

Performance Analysis of the MRC Decoder for a Massive MIMO System

Haiquan Wang, Pengyun Wu, Yuyu Jin, Lei Shen

School of Communications Engineering, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou
Email: lywpy@sina.com

Received: Oct. 23rd, 2014; revised: Nov. 17th, 2014; accepted: Nov. 26th, 2014

Copyright © 2014 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

Abstract

Based on a massive multiple-input, multiple-output (MIMO) uplink system, the pair-wise error probability (PEP) of the maximal ratio combining (MRC) decoder on the receiver is analyzed. The channel is assumed to be slow flat fading, and the base station (BS) knows the instant channel state information. Firstly, the MRC decoder is defined for the system. Secondly, a formula calculating the PEP of the system with the decoder is derived. Thirdly, asymptotic analyses of the PEP based on two different situations are given. These analyses reveal facts: 1) The PEP cannot go to zero even when signal-to-noise (SNR) goes to infinity; 2) The PEP goes to zero when the number of antennas at BS is increased to infinity and SNR is fixed. Finally, power scale law on PEP is discussed. Numerical simulations firm the above conclusions.

Keywords

Massive MIMO, Maximal Ratio Combining, Pair-Wise Error Probability, Slow Flat Fading, Channel State Information

大规模天线系统中MRC解码法的性能分析

王海泉, 吴鹏云, 金瑜瑜, 沈雷

杭州电子科技大学通信工程学院, 杭州
Email: lywpy@sina.com

收稿日期: 2014年10月23日; 修回日期: 2014年11月17日; 录用日期: 2014年11月26日

摘要

研究基于大规模天线上行系统,对接收端采用最大比合并(MRC)解码法的成对错误概率(PEP)进行了分析。假定信道慢平坦衰落,基站已知信道状态信息。第一,介绍了MRC解码器的解码方法;第二,基于此方法,推导了系统的PEP公式;第三,针对两种不同情况推导出PEP的渐近趋势。分析表明:1)当天线数固定时,信噪比趋于无穷大所得到的PEP不为零;2)当信噪比固定时,天线数趋于无穷大时PEP降为零。最后,讨论了能量尺度律(power scale law)。数值仿真证实了上述结论的正确性。

关键词

大规模天线, 最大比合并, 成对错误概率, 慢平坦衰落, 信道状态信息

1. 引言

多用户多输入多输出(MU-MIMO)无线通信系统在当今通信领域已得到广泛应用[1],它能提供改善频谱效率和无线链路传输性能的巨大潜力。一般来说,每个用户与基站(BS)之间的信道需要正交,这就使得它们之间的通信需处在不同时频资源上,从信息论的观点上看显然不是最佳的。如果不同用户与基站之间的通信能在同一时频资源上进行,就可以得到更高的频谱使用率[1],但这需要复杂的解码技术来消除用户间干扰,如上行系统中的最大似然(ML)解码[2],下行系统中的脏纸编码(DPC)[3]。

大规模天线(Massive MIMO)系统[4]-[8]不同于一般的MIMO系统,基站拥有大量天线,同时在同一频段上服务于多个用户终端。根据大数定理,不同用户与基站之间的信道趋于正交[9][10],这样小区内用户间的干扰就可以用简单的线性解码来消除,因此提高了频谱效率[11]。此外,大规模天线还可以减少系统的发射功率。上行系统减少发射功率可以使终端电池消耗减慢;下行系统基站的电功率消耗来自于功率放大器、相关电路和冷却系统[12],故减少发射功率可以削减基站的电力消耗。

大规模天线系统中,由于巨大的天线数目及多个用户同时同频通信,选择一个低解码复杂度的解码器显得尤为重要。线性解码器如最小均方误差(MMSE)和迫零(ZF)解码器,其解码复杂度相对于ML解码已大大降低,但是它们都需要信道矩阵的逆矩阵,当天线数很大时计算复杂度仍然比较高[10][13][14]。另一方面,最大比合并(MRC)解码器是一种简单的线性解码器,它不需要对信道矩阵求逆,计算复杂度明显降低。文献[9]应用随机矩阵理论,得到了大规模天线系统中MMSE、ZF和MRC解码可达到的理论速率。文献[15]给出了MMSE和ZF解码关于成对错误概率(PEP)的近似表达式。

本文对大规模天线系统中的MRC解码及其性能作出详细的分析,主要工作包括以下几个方面:1)给出了MRC解码方法PEP的解析公式。2)理论证明了①当天线数 M 固定时,随着信噪比 ρ 逐渐增加并趋于无穷大,用MRC解码方法得到的PEP会有一个下界;②当 ρ 固定时,随着 M 逐渐增加并趋于无穷大,用同样解码方法得到的PEP降为零。3)给出并证明了MRC解码方法的能量尺度律(power scale law)。即当 $0 < \alpha < 1$ 时,随着天线数的增加,每根天线的能量可以按 E/M^α 而减少并能保持PEP趋于零。而当 $\alpha = 1$ 时,上述结论不成立。这个结论纠正了文献[7]中给出的相应结论。最后,仿真证实了上述结论。

