Hans Journal of Wireless Communications 无线通信, 2015, 5(4), 83-89
Published Online August 2015 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/hjwc
http://dx.doi.org/10.12677/hjwc.2015.54012

Hans汉斯

Discussion of Some Basic Problems on Sampling Theorem

Tongliang Fan, Yuewei Wang, Yuyuan Zhang

Electronic Technology Department, China Maritime Police Academy, Ningbo Zhejiang
Email: libufan432@163.com, fly915_wyw@163.com, 54297785@qq.com

Received: Jul. 27th, 2015; accepted: Aug. 17th, 2015; published: Aug. 21st, 2015

Abstract

Sampling theorem is the important and difficult knowledge point in the course of communication principle. Sampling theorem sets up a bridge between continuous-time signal and discrete-time signal. Sampling theory and theory of signal reconstruction are proved theoretically. The adaptability of sampling theory is thoroughly discussed. The experiment system on sampling and reconstruction on signal using experimental box is established. By setting different sampling frequency, the recovery of signal is obtained at different frequency. The sampling theorem is intuitively verified.

Keywords

Sampling Theory, Signal Reconstruction, Communication Principle

抽样定理的若干基本问题的讨论

樊同亮，王玥薇，张玉元

公安海警学院电子技术系，浙江 宁波
Email: libufan432@163.com, fly915_wyw@163.com, 54297785@qq.com

收稿日期：2015年7月27日；录用日期：2015年8月17日；发布日期：2015年8月21日

摘　要

抽样定理是《通信原理》课程中的重点和难点，抽样定理在连续时间信号与离散时间信号之间架起了一

文章引用: 樊同亮, 王玥薇, 张玉元. 抽样定理的若干基本问题的讨论[J]. 无线通信, 2015, 5(4): 83-89.
http://dx.doi.org/10.12677/hjwc.2015.54012

座桥梁。本文首先给出抽样定理及信号恢复理论的证明，得到了信号重建的条件，并对抽样定理的适应性进行详尽的阐述讨论。利用实验箱建立信号的采样与重建的实验系统，通过设置不同的采样频率，得到在不同频率的情况下信号的恢复波形，从而直观地验证了抽样定理。

关键词

抽样定理，信号重建，通信原理

1. 引言

抽样定理是《通信原理》课程的重要知识点[1]，在模拟信号的数字传输中讲解，国内外教材中均对其详细论述[2] [3]。但是对本科生来说，这个知识点不易理解透彻，更难获得正确应用。

抽样定理描述了在一定条件下，一个连续时间信号完全可以用该信号在等时间间隔上的瞬时样本值表示，这些样本值包含了该连续时间信号的全部信息，利用这些样本值可以恢复原连续时间信号。随着数字化技术的不断发展，抽样定理为连续信号离散化，进而数字化提供了理论基础，广泛地应用于通信、控制和信号处理等领域。如激光对潜通信结合了光纤通信与微波通信的优点，其原理是将语音信号调制到激光光波上，经介质(海水)传输到潜艇，再经潜艇接收端解调，还原成语音信号完成通信；利用带通抽样定理能够以较低的抽样频率解决高频信号的混频问题。

本文介绍了抽样定理及信号恢复理论，以及信号重建的条件，并分别按普通周期信号、单一频率的正弦信号和实际采样信号对抽样定理的适应性进行了详尽的阐述讨论。以具有实用性的 PAM 对抽样定理验证，并分析了抽样频率对信号恢复的影响。

2. 信号的抽样及其讨论

模拟信号通常是在时间上连续的信号。在一系列离散点上，对这种信号抽取样值称为抽样。理论上，抽样过程可以看作是用周期性单位冲激脉冲(impulse)和此模拟信号相乘，得到一系列周期性冲激脉冲。显然，抽样所取得离散冲激脉冲和原始连续模拟信号形状不一样。可以证明，对一个带宽有限的连续模拟信号进行抽样时，若抽样速率足够大，则这些抽样值就能完全代表原模拟信号，并且能够由这些取值准确恢复出原始模拟信号波形。因此，不一定要传输模拟信号本身，可以只传输这些离散抽样值，接收端就能恢复原模拟信号。抽样定理就是描述这一抽样速率条件的定理。

