

The Performance Analysis of Joint Decoder in Single-Input Single-Output Wireless Communication System

Xie Chen, Haiquan Wang, Ruiming Chen

School of Communication Engineering, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou
Email: chenxie.ok@163.com

Received: May 9th, 2013; revised: May 12th, 2013; accepted: May 19th, 2013

Copyright © 2013 Xie Chen et al. This is an open access article distributed under the Creative Commons Attribution License, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

Abstract: For a single-input, single-output wireless communication system, the joint decoder is derived, and its performance analysis is shown in this paper. In fact, an analytic formula of calculating pair-wise error probability (PEP) is given. Analysis based on this formula shows that the joint decoder without channel estimation outperforms decoders based on channel estimation. Moreover, it also shows that, for a fast fading channel, performance of decoder based on training is worse than the performance of decoder without training. Simulations confirm our analysis above.

Keywords: Single Input Single Output; Training Sequence; Flat Fading Channel; Joint Decoder

单发单收系统下联合解码方法的性能分析

陈 颢, 王海泉, 陈瑞明

杭州电子科技大学通信工程学院, 杭州
Email: chenxie.ok@163.com

收稿日期: 2013年5月9日; 修回日期: 2013年5月12日; 录用日期: 2013年5月19日

摘 要: 对于一个单发单收的无线通信系统, 本文推导了联合解码法, 并对其性能做出了理论的分析, 得到了其对错误概率的解析公式。基于此公式的分析表明, 不用信道估计的联合解码法的性能要优于基于信道估计方法的系统性能。并且在某些特定的条件下, 不发送训练序列的系统性能要优于基于训练序列的系统性能。所有的仿真证实了上述结论。

关键词: 单输入单输出; 训练序列; 平坦衰落信道; 联合解码

1. 引言

单发单收无线通信系统, 即发送方与接收方都仅装备有一根天线的无线传输系统, 是无线通信里最基本的系统, 它已广泛地应用于实践。对这样的系统的研究, 无论从理论的角度, 还是从应用的角度, 都已经取得了巨大的进展^[1,2]。这些研究可大致分为两大类, 其一是假设接收方知道信道的瞬时信息; 其二是假设接收方不知道信道信息。本文关心第二种。

在接收方不知道信道信息的条件下, 通常的做法

是有以下两步。第一步, 发送方发送训练序列。当训练序列到达接收方时, 由于信道与接收机的噪声影响, 接收方只能从它接收到的信号中估计出信道; 第二步, 发送方发送数据给接收方。当信号到达接收方后, 接收方把先前估计的信道当作真实信道, 从信道中解出所需要的数据。基于这种传输方式的研究大部分都集中在如何估计信道, 即提出了各种各样的信道估计方法及其相应的方法的性能分析。其中一些经典的方法, 如 ML - 信道估计法、MMSE - 信道估计法等。

近年来,又有一些新的估计方法,例如,在 PSAM (pilot-symbol assisted modulation)下的 QAM 信号的符号错误概率上限已经在[3]中给出了。文献[4]提出了一种基于自适应均衡器的低复杂度的信道估计方法。文献[5]提出了一种迭代 CR (correlation reshape)算法来消除 ISI (Inter-Symbol Interference)。文献[6]利用构建特殊相关窗的方法提出了低复杂度的信道估计方法。文献[7,8]都是利用迭代的方法,由 PN 序列和数据符号得出信道估计。文献[9]则给出了一种基于 SISO/MISO DTMB 系统简单、通用的低复杂度 TDS-OFDM 时域信道估计方法。文献[10]中,作者针对最小平方估计精度有限的问题,提出一种自适应信道估计的方案。文献[11]中,作者提出了一种基于最优观测矩阵的自适应贝叶斯压缩感知技术的信道估计方法。在文献[12]中,作者提出了基于信道特征的信道估计方法,而在文献[13]中,信道估计被分为了两个步骤,以适应于新的信道环境。对于新条件下的信道,如压缩感知的超宽带信道^[14-16],或与无线中继网络结合^[17]等,提出了新的信道估计方法。

显然,利用信道估计方法的系统其性能依赖于具体的信道估计方法。本文采用另外的方法,即联合解码法。具体地说就是不利用信道估计而把所接收到的带有训练序列的信号与带有数据的信号联合在一起,利用 Maximum-Likelihood (ML)解码法解出发送的数据。采用这种方法的系统性能不依赖于信道估计方法。另一方面,由于 ML - 解码法是最优的解码法,因而,由此方法得到的性能应该是最优的性能。

本文的主要创新点与贡献在于,对于一个单发单收系统,推导出联合解码法,并对其性能做出分析,即求出其成对错误概率(PEP)公式。在此基础上,分析系统的各种参数的作用。令人惊讶的是,以上的分析表明,在某些特殊的情况下,利用训练序列方法的系统性能还没有不用训练序列的系统的性能好。

本文剩下的章节中,II 主要介绍了本文的系统模型。III 则具体分析了联合解码的方法,并对其性能进行了理论分析。IV 中给出了 matlab 仿真,并对结果做出了简要的分析。

2. 系统模型

我们采用单发单收的通信系统模型,即发送方和

接收方都只有一根天线,假定在时间 $T + \tau$ 内,信道可认为是不变的。但从一个 $T + \tau$ 到下一个 $T + \tau$ 时间,信道是变化的。本文假定 $T \geq 1$ 。系统基本模型如下:

$$Y = \sqrt{\rho}hX + W \quad (1)$$

其中 Y 为接收到的数据; ρ 为信噪比; h 为信道系数,假定 h 独立同分布且 $h \sim CN(0,1)$; X 为发送的数据; W 为加性高斯白噪声 $W \sim CN(0,1)$ 。

在发送数据前,我们将先发送训练序列

$\Phi_0 = [\varphi_1 \ \varphi_2 \ \dots \ \varphi_\tau]^T$, 其中“ T ”表示矩阵的转置:

$$Y_0 = \sqrt{\rho_0}h\Phi_0 + W_0 \quad (2)$$

其中 ρ_0 为训练序列的信噪比。这样 Y_0 与 W_0 为 τ 维的复向量。然后,我们在之后 T 时间内发送数据 X_d :

$$Y_d = \sqrt{\rho_1}hX_d + W_d \quad (3)$$

其中 $Y_d = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_T]^T$, $X_d = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_T]^T$ ρ_1 为接收数据的信噪比。