符号说明:斜黑体字母代表矩阵或矢量。 $(\cdot)^t$ 和 $(\cdot)^+$ 分别表示矩阵的转置和共轭转置; $tr(\cdot)$ 表示矩阵的迹运算, $\|\cdot\|$ 表示Frobenius范数, $(\cdot)_j$ 表示矩阵的第 j 行, $(\cdot)_{ij}$ 表示矩阵的第 i 行第 j 列分量;运算符 $E(\cdot)$ 表示数学期望, $\text{var}(\cdot)$ 表示方差。

2. 系统模型

假设有这样一个大规模天线蜂窝系统，本文考虑单个小区内用户与基站之间的收发状态。假设小区内有 1 个基站和 K 个用户，每个用户仅有 1 根发射天线，基站有 M 根天线(M 可能是几十或几百)，其基本的输入输出方程可以表示为

$$\mathbf{Y} = \sqrt{\rho}\mathbf{H}\mathbf{S} + \mathbf{W} \quad (1)$$

其中 \mathbf{Y} 是一个 M 维列向量，它表示基站接收到的信号； ρ 是接收到的信噪比(SNR)； \mathbf{H} 表示信道矩阵，其维数是 $M \times K$ ，其中每个分量分别表示每个用户与基站天线之间的信道增益，即 h_{ij} ($1 \leq i \leq M, 1 \leq j \leq K$) 表示用户 j 与基站天线 i 之间的信道增益。本文假定 h_{ij} 是一个独立同分布，均值为 0、方差为 1 的复高斯随机变量； $\mathbf{S} = (s_1, s_2, \dots, s_K)^T$ 是用户发送的信号，其中 s_i 表示第 i 个用户所发送的信号，并且假定每个信号的平均能量为 1。同时 $s_i \in \mathbb{S}_i$ ，即 \mathbb{S}_i 是第 i 个用户的星座图； \mathbf{W} 表示噪声，它也是一个 M 维列向量。 \mathbf{W} 的每个分量也是均值为 0、方差为 1 的复高斯随机变量。在本文中，我们假设信道是慢平坦衰落的，并且基站知道信道状态信息 \mathbf{H} 。

3. MRC 的解码方法和性能分析

3.1. MRC 的解码方法

常用的线性解码方法 ZF/MMSE 解码具有良好的性能，但是它们需要对信道矩阵求逆，因而当 M 很大时解码复杂度仍然比较高。MRC 解码不需要求逆矩阵，计算复杂度明显降低，本节的目的就在于做出它的性能分析。

MRC 均衡器可表示为

$$\mathbf{G}_{MRC} = \mathbf{H}^+ \quad (2)$$

将此均衡器乘到方程(1)两边得到

$$\mathbf{G}_{MRC}\mathbf{Y} = \sqrt{\rho}\mathbf{G}_{MRC}\mathbf{H}\mathbf{S} + \mathbf{G}_{MRC}\mathbf{W} \quad (3)$$

设 K 维向量 $\mathbf{G}_{MRC}\mathbf{Y}$ 和 $\mathbf{G}_{MRC}\mathbf{W}$ 分别为 \mathbf{Y}_{MRC} 和 \mathbf{W}_{MRC} ，它们第 j 个元素分别记为 $y_{MRC,j}$ 和 $w_{MRC,j}$ 。这样，上式可表示为如下 K 个等式

$$y_{MRC,j} = \sqrt{\rho}(\mathbf{G}_{MRC}\mathbf{H})_j \mathbf{S} + w_{MRC,j}, \quad j = 1, 2, \dots, K \quad (4)$$

对于一个给定的 j ($1 \leq j \leq K$)，MRC 解码法就是从上述第 j 个方程中解出第 j 个用户的信息 s_j 。但是从等式中可以发现，传输信号 s_k ($1 \leq k \neq j \leq K$) 都涉及在里面。因此， s_k 就会产生干扰，通常的情况是将这些干扰当作噪声来处理。

基于上述分析，MRC 解码器的解码方法可以表述为

$$\hat{s}_j = \arg \min_{s_j \in \mathbb{S}_j} \left\| y_{MRC,j} - \sqrt{\rho}(\mathbf{G}_{MRC}\mathbf{H})_{j,j} s_j \right\|^2 \quad (5)$$