2.1. 低通型信号的抽样定理

由于数字信号处理具有方便、灵活等优点，使它在通信、控制和信号处理等领域应用广泛。为了要用处理离散信号的方法对连续时间信号进行处理，需要对连续时间信号进行抽样。

抽样定理指出：设一个连续模拟信号 $m(t)$中的最高频率小于 f_H，则以间隔时间为 $T \le 1/2f_H$ 的周期性冲激脉冲对它抽样时，$m(t)$将被这些抽样值完全确定。由于抽样时间间隔相等，所以此定理又称均匀抽样定理。

下面给出理论分析：

设有一个最高频率小于 f_H 的信号 $m(t)$，如图 1(a)所示。将这个信号和周期性单位冲激脉冲 $\delta_T(t)$(如图 1(c))相乘。其重复周期为 T，重复频率为 $f_s = 1/T$。乘积就是抽样信号，它是一系列间隔为 T 秒的强度不等的冲激脉冲，如图 1(e)。这些冲激脉冲的强度等于相应时刻上信号的抽样值。

现用 $m_s(t) = \sum m(kT)$ 表示此抽样信号序列，故有

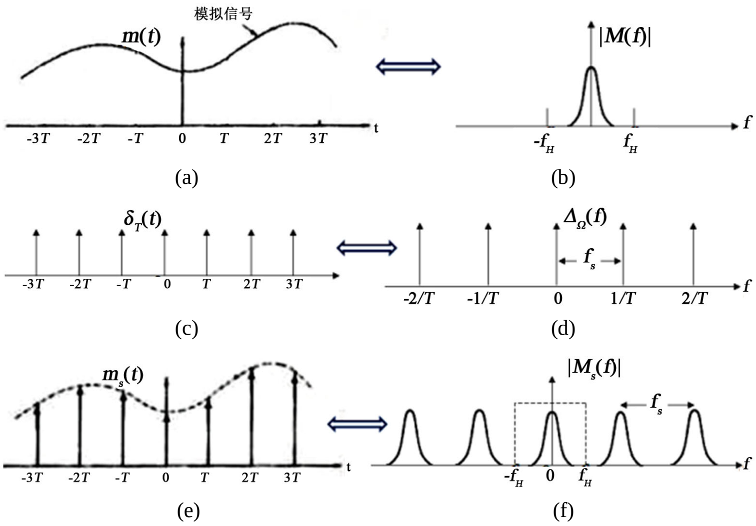

Figure 1. Sampling and recovery of analog low pass signal
图 1. 模拟低通信号的抽样和恢复

$$m_s(t) = m(t)\delta_T(t) \tag{1}$$

令 $M(f)$、$\Delta_\Omega(f)$、$M_s(f)$分别表示 $m(t)$、$\delta_T(t)$、$m_s(t)$的频谱，如图 1(b)、图 1(d)、图 1(f)所示。根据频域卷积定理，得抽样信号的频谱为：

$$M_s(f) = M(f) * \Delta_\Omega(f) \tag{2}$$

其中，周期性单位冲激脉冲$\delta_T(t)$的频谱$\Delta_\Omega(f)$：

$$\Delta_\Omega(f) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(f - nf_s) \tag{3}$$

则

$$M_s(f) = \frac{1}{T}\left[M(f) * \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(f - nf_s)\right] \tag{4}$$

利用冲激函数的取样性：

$$f(t) * \delta_T(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) * \delta_T(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = f(t) \tag{5}$$

计算(4)式得：

$$M_s(f) = \frac{1}{T}\left[M(f) * \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(f - nf_s)\right] = \frac{1}{T}\sum\nolimits_{n=-\infty}^{\infty} M(f - nf_s) \tag{6}$$