本文中能量限制为 $\sum_{i=1}^{\tau} |\varphi_i|^2 = \tau$, $\sum_{j=1}^T |x_j|^2 = T$ 。

联合式(1)、式(2)、式(3),写成矩阵形式有:

$$Y = QhX + W \quad (4)$$

其中 $Y = [Y_0^T \ Y_d^T]^T$,

$$Q = \text{diag} \left(\underbrace{\sqrt{\rho_0} \ \dots \ \sqrt{\rho_0}}_{\tau} \ \underbrace{\sqrt{\rho_1} \ \dots \ \sqrt{\rho_1}}_T \right),$$

$$X = [\Phi_0^T \ X_d^T]^T, \text{ 和 } W = [W_0^T \ W_d^T]^T.$$

我们的任务是从 Y 中解出 X_d 。通常有两种方法。第一种是利用 Y_0 估计出信道系数 h , 记为 \hat{h} , 然后把 \hat{h} 代入到(3)中解出 X_d 。第二种方法是不做估计,直接从(4)中解出 X_d 。后一种方法称为联合解码法。它的性能不依赖于信道的估计。下面我们给出具体的联合解码方法,并做出其性能分析。

3. 联合解码及性能分析

3.1. 联合解码法

对方程(4)应用 ML - 解码。在每个码字都均匀地输入信道的前提下,ML 解码法就是要极大 Y 的密度函数。而从方程(4)可知,在 X 给定的条件下, Y 应该是 Gaussian 分布,因而,ML-decoder 解码准则为

$$\max \frac{1}{\det(\Sigma)} e^{-Y^H \Sigma^{-1} Y},$$

其中 Σ 为接收信号的协方差矩阵, “ H ” 表示矩阵的共轭转置。由于 h 与 W 的相互独立性, 有

$$\begin{aligned} \Sigma &= E[YY^H] = E[(QhX+W)(X^H h^* Q^H + W^H)] \\ &= E(hh^* QXX^H Q^H) + I_{T+\tau} = QXX^H Q^H + I_{T+\tau} \quad (5) \\ &= \begin{bmatrix} \rho_0 \Phi_0 \Phi_0^H & \sqrt{\rho_0 \rho_1} \Phi_0 X_d^H \\ \sqrt{\rho_0 \rho_1} X_d \Phi_0^H & \rho_1 X_d X_d^H \end{bmatrix} + I_{T+\tau} \end{aligned}$$

这样易求得

$$\Sigma^{-1} = I_{T+\tau} - \frac{QXX^H Q}{\det(\Sigma)} \quad (6)$$

其中

$$\begin{aligned} \det(\Sigma) &= 1 + \rho_0 (|\varphi_1|^2 + |\varphi_2|^2 + \dots + |\varphi_r|^2) \\ &\quad + \rho_1 (|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_r|^2) \quad (7) \\ &= 1 + \tau \rho_0 + T \rho_1 \end{aligned}$$

由于 $\det(\Sigma)$ 与所发送的信号 X_d 无关, 从而

$$\arg \max \frac{1}{\det(\Sigma)} e^{-Y^H \Sigma^{-1} Y} = \min Y^H \Sigma^{-1} Y \quad (8)$$

又由于

$$\begin{aligned} \arg \min Y^H \Sigma^{-1} Y &= \arg \min Y^H \left(I_{T+\tau} - \frac{QXX^H Q}{\det(\Sigma)} \right) Y \\ &= \arg \min \left(Y^H Y - \frac{Y^H QXX^H QY}{\det(\Sigma)} \right) \quad (9) \\ &= \arg \max Y^H QXX^H QY \end{aligned}$$

又由于

$$Y^H QX = \sqrt{\rho_0} Y_0^H \Phi_0 + \sqrt{\rho_1} Y_d^H X_d \quad (10)$$

将(10)式代入(9)式, 最终得到 ML - 解码为

$$\arg \max \left| \sqrt{\rho_0} Y_0^H \Phi_0 + \sqrt{\rho_1} Y_d^H X_d \right|^2 \quad (11)$$

注意: 1) 当条件 $\sum_{i=1}^T |x_i|^2 = T$ 不被所有码字满足时, 则

ML - 解码应为

$$\arg \max \frac{1}{\det(\Sigma)} e^{-Y^H \Sigma^{-1} Y} \quad (12)$$

2) 在上述公式中, 尽管没有信道信息 h , 但它已经包括在接收到的信号 Y 中。因此, 信道的状态会影响解码的正确性。

3.2. 性能分析

我们对上述的 ML-解码做出成对错误概率分析, 记此概率为 P_e 。假设系统有两个码字 X_{d1} 和 X_{d2} 。当 X_{d1} 被传送时, 其协方差阵为 Σ_{X_1} , 其中 $X_1 = (\Phi_0^T \ X_{d1}^T)^T$, 误判概率为 $P\{X_{d1} \rightarrow X_{d2}\}$ 。同样, 当 X_{d2} 被传送时, 其协方差阵为 Σ_{X_2} , 其中 $X_2 = (\Phi_0^T \ X_{d2}^T)^T$, 误判概率为 $P\{X_{d2} \rightarrow X_{d1}\}$ 。显然

$$\begin{aligned} P_e &= P\{X_{d1} \rightarrow X_{d2}\} P\{X_{d1}\} \\ &\quad + P\{X_{d2} \rightarrow X_{d1}\} P\{X_{d2}\} \quad (13) \end{aligned}$$

其中 $P\{X_{d1}\}$ 与 $P\{X_{d2}\}$ 分别为 X_{d1} 与 X_{d2} 被使用的概率。根据假设, $P\{X_{d1}\} = P\{X_{d2}\} = \frac{1}{2}$ 。