3.2. 成对错误概率公式

本小节对上述 MRC 解码方法的性能从以下几个方面做出分析：1) 给出系统 PEP 表达式；2) 当基站天线数 M 固定，信噪比 ρ 趋于无穷大时，分析 PEP 的渐近性能；3) 当信噪比 ρ 固定，基站天线数 M 趋于无穷大时，分析 PEP 的渐近性能。

在方程(1)中，我们对各个符号作如下表示： $\mathbf{Y} = [y_1, y_2, \dots, y_M]^T$ ， $\mathbf{H} = [\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_K]$ ， $\mathbf{S} = [s_1, s_2, \dots, s_K]^T$ ，

$\mathbf{W} = [w_1, w_2, \dots, w_M]^T$ 。这样方程(3)可以表示为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{h}_1^+ \mathbf{Y} \\ \mathbf{h}_2^+ \mathbf{Y} \\ \vdots \\ \mathbf{h}_K^+ \mathbf{Y} \end{bmatrix} = \sqrt{\rho} \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1^+ \mathbf{h}_1 & \mathbf{h}_1^+ \mathbf{h}_2 & \cdots & \mathbf{h}_1^+ \mathbf{h}_K \\ \mathbf{h}_2^+ \mathbf{h}_1 & \mathbf{h}_2^+ \mathbf{h}_2 & \cdots & \mathbf{h}_2^+ \mathbf{h}_K \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{h}_K^+ \mathbf{h}_1 & \mathbf{h}_K^+ \mathbf{h}_2 & \cdots & \mathbf{h}_K^+ \mathbf{h}_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1^+ \mathbf{W} \\ \mathbf{h}_2^+ \mathbf{W} \\ \vdots \\ \mathbf{h}_K^+ \mathbf{W} \end{bmatrix} \quad (6)$$

假设系统有两个不同的码本 $\mathbf{S}_1 = (s_{11}, s_{21}, \dots, s_{K1})^T$ 和 $\mathbf{S}_2 = (s_{12}, s_{22}, \dots, s_{K2})^T$ ，当发射信号 \mathbf{S}_1 ，接收端判决为 \mathbf{S}_2 时产生误码。记 $\hat{w}_j = \sqrt{\rho} \mathbf{h}_j^+ (\mathbf{h}_1 s_{11} + \dots + \mathbf{h}_k s_{k1} + \dots + \mathbf{h}_K s_{K1}) + \mathbf{h}_j^+ \mathbf{W}$ ， $\hat{y}_j = \mathbf{h}_j^+ \mathbf{Y}$ ，则上述方程组中第 j 个方程可表示为

$$\hat{y}_j = \sqrt{\rho} \mathbf{h}_j^+ \mathbf{h}_j s_{j1} + \hat{w}_j \quad (7)$$

为了做出性能分析，假设 $s_{k1} (k \neq j)$ 为 0 均值、单位方差的复高斯随机变量。因此，根据本文的假设及高斯分布的性质得到：

$$E(\hat{w}_j) = 0, \quad \sigma^2 = \text{var}(\hat{w}_j) = \rho \left(|\mathbf{h}_j^+ \mathbf{h}_1|^2 + \dots + |\mathbf{h}_j^+ \mathbf{h}_k|^2 + \dots + |\mathbf{h}_j^+ \mathbf{h}_K|^2 \right) + |\mathbf{h}_j|^2$$

从而可以得到下面条件概率密度函数

$$f(\hat{y}_j | \mathbf{H}, s_{j1}) = \frac{1}{\pi \sigma} \exp\left(-\frac{|\hat{y}_j - \sqrt{\rho} \mathbf{h}_j^+ \mathbf{h}_j s_{j1}|^2}{\sigma^2}\right) \quad (8)$$

因此

$$P\{s_{j1} \rightarrow s_{j2} | \mathbf{H}\} = \int_{\Sigma} \frac{1}{\pi \sigma} \exp\left(-\frac{|\hat{y}_j - \sqrt{\rho} \mathbf{h}_j^+ \mathbf{h}_j s_{j1}|^2}{\sigma^2}\right) d\hat{y}_j = Q\left(\frac{d}{\sqrt{2}}\right) \quad (9)$$

其中积分区域 $\Sigma \triangleq \{\hat{y}_j : |\hat{y}_j - \sqrt{\rho} \mathbf{h}_j^+ \mathbf{h}_j s_{j2}| \leq |\hat{y}_j - \sqrt{\rho} \mathbf{h}_j^+ \mathbf{h}_j s_{j1}|\}$ ， Q 为 Q 函数， $d = \frac{\sqrt{\rho} |\mathbf{h}_j|^2 |\Delta s|}{\sigma}$ ， $\Delta s = s_{j2} - s_{j1}$ 。

