berkeley.
- [25] Adhikary, D.P., Dyskin, A.V. and Jewell, R.J. (1996) Numerical Modelling of the Flexural Deformation of Foliated Rock Slopes. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts*, **33**, 595-600. [https://doi.org/10.1016/0148-9062\(96\)00008-3](https://doi.org/10.1016/0148-9062(96)00008-3)
- [26] Adhikary, D.P. and Dyskin, A.V. (1997) A Cosserat Continuum Model for Layered Materials. *Computers and Geotechnics*, **20**, 15-46. [https://doi.org/10.1016/S0266-352X\(96\)00011-0](https://doi.org/10.1016/S0266-352X(96)00011-0)
- [27] Ashiby, J. (1971) Sliding and Toppling Modes of Failure in Model and Jointed Rock Slopes. MSc. Thesis, Imperial College, Royal School of Mines, London.
- [28] Lanaro, F., Jing, L., Stephansson, O. and Barla, G. (1997) D.E.M. Modelling of Laboratory Tests of Block Toppling. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, **34**, 506-507. [https://doi.org/10.1016/S1365-1609\(97\)00116-0](https://doi.org/10.1016/S1365-1609(97)00116-0)
- [29] Goodman, R.E. (1976) *Methods of Geological Engineering in Discontinuous Rocks*. West Publishing Co., St Paul, 472 p.
- [30] Bray, J.W. and Goodman, R.E. (1981) The Theory of Base Friction Models. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts*, **18**, 453-468. [https://doi.org/10.1016/0148-9062\(81\)90510-6](https://doi.org/10.1016/0148-9062(81)90510-6)
- [31] 汪小刚, 张建红, 赵毓芝, 韩连兵. 用离心模型研究岩石边坡的倾倒破坏[J]. *岩土工程学报*, 1996, 18(5): 14-21.
- [32] Zhang, J.H., Chen, Z.Y. and Wang, X.G. (2007) Centrifuge Modeling of Rock Slopes Susceptible to Block Toppling. *Rock Mechanics and Rock Engineering*, **40**, 363-382. <https://doi.org/10.1007/s00603-006-0112-9>