因此

$$P_e = \frac{1}{2} P\{X_{d1} \rightarrow X_{d2}\} + \frac{1}{2} P\{X_{d2} \rightarrow X_{d1}\} \quad (14)$$

让我们先计算 $P\{X_{d1} \rightarrow X_{d2}\}$ 。由 ML-解码法可知,

$$\begin{aligned} P\{X_{d1} \rightarrow X_{d2}\} &= \frac{1}{\pi^{T+\tau} \det(\Sigma_{X_1})} \int_{Y^H \Sigma_{X_1}^{-1} Y > Y^H \Sigma_{X_2}^{-1} Y} e^{-Y^H \Sigma_{X_1}^{-1} Y} dY \quad (15) \end{aligned}$$

作积分变换 $Z = \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} = \Sigma_{X_1}^{-1} Y$, 可变为:

$$\begin{aligned} P\{X_{d1} \rightarrow X_{d2}\} &= \frac{1}{\pi^{T+\tau}} \int_{Z^H Z > Z^H \Sigma_{X_2}^{-1} \Sigma_{X_1}^{-1} Z} e^{-Z^H Z} dZ \quad (16) \\ &= \frac{1}{\pi^2} \iint_{|\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2 > \lambda_1 |\zeta_1|^2 + \lambda_2 |\zeta_2|^2} e^{-(|\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2)} d\zeta_1 d\zeta_2 \end{aligned}$$

其中 λ_1 、 λ_2 为 $\Sigma_{X_1}^{-1} \Sigma_{X_2}^{-1}$ 的非 1 特征值, 且 $\lambda_1 \geq \lambda_2$ 。

引理 1:

$$P\{X_{d1} \rightarrow X_{d2}\} = 1 - \frac{\lambda_1 - 1}{\lambda_1 - \lambda_2} \quad (17)$$

引理 1 证明可见附录。

同样可得

$$P\{X_{d_2} \rightarrow X_{d_1}\} = 1 - \frac{\mu_1 - 1}{\mu_1 - \mu_2} \quad (18)$$

其中 μ_1 与 μ_2 为矩阵 $\Sigma_{X_2}^{-1} \Sigma_{X_1}^{-1} \Sigma_{X_2}^{-1}$ 的非 1 特征值。

因此

$$P_e = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\lambda_1 - 1}{\lambda_1 - \lambda_2} \right) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\mu_1 - 1}{\mu_1 - \mu_2} \right) \quad (19)$$

下面我们找出 λ_1 、 λ_2 与 μ_1 、 μ_2 之间的关系。

引理 2: 对上述 λ_1 、 λ_2 与 μ_1 、 μ_2 , 下列关系式成立。

- 1) $\lambda_1 \lambda_2 = 1, \mu_1 \mu_2 = 1$;
- 2) $\lambda_1 = \frac{1}{\mu_2}, \lambda_2 = \frac{1}{\mu_1}$;
- 3) $\lambda_1 = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4a}}{2} + 1$,

其中

$$a = \frac{(\tau\rho_0 + T\rho_1)^2 \sin^2 \theta}{1 + \tau\rho_0 + T\rho_1},$$

而

$$\cos \theta = \frac{|(\mathbf{QX}_1)^H (\mathbf{QX}_2)|}{|\mathbf{QX}_1| |\mathbf{QX}_2|}.$$

引理 2 的证明可见附录。

把引理 2 的结果代入(19)式可得

$$P_e = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\lambda_1 - 1}{\lambda_1 - \frac{1}{\lambda_1}} \right) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\frac{1}{\lambda_2} - 1}{\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}} \right) \quad (20)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{\lambda_1 + 1} + \frac{1}{2} \frac{1}{\lambda_1 + 1}$$

这样, 由引理 2 中的(3)可知

$$P_e = \frac{1}{1 + \frac{a + \sqrt{a^2 + 4a}}{2} + 1} = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{a}{4+a}} \right) \quad (21)$$

总结以上, 我们有下列定理

定理: 假设系统有两个码字, 分别为

$$\mathbf{X}_{d_1} = (x_{11} \ x_{12} \ \cdots \ x_{1T})^T \text{ 与}$$

$$\mathbf{X}_{d_2} = (x_{21} \ x_{22} \ \cdots \ x_{2T})^T, \text{ 满足 } \sum_{j=1}^T |x_{ij}|^2 = T (i=1,2).$$

系统经过 τ 次训练, 其训练序列为

$\Phi_0 = (\varphi_1 \ \varphi_2 \ \cdots \ \varphi_\tau)^T$, 满足 $\sum_{i=1}^{\tau} |\varphi_i|^2 = \tau$ 。则上小节给出的 ML - 解码法的错误概率为

$$P_e = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{a}{4+a}} \right) \quad (22)$$

其中 a 由引理 2 中给出。

3.3. 从定理中得到的一些初步结论

3.3.1. 结论一

显然, 由定理可知, 成对错误概率 P_e 完全由 a 所确定。假定系统的总能量固定为 ρ , 即训练所用能量与 T 时间内传送信号所用能量之和为 ρ , 则有 $\tau\rho_0 + T\rho_1 = \rho$ 。从引理 2 可知,

$$a = \frac{(\tau\rho_0 + T\rho_1)^2 \sin^2 \theta}{1 + \tau\rho_0 + T\rho_1}$$

因此, 当 $\rho \rightarrow +\infty$ 时, $P_e \rightarrow 0$, 且由泰勒级数一阶展开可知,

$$P_e \approx \frac{1}{a+4} \quad (23)$$

由此可以看出, 成对错误概率 P_e 是随着 ρ 的增加而以 1 次方下降。因而可以断定, 系统的定向分集增益是 1。而当接收方完全知道信道信息时, 系统的定向分集增益也是 1。从此可知, 发送训练序列信号并不改变系统的定向分集增益。但是这个系统的编码增益会有所不同, 事实上, 当接收方完全知道瞬时信道系数 h 时, 利用 Q -函数的近似式

$$Q(x) = \frac{1}{6} e^{-\frac{2}{3}x^2} + \frac{1}{12} e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad (24)$$