由于信道矩阵 \mathbf{H} 的概率密度函数

$$f(\mathbf{H}) = \frac{1}{\pi^{MK}} \exp(-\text{tr}(\mathbf{H}^+ \mathbf{H})) = \frac{1}{\pi^{MK}} \exp\left(-(|\mathbf{h}_1|^2 + |\mathbf{h}_2|^2 + \dots + |\mathbf{h}_K|^2)\right) \quad (10)$$

对(9)式中 \mathbf{H} 作平均得到 PEP 如下：

$$P_e = \int_{\mathbf{h}_1 \dots \mathbf{h}_K} \frac{1}{\pi^{MK}} \exp\left(-(|\mathbf{h}_1|^2 + \dots + |\mathbf{h}_K|^2)\right) \cdot Q\left(\frac{d}{\sqrt{2}}\right) d\mathbf{h}_1 \dots d\mathbf{h}_K \quad (11)$$

公式(11)涉及到 Q 函数，很难得到一个显式表达式，但是我们可以做出渐近分析，其主要结果如下。

定理 1 针对上述给定的系统模型，MRC 解码的 PEP 具有以下性质：

1) 当天线数 M 固定，信噪比 $\rho \rightarrow \infty$ 时，有

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} P_e \geq \varepsilon_1 > 0 \quad (12)$$

这里 ε_1 是一个正常数。

2) 当信噪比 ρ 固定，天线数 $M \rightarrow \infty$ 时，有

$$\lim_{M \rightarrow \infty} P_e = 0 \quad (13)$$

证明过程见附录。

从上面的定理可以看出：当 $\rho \rightarrow \infty$ 时，用 MRC 解码所得到的 PEP 不趋于零，最终会有一个下界，

一般称之为错误平台；而当 $M \rightarrow \infty$ 时，最终得到的 PEP 趋于零，说明增加基站天线数可以改善 MRC 解码方法的性能。

3.3. 能量尺度律(Power Scale Law)

在本小节中，假设基站的总能量为 E ，而每根天线的接收信噪比 $\rho = E/M^\alpha$ ，其中 $0 < \alpha \leq 1$ 。则可以得到下面的结论。

定理 2 在上述的系统模型下，假设每根天线的能量为 E/M^α ， E 是给定的总能量。选用 MRC 解码得到的 PEP 满足：

- 1) 当 $0 < \alpha < 1$ 时，则有

$$\lim_{M \rightarrow \infty} P_e = 0 \tag{14}$$

- 2) 当 $\alpha = 1$ 时，则有

$$\lim_{M \rightarrow \infty} P_e \geq \varepsilon_2 > 0 \tag{15}$$

其中 ε_2 是一个正常数。

证明过程见附录。

可以发现，当 $\alpha = 1$ 时，PEP 并不会随着 M 的增加而趋于零，后面的仿真可以清楚地证明这一点。

4. 仿真分析

本小节通过仿真来验证所推导的表达式，假设信道是慢平坦衰落的，并且基站已知信道状态信息。整个仿真分为三个部分：第一、二部分是基于方程式(1)给出的分析，在其它参量不变的情况下，分别给出了信噪比 $\rho \rightarrow \infty$ 和天线数 $M \rightarrow \infty$ 时 PEP 的渐近趋势，并各自做出了比较；第三部分探讨的是 power scale law 问题，如 3.3 节所给定的假设，讨论了 $\alpha = 0.5$ 和 $\alpha = 1$ 时 PEP 的趋近情况。

图 1 是在给定假设用户码本为 BPSK，小区内用户数 $K = 8$ ，基站天线数目 M 分别取 20、30、40，信噪比的取值范围为 $[-8:22]$ dB。从图中可以看出，随着信噪比的增加，曲线都呈下降趋势，最终出现错误平台；但如果固定信噪比，则可以看出随着 M 的增加，PEP 越来越小，并且下降的幅度变大。故在

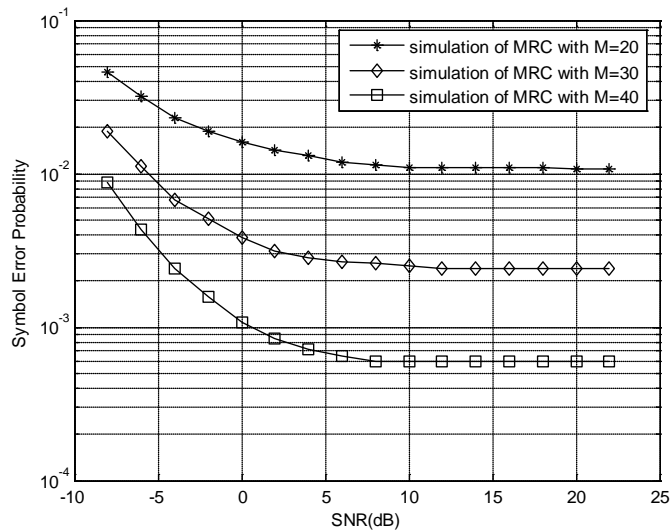


Figure 1. PEP of MRC decoding when M equals to 20, 30, 40 respectively
 图 1. $M = 20, 30, 40$ MRC 解码方法 PEP

大规模天线系统中，增加基站天线数目可以明显改善 MRC 解码法的性能，这也证实了前面所推导表达式的正确性。

图 2 所选用码本为 4-QAM，用户数目仍然为 8，信噪比分别取 3 dB 和 6 dB，天线数目变化范围为 [20:20:120]。从图中可以看出，随着 M 的逐渐增加，PEP 呈现线性下降趋势，最终趋于零。

图 3 是在 power scale law 条件下所讨论的关于 α 值的变化对 PEP 所产生的影响，给出了 $\alpha = 0.5$ 和 $\alpha = 1$ 时的对比仿真曲线。这里用户选用的码本仍然是 4-QAM，用户数为 8，信噪比为 6 dB，天线数目为 [30:30:180]。从图中可以看出，当 $\alpha = 0.5$ 时，随着天线数目的增加 PEP 趋于零；当 $\alpha = 1$ 时，随着天线数目的增加，PEP 下降得越来越平缓，最终也到达不了零。

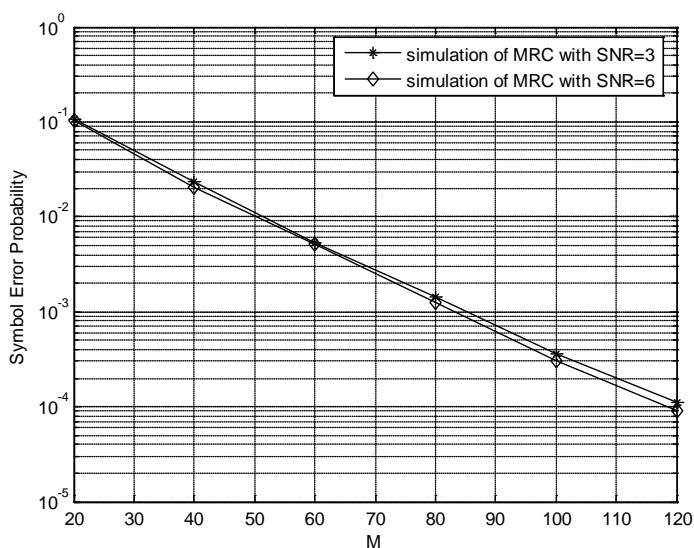


Figure 2. PEP of MRC decoding when SNR equals to 3, 6 dB respectively

图 2. SNR = 3, 6 dB MRC 解码方法 PEP

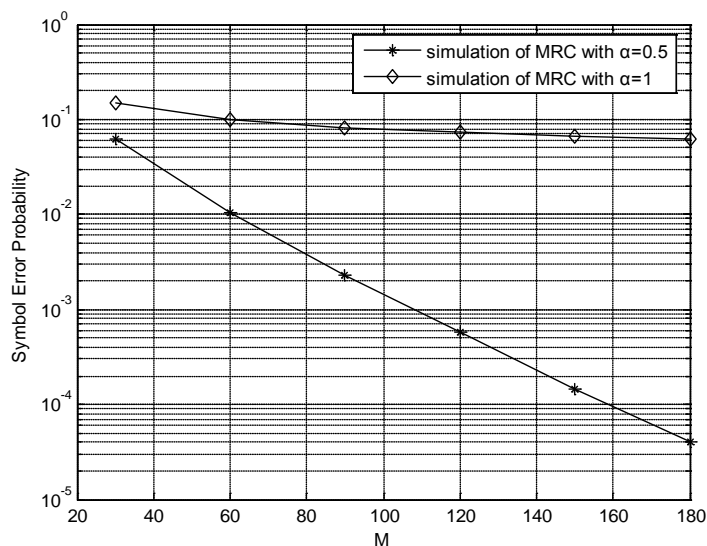


Figure 3. PEP of MRC decoding when α equals to 0.5, 1 respectively

图 3. $\alpha = 0.5, 1$ MRC 解码方法 PEP

5. 结束语

基于大规模天线蜂窝系统, 本文研究了对接收端采用 MRC 解码法的 PEP 性能并且分析了不同条件下 PEP 的渐近趋势, 结论显示出信噪比和基站天线数目的增加都有利于降低 PEP。MRC 解码方法的计算复杂度比 MMSE 和 ZF 都要低, 并且随着天线数目的增加, 其优势的体现更加明显。而大规模天线是未来移动通信发展的必然趋势, 因而 MRC 解码法将会得到更加广泛的应用。