可以计算出其成对错误概率 \bar{P}_e 可以近似为

$$\bar{P}_e \approx \frac{1}{12 + 3\rho_1 |\Delta\mathbf{s}|^2} + \frac{1}{6 + 2\rho_1 |\Delta\mathbf{s}|^2} \quad (25)$$

其中 $|\Delta\mathbf{s}| = \mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_1$, \mathbf{s}_1 与 \mathbf{s}_2 是系统的两个码字, 且满足能量约束 $|\mathbf{s}_1|^2 = |\mathbf{s}_2|^2 = 1$ 。

令 $\mathbf{s}_1 = \frac{\mathbf{X}_{d1}}{\sqrt{T}}$, $\mathbf{s}_2 = \frac{\mathbf{X}_{d2}}{\sqrt{T}}$, 与(23)式比较, 可以证明

$$\bar{P}_e \leq P_e \quad (26)$$

特别地, 当 ρ 很大, 而 $T=1$ 时, 可以得到

$a = \frac{\rho^2}{1+\rho} \sin^2 \theta \approx \rho \sin^2 \theta$, 从以下 3.3.2. 的推导可知,

其最优设计为 $\tau=1$, $\rho_0 = \rho_1 = \rho/2$, $\sin^2 \theta = \sin^2 \frac{\varphi}{2}$.

其中 φ 为复数 \mathbf{X}_{d1} 与 \mathbf{X}_{d2} 之间的夹角。因而

$$P_e \approx \frac{1}{\rho \sin^2 \frac{\varphi}{2} + 4} \approx \frac{1}{\rho \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \quad (27)$$

另一方面, 从式(25)知,

$$\begin{aligned} \bar{P}_e &\approx \frac{1}{3\rho_1|\Delta s|^2} + \frac{1}{2\rho_1|\Delta s|^2} = \frac{2}{3\rho|\Delta s|^2} + \frac{1}{\rho|\Delta s|^2} \\ &= \frac{5}{3\rho|\Delta s|^2} = \frac{5}{12\rho \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \end{aligned} \quad (28)$$

因此

$$\frac{\bar{P}_e}{P_e} = \frac{5}{12} \quad (29)$$

从以上分析可知, 当 $T=1$ 时, 知道信道信息与不知道信道信息的性能差接近于 3 dB。这种差别是没法用一个好的信道的估计方法来弥补, 这是因为我们的方法是基于最优的 ML - 解码法。任何利用信道估计解码法的性能都不可能优于上述的联合解码法。

3.3.2. 结论二

另一方面, 当 ρ 固定时, 则 a 完全由 $\sin^2 \theta$ 所确定。显然, a 与 $\sin^2 \theta$ 成正比, 因此, 系统包括参数 τ 、 ρ_0 、 ρ_1 、 T 及码本, 应该使 $\sin^2 \theta$ 越大越好。由于任何一对码字都会有可能产生不同的 $\sin^2 \theta$ 值, 因而, 系统的设计准则应该是在所有这些不同的 $\sin^2 \theta$ 值中最小值越大越好。下面让我们更加详细地了解 $\sin^2 \theta$ 值。

由定义可知

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{|(\mathbf{QX}_1)^H (\mathbf{QX}_2)|}{|\mathbf{QX}_1| \cdot |\mathbf{QX}_2|} = \frac{|\tau\rho_0 + \rho_1 \mathbf{X}_{d1}^H \mathbf{X}_{d2}|}{\sqrt{\tau\rho_0 + T\rho_1} \cdot \sqrt{\tau\rho_0 + T\rho_1}} \\ &= \frac{1}{\rho} \left| \tau\rho_0 + T\rho_1 \cdot \left(\frac{\mathbf{X}_{d1}}{\sqrt{T}} \right)^H \left(\frac{\mathbf{X}_{d2}}{\sqrt{T}} \right) \right| \end{aligned} \quad (30)$$

注意上式中, $\frac{\mathbf{X}_{d1}}{\sqrt{T}}$ 与 $\frac{\mathbf{X}_{d2}}{\sqrt{T}}$ 是 T 维单位复球面上的两个

点。如果 $\left(\frac{\mathbf{X}_{d1}}{\sqrt{T}} \right)^T \left(\frac{\mathbf{X}_{d2}}{\sqrt{T}} \right) = b_1 + jb_2$, 则上式可写为

$$\cos \theta = \frac{1}{\rho} \sqrt{\rho_0^2 \tau^2 + 2\rho_0 \tau \cdot \rho_1 T b_1 + \rho_1^2 T^2 (b_1^2 + b_2^2)} \quad (31)$$

为了更好地理解 b_1 与 b_2 的几何含义, 让我们分几种情况来分析。

第 1 种情况是 $\tau=0$, 即系统没有训练。这种情况下,

$$\cos \theta = \left(\frac{\mathbf{X}_{d1}}{\sqrt{T}} \right)^H \left(\frac{\mathbf{X}_{d2}}{\sqrt{T}} \right) \quad (32)$$

这样, 码本的设计准则应该是增大

$\left(\frac{\mathbf{X}_{d1}}{\sqrt{T}} \right)^H \left(\frac{\mathbf{X}_{d2}}{\sqrt{T}} \right)$ 越大越好。这个准则与多天线系统中 non-coherent 情况下码本的设计准则一致。参见文献 [18]。注意, 当 $\tau=0$ 时, ML - 解码法成为

$$\arg \max \left| \mathbf{Y}_d^H \mathbf{X}_d \right| \quad (33)$$

第 2 种情况是 $\tau \geq 1$, $T=1$ 。在这种情况下, 显然 $b_1^2 + b_2^2 = 1$ 。且 $\frac{\mathbf{X}_{d1}}{\sqrt{T}}$ 与 $\frac{\mathbf{X}_{d2}}{\sqrt{T}}$ 可以等价于实平面上单位圆上的两个点, 而 b_1 是这两个点之间夹角的余弦值。若记此夹角为 φ , 可以假设 $0 \leq \varphi \leq \pi$, 则 $b_1 = \cos \varphi$ 。这样,

$$\cos \theta = \frac{1}{\rho} \sqrt{\rho_0^2 \tau^2 + 2\rho_0 \tau \rho_1 \cos \varphi + \rho_1^2} \quad (34)$$