致 谢

感谢国家自然科学基金资助项目(61372093)。

参考文献 (References)

- [1] 谢, 维斯瓦纳斯 (2009) 无线通信基础. 人民邮电出版社, 北京.
- [2] Kang, H.G., Park, J., An, T., et al. (2007) An ML decoding algorithm with reduced complexity for multi-input multi-output systems. *Signals, Systems and Electronics*, Montreal, Que, 30 July-2 August 2007, 339-342.
- [3] Weingarten, H., Steinberg, Y. and Shamai, S. (2006) The capacity region of the Gaussian multiple-input multiple-output broadcast channel. *IEEE Transactions on Information Theory*, **52**, 3936-3964.
- [4] Marzetta, T.L. (2010) Noncooperative cellular wireless with unlimited numbers of base station antennas. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, **9**, 3590-3600.
- [5] Rusek, F., Persson, D., Lau, B.K., et al. (2013) Scaling up MIMO: Opportunities and challenges with very large arrays. *Signal Processing Magazine, IEEE*, **30**, 40-60.
- [6] Bjornson, E., Kountouris, M. and Debbah, M. (2013) Massive MIMO and small cells: Improving energy efficiency by optimal soft-cell coordination. *Telecommunications*, Casablanca, 6-8 May 2013, 1-5.
- [7] Larsson, E.G., Edfors, O., Tufvesson, F., et al. (2014) Massive MIMO for next generation wireless systems. *Communications Magazine, IEEE*, **52**, 186-195.
- [8] 王海荣, 王玉辉, 黄永明, 等 (2013) 大规模 MIMO 多小区 TDD 系统中的导频污染减轻方法. *信号处理*, **2**, 171-180.
- [9] Ngo, H.Q., Larsson, E.G. and Marzetta, T.L. (2013) Energy and spectral efficiency of very large multiuser MIMO systems. *IEEE Transactions on Communications*, **61**, 1436-1449.
- [10] Yang, H. and Marzetta, T.L. (2013) Performance of conjugate and zero-forcing beamforming in large-scale antenna systems. *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, **31**, 172-179.
- [11] 李菊芳, 赵睿, 江彬, 等 (2014) 基于大规模天线的多用户 MISO 下行链路频谱效率分析. *通信学报*, **2**, 125-136.
- [12] Fehske, A., Fettweis, G., Malmudin, J., et al. (2011) The global footprint of mobile communications: The ecological and economic perspective. *Communications Magazine, IEEE*, **49**, 55-62.
- [13] Kim, N., Lee, Y. and Park, H. (2008) Performance analysis of MIMO system with linear MMSE receiver. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, **7**, 4474-4478.
- [14] Ngo, H.Q., Duong, T.Q. and Larsson, E.G. (2011) Uplink performance analysis of multicell MU-MIMO with zero-forcing receivers and perfect CSI. *Communication Technologies Workshop*, Stockholm, 19-21 October 2011, 40-45.
- [15] Wang, H.Q., Chen, R.M. and Shen, L. (2012) Performance analysis of ZF and MMSE receivers in uplink of MU-MIMO system. *Communications in China*, Beijing, 15-17 August 2012, 114-119.
- [16] Wu, M.W., Lin, X.Z. and Kam, P.Y. (2011) New exponential lower bounds on the gaussian Q-function via Jensen's inequality. *Vehicular Technology Conference*, Yokohama, 15-18 May 2011, 1-5.

附录

定理 1 的证明:

应用 Q 函数的下界和其 Chernoff 上界公式[16]得到

$$\frac{1}{4} \exp\left(-\frac{2}{\pi} x^2\right) \leq Q(x) \leq \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \quad (16)$$

故有

$$\begin{aligned} Q\left(\frac{d}{\sqrt{2}}\right) &\geq \frac{1}{4} \exp\left(-\frac{2}{\pi} \cdot \frac{d^2}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4} \exp\left(-\frac{\rho |\mathbf{h}_j|^4 |\Delta s|^2}{\pi \left(\rho \left(|\mathbf{h}_j^+ \mathbf{h}_1|^2 + \dots + |\mathbf{h}_j^+ \mathbf{h}_k|^2 + \dots + |\mathbf{h}_j^+ \mathbf{h}_K|^2\right) + |\mathbf{h}_j|^2\right)}\right) \end{aligned} \quad (17)$$

从而 PEP 下界可以表示为

$$P_e \geq \int_{\mathbf{h}_1 \cdots \mathbf{h}_K} \frac{1}{4\pi^{MK}} \exp\left(-\frac{\rho |\mathbf{h}_j|^4 |\Delta s|^2}{\pi \left(\rho \left(|\mathbf{h}_j^+ \mathbf{h}_1|^2 + \dots + |\mathbf{h}_j^+ \mathbf{h}_k|^2 + \dots + |\mathbf{h}_j^+ \mathbf{h}_K|^2\right) + |\mathbf{h}_j|^2\right)} - \left(|\mathbf{h}_1|^2 + \dots + |\mathbf{h}_K|^2\right)\right) d\mathbf{h}_1 \cdots d\mathbf{h}_K \quad (18)$$