因此, 码本的设计准则就应该为使得码字之间的夹角越大越好。当码本确定之后, 我们可以确定 τ 、 ρ_0 与 ρ_1 。

由于

$$\begin{aligned} \rho^2 \cos^2 \theta &= \rho_0^2 \tau^2 + 2\rho_0 \tau \cdot \rho_1 \cos \varphi + \rho_1^2 \\ &= (\rho - \rho_1)^2 + 2(\rho - \rho_1) \rho_1 \cos \varphi + \rho_1^2 \\ &= 2(1 - \cos \varphi) \rho_1^2 - 2(1 - \cos \varphi) \rho \rho_1 + \rho^2 \end{aligned} \quad (35)$$

因此, 当

$$\rho_1 = \frac{2(1 - \cos \varphi) \rho}{2 \cdot 2(1 - \cos \varphi)} = \frac{1}{2} \rho \quad (36)$$

时, $\cos^2 \theta$ 达到最小。此时可以得到 $\theta = \frac{\varphi}{2}$ 。

另一方面, 由于 $\tau\rho_0 + \rho_1 = \rho$ 及 $\tau \geq 1$, 而当 τ 增大时, 即训练次数增多, 系统的数据传输率受损。因而, 最优设定是 $\tau=1$, 这样 $\rho_0 = \frac{\rho}{2}$ 。

总结以上,可以得到如下结果:当 $\tau \geq 1$ 而 $T=1$,系统的最优设计是 $\tau=1$, $\rho_0 = \rho_1 = \frac{\rho}{2}$,而码本的设计准则应该为使得码字之间的最小夹角(或者最小距离)越大越好。

3.3.3. 结论三

下面我们来比较 $\tau=0$ 与 $\tau=1$, $T=1$ 两种情况。当 $\tau=0$ 时,我们设定 $T=2$ 。为了作比较,设定两种情况的传送率为 r bits pcu。显然,当 $\tau=0$ 时,码本的组成应该是 2^{2r} 个2维的复向量,记为 l_{1r} 。而当 $\tau=1$, $T=1$ 时,其码本应为 2^{2r} 个复数,记为 l_{2r} 。例如当 $r=1$ 时,根据文献[19]中给定的方法,其最优的四个向量可以选为如下:

$$l_{11} = \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} c \\ b(1+j) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{1-c^2} \\ \frac{c}{\sqrt{2}}(-1+j) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \sqrt{1-c^2} \\ \frac{c}{\sqrt{2}}(1-j) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ -b(1+j) \end{pmatrix} \end{array} \right\}$$

其中 $c=0.8881$, $b=\sqrt{\frac{1-c^2}{2}}$ 。其最大的 $\sin^2 \theta$ 值为 $\frac{2}{3}$,

从而所对应的常数 a 为 $\frac{2\rho}{3(1+\rho)}$ 。另一方面,在 l_{21} 的

设计应选为4-QAM,所对应的常数为 $\frac{\rho}{2(1+\rho)}$ 。从此

可知,不进行训练要比利用训练的方法要好。事实上,让 r 增大时,理论计算与仿真都可表明,这种差距会越来越大。

以上简单的例子表明,当信道快速变化时,例如 $\tau+T=2$ 时,即每2个时刻信道就变化一次时,不用训练而直接利用(33)式解码比利用训练的性能要好。但是,当信道处于慢变化时,即 $\tau+T$ 很大,而信道在多个 $\tau+T$ 时刻内都是不变的,通过训练得到的信息可以在以后多次数据传输中被利用,这样,所需要的能量与由训练而带来的速率的损失可以忽略不计,则利用训练所得到的性能要比不训练的要好。例如,在上述例子中,如果 l_{21} 为BPSK,则要比利用 l_{11} 要好。

4. 仿真分析

首先,我们对式(21)进行 matlab 仿真,并将其与

实际情况误帧率的仿真分析相比较。系统的仿真环境如下: $\tau=1$, $T=6$,仿真次数 $N=100,000$,随机产生2个点的码字。

由图1可以看出,两条曲线完全重合,这说明本文推导出的帧错误概率公式是正确的。

接着,我们将本文中的联合解码方法的性能与对信道进行ML估计,以及对信道进行MMSE估计的方法进行比较。系统的仿真环境如下: $\tau=1$, $T=2$,星座为16-QAM,仿真次数 $N=100000$ 。结果如图2所示。

由图2可以看出,联合解码优于采用信道估计的解码方式0.4 dB,其中采用ML进行信道估计与采用MMSE进行信道估计的误帧率基本一致,这也与实际

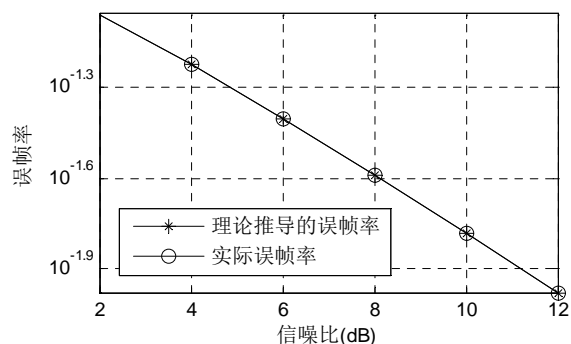


Figure 1. Comparison between theoretical derivation and actual BER

图1. 理论推导与实际误码率的仿真比较

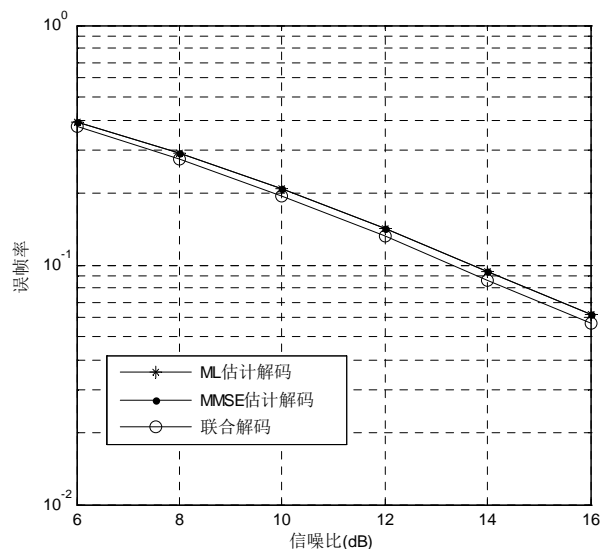


Figure 2. Performance comparison between joint decoder, ML channel estimation and MMSE channel estimation

图2. 联合解码法与采用信道估计解码方法的性能比较(ML信道估计, MMSE信道估计)方式解码的比较

情况想符合。

图 3 中, 我们仿真了三种情况下的帧错误概率, 分别是: 信道系数已知条件下的误帧率($\tau = 0, T = 1$, 星座为 4-QAM, 采用 ML - 解码法); 信道系数未知($\tau = 1, T = 1$, 星座为 4-QAM, 采用联合解码); 信道系数未知($\tau = 0, T = 2$, 星座为(37)式中 4 个向量, 采用联合解码)。仿真次数为仿真次数 $N = 100,000$ 次。

$$\begin{pmatrix} 0.8881 \\ 0.3251+0.3251j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.4597 \\ -0.6280+0.6280j \end{pmatrix} \quad (37)$$

$$\begin{pmatrix} 0.4597 \\ 0.6280-0.6280j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.8881 \\ -0.3251-0.3251j \end{pmatrix}$$

由图 3 可以看出, 信道信息已知时的误码率要优于信道系数未知的误码率 3dB, 这与节 3.3.1 的理论分析所得出的结果一致。而从图中的另外两条曲线($\tau = 1, T = 1$ 与 $\tau = 0, T = 2$)的比较可知, 信道变化比较快(即相干时间为 2)的情况下, 不用训练而直接利用联合解码法解码的性能要优于利用训练序列的性能, 这也证实了文中节 3.3.3 的分析。

5. 总结

本文对于单发单收的无线通信系统, 推导了一种联合解码法, 并对其性能做出了理论分析, 得到了其成对错误概率的解析公式。通过对此公式的分析表明, 不用信道估计的联合解码法的性能要优于基于信

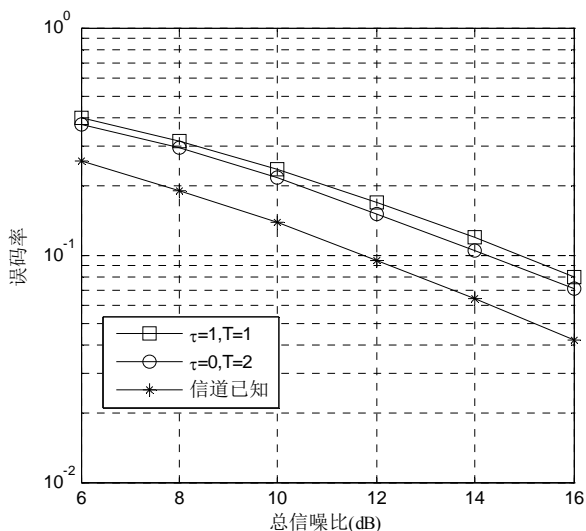


Figure 3. Performance comparison between ML decoder with CSI, ML channel estimation and joint decoder
图 3. 信道系数已知且用 ML - 解码、信道系数未知用 ML 解码法、信道系数未知且用联合解码法的性能比较

道估计方法的系统性能。并且在某些特定的条件下, 例如, 信道变化很快, 即相干时间很短, 不发送训练序列的系统性能要优于基于训练序列的系统性能。所有的仿真证实了上述结论。

尽管联合解码法具有极优的性能, 但所付出的代价是解码复杂度很高。如何在保证性能的条件下, 降低复杂度将是一个具有挑战性的研究课题。

6. 致谢

本文受到国家自然科学基金(资助号 60972049), 教育部第 37 批归国留学人员科研启动基金及浙江省“钱江人才”计划资助。

参考文献 (References)

- [1] D. Tse, P. viswanath. Fundamentals of communication. Cambridge university press, Cambridge, 2005.
- [2] A. Goldsmith. Wireless communications]. Cambridge university press, Cambridge, 2005.
- [3] K. Yu, Evans, I. Collings. Performance analysis of pilot symbol aided QAM for Rayleigh fading channels. Proceedings of IEEE International Conference on Communications, New York, 28 April-2 May 2002, 1731-1735.
- [4] T. Chen, Y. V. Zakharov and C. S. Liu. Low-complexity channel-estimate based adaptive linear equalizer. IEEE Signal Processing Letters, 2011, 18(7): 427-430.
- [5] B. Song, L. Gui, Y. Guan, et al. On channel estimation and equalization in TDS-OFDM based terrestrial HDTV broadcasting system. IEEE Transactions on Consumer Electronics, 2005, 51(3): 790-797.
- [6] L. Gui, Q. Li, B. Liu, W. Zhang, et al. Low complexity channel estimation method for TDS-OFDM based Chinese DTTB system. IEEE Transactions on Consumer Electronics, 2009, 55(3): 1135-1140.
- [7] M. Liu, M. Crussiere and J-F. Helard. A combined time and frequency algorithm for improved channel estimation in TDS-OFDM. Proceedings of IEEE International Conference on Communications, Cape Town, 23-27 May 2010, 1-6.
- [8] M. Liu, M. Crussiere and J-F. Helard. A novel data-aided channel estimation in TDS-OFDM with reduced complexity for TDS-OFDM systems. IEEE Transactions on Broadcasting, 2012, 58(2): 247-260.
- [9] S. Li, J. Xiong, and L. Gui, et al. A generalized analytical solution to channel estimation with intersymbol interferencx cancelation and co-channel interference cancelation for single input single output/multiple input single output digital terrestrial multimedia broadcasting systems. IEEE Transactions on Broadcasting, 2013, to be published.
- [10] 马天鸣, 施玉松, 李凤荣等. 一种低复杂度自适应信道估计方案[J]. 电子与信息学报, 2012, 34(8): 1980-1985.
- [11] 肖小潮, 郑宝玉, 王臣昊. 一种基于最优观测矩阵的自适应贝叶斯压缩信道感知联合机制[J]. 电子与信息学报, 2012, 34(10): 2299-2305.
- [12] L. Najjar. On optimality limits of channel-structured estimation in multicarrier systems. IEEE Transactions on Vehicular Technology, 2012, 61(5): 2382-1387.
- [13] C. Candan. An accurate and efficient two-stage channel estimate method utilizing training sequences with closed from expressions. IEEE Transactions on Communications, 2011, 59(12):