所以

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} P_e \geq \int_{\mathbf{h}_1 \cdots \mathbf{h}_K} \frac{1}{4\pi^{MK}} \exp\left(-\frac{|\mathbf{h}_j|^4 |\Delta s|^2}{\pi \left(|\mathbf{h}_j^+ \mathbf{h}_1|^2 + \dots + |\mathbf{h}_j^+ \mathbf{h}_k|^2 + \dots + |\mathbf{h}_j^+ \mathbf{h}_K|^2\right)} - \left(|\mathbf{h}_1|^2 + \dots + |\mathbf{h}_K|^2\right)\right) d\mathbf{h}_1 \cdots d\mathbf{h}_K > 0 \quad (19)$$

这里大于 0 是因为被积函数是个正数, 在 \mathbf{H} 上积分必然大于 0。这样就得到了定理 1 中当信噪比趋于无穷大时 PEP 的渐近性能, 下面继续证明第二种情况。

由 Q 函数的 Chernoff 上界公式(16)得到

$$Q\left(\frac{d}{\sqrt{2}}\right) \leq \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{\rho |\mathbf{h}_j|^2 |\Delta s|^2}{4\rho \left(|\mathbf{h}_1|^2 \cos^2 \theta_{j1} + \dots + |\mathbf{h}_k|^2 \cos^2 \theta_{jk} + \dots + |\mathbf{h}_K|^2 \cos^2 \theta_{jK}\right) + 4}\right) \quad (20)$$

然后对 \mathbf{H} 求平均, 记为下式

$$\frac{1}{2} E_{\mathbf{H}} \left[\exp\left(-\frac{\rho |\mathbf{h}_j|^2 |\Delta s|^2}{4\rho \left(|\mathbf{h}_1|^2 \cos^2 \theta_{j1} + \dots + |\mathbf{h}_k|^2 \cos^2 \theta_{jk} + \dots + |\mathbf{h}_K|^2 \cos^2 \theta_{jK}\right) + 4}\right) \right] \quad (21)$$

因为 $|\mathbf{h}_j|^2 \sim \chi_{2M}^2\left(\frac{1}{2}\right)$, 且

$$f_{\chi^2}(x) = \frac{1}{\sigma^n 2^{n/2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{x}{2\sigma^2}\right) (x > 0),$$

所以得到

$$\begin{aligned}
E_{|h_j|^2} &= \int_0^\infty \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{\rho|\Delta s|^2 x}{4\rho(|\mathbf{h}_1|^2 \cos^2 \theta_{j1} + \dots + |\mathbf{h}_k|^2 \cos^2 \theta_{jk} + \dots + |\mathbf{h}_K|^2 \cos^2 \theta_{jK}) + 4}\right) \cdot f_z(x) dx \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{4\rho(|\mathbf{h}_1|^2 \cos^2 \theta_{j1} + \dots + |\mathbf{h}_k|^2 \cos^2 \theta_{jk} + \dots + |\mathbf{h}_K|^2 \cos^2 \theta_{jK}) + 4}{4\rho(|\mathbf{h}_1|^2 \cos^2 \theta_{j1} + \dots + |\mathbf{h}_k|^2 \cos^2 \theta_{jk} + \dots + |\mathbf{h}_K|^2 \cos^2 \theta_{jK}) + 4 + \rho|\Delta s|^2} \right)^M \\
&= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\rho|\Delta s|^2}{4\rho(|\mathbf{h}_1|^2 \cos^2 \theta_{j1} + \dots + |\mathbf{h}_k|^2 \cos^2 \theta_{jk} + \dots + |\mathbf{h}_K|^2 \cos^2 \theta_{jK}) + 4} \right)^{-M}
\end{aligned} \tag{22}$$

令 $\beta = |\mathbf{h}_1|^2 \cos^2 \theta_{j1} + \dots + |\mathbf{h}_k|^2 \cos^2 \theta_{jk} + \dots + |\mathbf{h}_K|^2 \cos^2 \theta_{jK}$ ，将 β 划分为两个区域： $D_A = \{\beta > A\}$ 和 $D_{\bar{A}} = \{\beta \leq A\}$ ，对 $\forall A > 0$ 。从而

$$\begin{aligned}
E_\beta \left(1 + \frac{\rho|\Delta s|^2}{4\rho\beta + 4} \right)^{-M} &= \int_{D_{\bar{A}}} \left(1 + \frac{\rho|\Delta s|^2}{4\rho\beta + 4} \right)^{-M} f(\beta) d\beta \cdot P\{\beta \leq A\} \\
&\quad + \int_{D_A} \left(1 + \frac{\rho|\Delta s|^2}{4\rho\beta + 4} \right)^{-M} f(\beta) d\beta \cdot P\{\beta > A\} \\
&\leq \int_{D_{\bar{A}}} \left(1 + \frac{\rho|\Delta s|^2}{4\rho A + 4} \right)^{-M} f(\beta) d\beta + P\{\beta > A\}
\end{aligned} \tag{23}$$