- 3259-3264.
- [14] 于华楠, 郭树旭. 基于压缩感知的超宽带信道估计方法的研究[J]. 电子与信息学报, 2012, 34(6): 1452-1456.
- [15] O. U. Khan, S.-Y. Chen, D. D. Wentzloff, et al. Impact of compressed sensing with quantization on UWB receivers with multipath channel estimate. IEEE Journal on Emerging and Selected Topics in Circuits and Systems, 2012, 2(3): 460-469.
- [16] J. Ming, W. Yin, Y. Ying Li, et al. Compressive sensing based high-resolution channel estimation for OFDM system. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing, 2012, 6(1): 15-25.
- [17] P. Cheng, L. Gui, Y. Rui, et al. Compressed sensing based channel estimation for two-way relay networks. IEEE Wireless Communications Letters, 2012, 1(3): 201-204.
- [18] B. M. Hochwald, T. L. Marzetta. Unitary space-time modulation for multiple-antenna communications in Rayleigh flat fading. IEEE Transactions on Information Theory, 2000, 46(2): 543-564.
- [19] 王海泉, 陈颖, 赵知劲. 多天线系统中的空时码技术[M]. 北京: 科学出版社, 2011: 96-111.

附录

1. 引理 1 的证明:

对(16)式作积分变换 $\varsigma_1 = \gamma_1 e^{j\theta_1}$, $\varsigma_2 = \gamma_2 e^{j\theta_2}$, 可得

$$\begin{aligned}
 & P\{\mathbf{X}_{d_1} \rightarrow \mathbf{X}_{d_2}\} \\
 &= 4 \iint_{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 > \lambda_1 \gamma_1^2 + \lambda_2 \gamma_2^2} e^{-(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)} \gamma_1 \gamma_2 d\gamma_1 d\gamma_2 \\
 &= \iint_{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 > \lambda_1 \gamma_1^2 + \lambda_2 \gamma_2^2} e^{-(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)} d\gamma_1^2 d\gamma_2^2 \\
 &= \iint_{(1-\lambda_2)\gamma_2^2 \geq (1-\lambda_1)\gamma_1^2} e^{-(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)} d\gamma_1^2 d\gamma_2^2 \\
 &= \int_0^{+\infty} e^{-\gamma_2^2} \int_0^{\frac{1-\lambda_2}{\lambda_1-1}\gamma_2^2} e^{-\gamma_1^2} d\gamma_1^2 d\gamma_2^2 \\
 &= \int_0^{+\infty} e^{-\gamma_2^2} \left(1 - e^{-\frac{1-\lambda_2}{\lambda_1-1}\gamma_2^2}\right) d\gamma_2^2 \\
 &= 1 - \int_0^{+\infty} e^{-\left(1+\frac{1-\lambda_2}{\lambda_1-1}\right)\gamma_2^2} d\gamma_2^2 \\
 &= 1 - \frac{1}{1 + \frac{1-\lambda_2}{\lambda_1-1}} \\
 &= 1 - \frac{\lambda_1 - 1}{\lambda_1 - \lambda_2}
 \end{aligned} \tag{38}$$

2. 引理 2 的证明:

定义矩阵 \mathbf{A} 为 $\Sigma_1^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_2 - \Sigma_1)\Sigma_1^{-\frac{1}{2}}$ 。由(5)式可知,

$$\begin{aligned}
 & \text{rank}(\Sigma_2 - \Sigma_1) \\
 &= \text{rank}(\mathbf{Q}\mathbf{X}_2\mathbf{X}_2^H\mathbf{Q}^H - \mathbf{Q}\mathbf{X}_1\mathbf{X}_1^H\mathbf{Q}^H) \\
 &= \text{rank}(\mathbf{X}_2\mathbf{X}_2^H - \mathbf{X}_1\mathbf{X}_1^H) \\
 &\leq \text{rank}(\mathbf{X}_2\mathbf{X}_2^H) + \text{rank}(\mathbf{X}_1\mathbf{X}_1^H) \\
 &= 1 + 1 = 2
 \end{aligned} \tag{39}$$

因此 $\text{rank}(\mathbf{A}) \leq 2$, 这样, \mathbf{A} 的非零特征值最多只有 2 个。而

$$\Sigma_1^{\frac{1}{2}}\Sigma_2^{-1}\Sigma_1^{\frac{1}{2}} = \left(\Sigma_1^{-\frac{1}{2}}\Sigma_2\Sigma_1^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1} = \mathbf{A} + \mathbf{I}_{T+\tau},$$

因此矩阵 $\Sigma_1^{\frac{1}{2}}\Sigma_2^{-1}\Sigma_1^{\frac{1}{2}}$ 的非 1 特征值最多只有 2 个, 记为 λ_1 与 λ_2 。同样, $\Sigma_2^{\frac{1}{2}}\Sigma_1^{-1}\Sigma_2^{\frac{1}{2}}$ 的非 1 特征值也最多只有 2 个, 记为 μ_1 与 μ_2 。

1) 由于 λ_1 与 λ_2 是 $\Sigma_1^{\frac{1}{2}}\Sigma_2^{-1}\Sigma_1^{\frac{1}{2}}$ 的非 1 特征值,

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 \lambda_2 &= \det\left(\Sigma_1^{\frac{1}{2}}\Sigma_2^{-1}\Sigma_1^{\frac{1}{2}}\right) = \det(\Sigma_1)\det(\Sigma_2^{-1}) \\
 &= \frac{\det(\Sigma_1)}{\det(\Sigma_2)} = \frac{1 + \tau\rho_0 + T\rho_1}{1 + \tau\rho_0 + T\rho_1} = 1
 \end{aligned} \tag{40}$$

同理 $\mu_1\mu_2 = 1$ 。

2) 由于

$$\begin{aligned}
 & \left(\Sigma_2^{\frac{1}{2}}\Sigma_1^{-\frac{1}{2}}\right)\left(\Sigma_1^{\frac{1}{2}}\Sigma_2^{-\frac{1}{2}}\Sigma_1^{\frac{1}{2}}\right)\left(\Sigma_2^{\frac{1}{2}}\Sigma_1^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1} \\
 &= \Sigma_2^{\frac{1}{2}}\Sigma_2^{-1}\Sigma_1\Sigma_2^{-\frac{1}{2}} = \Sigma_2^{\frac{1}{2}}\Sigma_1\Sigma_2^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned} \tag{41}$$

即 $\Sigma_1^{\frac{1}{2}}\Sigma_2^{-1}\Sigma_1^{\frac{1}{2}}$ 与矩阵 $\Sigma_2^{-\frac{1}{2}}\Sigma_1\Sigma_2^{-\frac{1}{2}}$ 相似。因此, $\Sigma_1^{\frac{1}{2}}\Sigma_2^{-1}\Sigma_1^{\frac{1}{2}}$ 与矩阵 $\Sigma_2^{\frac{1}{2}}\Sigma_1\Sigma_2^{\frac{1}{2}}$ 有相同的特征值。

又由于

$$\Sigma_2^{\frac{1}{2}}\Sigma_1\Sigma_2^{\frac{1}{2}} = \left(\Sigma_2^{\frac{1}{2}}\Sigma_1^{-1}\Sigma_2^{\frac{1}{2}}\right)^{-1},$$

所以, λ_1 、 λ_2 与 μ_1 、 μ_2 互为倒数。而 $\lambda_1 \geq \lambda_2$, $\mu_1 \geq \mu_2$,

因而 $\lambda_1 = \frac{1}{\mu_2}$, $\lambda_2 = \frac{1}{\mu_1}$ 。

3) 令 \mathbf{A} 的非零特征值为 ν_1 , ν_2 , 则

$$\begin{aligned}
 \nu_1 + \nu_2 &= \text{tr}\left(\Sigma_b^{-\frac{1}{2}}(\Sigma_2 - \Sigma_1)\Sigma_b^{-\frac{1}{2}}\right) \\
 &= \text{tr}\left(\Sigma_1^{-\frac{1}{2}}\Sigma_2\Sigma_1^{-\frac{1}{2}} - \mathbf{I}_{T+\tau}\right) = \text{tr}(\Sigma_2\Sigma_1^{-1}) - (T + \tau) \\
 &= \text{tr}\left(\left(\mathbf{I}_{T+\tau} + \mathbf{Q}\mathbf{X}_2(\mathbf{Q}\mathbf{X}_2)^H\right)\left(\mathbf{I}_{T+\tau} - \frac{\mathbf{Q}\mathbf{X}_1(\mathbf{Q}\mathbf{X}_1)^H}{\det(\Sigma_1)}\right)\right) \\
 &\quad - (T + \tau) \\
 &= \text{tr}\left(\frac{\mathbf{Q}\mathbf{X}_2(\mathbf{Q}\mathbf{X}_2)^H - \frac{\mathbf{Q}\mathbf{X}_1(\mathbf{Q}\mathbf{X}_1)^H}{\det(\Sigma_1)}}{\det(\Sigma_1)}\right) \\
 &= |\mathbf{Q}\mathbf{X}_2|^2 \frac{|\mathbf{Q}\mathbf{X}_1|^2}{\det(\Sigma_1)} - \frac{|(\mathbf{Q}\mathbf{X}_2)^H \mathbf{Q}\mathbf{X}_1|^2}{\det(\Sigma_1)} \\
 &= \tau\rho_0 + T\rho_1 - \frac{\tau\rho_0 + T\rho_1}{1 + \tau\rho_0 + T\rho_1} - \frac{|\mathbf{Q}\mathbf{X}_2|^2 |\mathbf{Q}\mathbf{X}_1|^2 \cos^2 \theta}{1 + \tau\rho_0 + T\rho_1} \\
 &= \frac{(\tau\rho_0 + T\rho_1)^2 \sin^2 \theta}{1 + \tau\rho_0 + T\rho_1}
 \end{aligned} \tag{42}$$

其中 $\cos \theta = \frac{|\mathbf{X}_1^H \mathbf{Q}^H \mathbf{Q} \mathbf{X}_2|}{|\mathbf{Q} \mathbf{X}_1| |\mathbf{Q} \mathbf{X}_2|}$ 。并且

$$\begin{aligned} (v_1 + 1)(v_2 + 1) &= \det \left(\mathbf{\Sigma}_1^{-\frac{1}{2}} \mathbf{\Sigma}_2 \mathbf{\Sigma}_1^{-\frac{1}{2}} \right) \\ &= \det(\mathbf{\Sigma}_2) / \det(\mathbf{\Sigma}_1) = 1 \end{aligned} \quad (43)$$

由式(41)和式(42)，可解得：

$$v_1 = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4a}}{2}, \quad v_2 = \frac{a - \sqrt{a^2 + 4a}}{2} \quad (44)$$

其中 $a = \frac{(\rho_0 + T\rho_1)^2 \sin^2 \theta}{1 + \rho_0 + T\rho_1}$ 。由于

$\mathbf{\Sigma}_1^{-\frac{1}{2}} \mathbf{\Sigma}_2^{-1} \mathbf{\Sigma}_1^{\frac{1}{2}} = (\mathbf{A} + \mathbf{I}_{T+\tau})$ ，则 $\lambda_1 = \frac{1}{v_2}$ ， $\lambda_2 = \frac{1}{v_1}$ 。所以。

引理 2 中的(3)成立。