其中不等式是依据 $P\{\beta \leq A\} \leq 1$ ， $\left(1 + \frac{\rho|\Delta s|^2}{4\rho\beta + 4} \right)^{-M} < 1$ 。由 Markov-Chernoff 不等式得

$$P\{\beta > A\} \leq \frac{E(\beta)}{A} \xrightarrow{A \rightarrow \infty} 0, \text{ 而 } \lim_{M \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\rho|\Delta s|^2}{4\rho A + 4} \right)^{-M} = 0, \text{ 由此我们就得出了定理 1 第二部分的结论。}$$

定理 2 的证明:

依据 3.3 节给出的假设，用类似于定理 1 第二部分的证明过程得到

$$E_\gamma \left(1 + \frac{\rho/M^\alpha |\Delta s|^2}{4\rho\gamma + 4} \right)^{-M} \leq \int_{D_{\bar{\lambda}}} \left(1 + \frac{\rho/M^\alpha |\Delta s|^2}{4\rho\lambda + 4} \right)^{-M} f(\gamma) d\gamma + P\{\gamma > \lambda\} \tag{24}$$

这里

$$\gamma = \frac{|\mathbf{h}_1|^2 \cos^2 \theta_{j1} + \dots + |\mathbf{h}_k|^2 \cos^2 \theta_{jk} + \dots + |\mathbf{h}_K|^2 \cos^2 \theta_{jK}}{M^\alpha},$$

区域 $D_\lambda = \{\gamma > \lambda\}$ 和 $D_{\bar{\lambda}} = \{\gamma \leq \lambda\}$ 。

当 M 趋于无穷大时，上式被积函数应用洛必达法则得到

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\rho/M^\alpha |\Delta s|^2}{4\rho\lambda + 4} \right)^{-M} = \lim_{M \rightarrow \infty} \exp\left(-M \ln\left(1 + \frac{\rho/M^\alpha |\Delta s|^2}{4\rho\lambda + 4} \right)\right) = \lim_{M \rightarrow \infty} \exp\left(-\frac{a \cdot \alpha \cdot M}{a + bM^\alpha}\right) \tag{25}$$

其中 $a = \rho|\Delta s|^2$ ， $b = 4 + 4\rho\lambda$ 。从最后的等式可以看出，当 $0 < \alpha < 1$ 时为结果 0，即此时 $\lim_{M \rightarrow \infty} P_e = 0$ ；当 $\alpha = 1$ 并不等于 0。为了证明 $\lim_{M \rightarrow \infty} P_e > 0$ ，需利用 Q 函数的下界公式(16)，下面继续给出证明。

当 $\alpha = 1$ 时，由公式(16)并对 \mathbf{H} 求平均得到

$$E\left(Q\left(\frac{d}{\sqrt{2}}\right)\right) \geq \frac{1}{4} E_H \left(\exp \left(- \frac{\frac{\rho}{M} |\mathbf{h}_j|^4 |\Delta s|^2}{\pi \left(\frac{\rho}{M} (|\mathbf{h}_j^+ \mathbf{h}_1|^2 + \dots + |\mathbf{h}_j^+ \mathbf{h}_k|^2 + \dots + |\mathbf{h}_j^+ \mathbf{h}_K|^2) + |\mathbf{h}_j|^2 \right)} \right) \right) \quad (26)$$

类似地，可以得到

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow \infty} E_{|\mathbf{h}_j|^2} &= \frac{1}{4} \lim_{M \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\rho |\Delta s|^2}{\pi \rho (|\mathbf{h}_1|^2 \cos^2 \theta_{j1} + \dots + |\mathbf{h}_k|^2 \cos^2 \theta_{jk} + \dots + |\mathbf{h}_K|^2 \cos^2 \theta_{jK}) + \pi M} \right)^{-M} \\ &\geq \frac{1}{4} \lim_{M \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\rho |\Delta s|^2}{\pi M} \right)^{-M} = \frac{1}{4} \exp \left(- \frac{\rho |\Delta s|^2}{\pi} \right) \end{aligned} \quad (27)$$

这里得到第二个等式是利用洛必达法则，由此我们得到了想要的结论。