上式表明，由于 $M(f\text{-}nf_s)$是信号频谱 $M(f)$在频率轴上平移了 nf_s 的结果，图 1 给出了 $m(t)$、$\delta_T(t)$、$m_s(t)$及其频谱 $M(f)$、$\Delta_\Omega(f)$、$M_s(f)$的关系，由图 1 可知，当 $f_s \geq 2f_H$时，抽样信号 $m_s(t)$的频谱函数 $M_s(f)$是原信号 $m(t)$频谱 $M(f)$的周期性重复，每隔 f_s 重复出现一次。因此 $m_s(t)$中含有 $m(t)$的全部信息，可从 $m_s(t)$恢复原信号 $m(t)$。

若使均匀冲激抽样信号 $m_S(t)$通过一个系统函数为：

$$H_L(f) = \begin{cases} T_s & |f| \leq f_H \\ 0 & |f| > f_H \end{cases} \tag{7}$$

的理想低通滤波器，如图1(f)虚线所示，就能够从$M_s(f)$中用分离出信号$m(t)$的频谱$M(f)$：

$$M_s(f)H_L(f)=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}M(f-nf_s)H_L(f)=M(f) \tag{8}$$

也就是能从抽样信号中恢复原信号。即：

$$m(t)=m_s(t)*h_L(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}m(nT_s)\delta_T(t-nT_s)*2f_HT_sSa(2\pi f_Ht)=2f_HT_s\sum_{n=-\infty}^{+\infty}m(nT_s)\frac{\sin 2\pi f_H(t-nT_s)}{\sin 2\pi f_H(t-nT_s)} \tag{9}$$

其中，$h_L(t)=2f_HT_sSa(2\pi f_Ht)$是$H_L(f)$的傅里叶反变换。

2.2. 带通型信号的抽样定理

设一个频率带限信号$s(t)$其频带限制在(f_L，f_H)内，如图2所示，信号带宽$B=f_H-f_L$。

最高频率f_H可以表示为：

$$f_H=nB+kB\quad(0<k<1) \tag{10}$$

最低频率f_L可以表示为：

$$f_L=(n-1)B+kB\quad(0<k<1) \tag{11}$$

选取抽样频率f_s的原则是使抽样信号的各边带频谱不发生混叠，则

$$f_s=2B\left(1+\frac{k}{n}\right) \tag{12}$$

对于上式，如果$f_L=0$，就变为低通抽样定理，这时抽样频率就与低通抽样定理完全相同。随着f_L的增加，k取值缓慢增加，抽样频率也随着k在线性增加。只要k值不等于1，带宽一直增加，从式(12)可知带通抽样频率的范围为2B~4B。如果最低频率很高，那么对于常见的窄带信号，其抽样频率近似等于2B。

2.3. 信号抽样的其他问题

首先是周期信号，由于周期信号的频谱具有收敛性，所以实际的周期信号也可看作是带限信号。但因为其具备周期性，因此对其抽样的最低频率不能等于信号最高频率的两倍，而必须大于信号最高频率的两倍。

其次是单一频率的正弦信号，既不是低通信号也不是带通信号，其频谱只有两根谱线，抽样定理是否适用[4]？若适用，条件是什么？因为正弦信号的周期性及线谱特性，导致正弦信号的抽样具有不确定性，即以抽样频率f_s对某一频率的正弦信号抽样时，所得的离散信号对应的模拟信号并不唯一，所以抽样定理对正弦信号的适用性有一定的条件。

最后，实际信号的采样与理想信号的采样有一定的区别。理想的采样和理想的滤波器一样，在物理

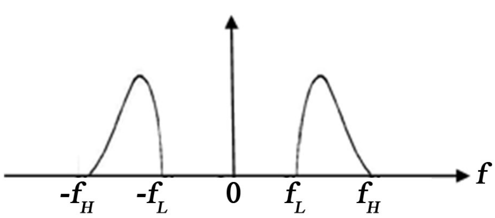

Figure 2. Band pass analog signal spectrum
图2. 带通模拟信号的频谱

上不可实现，利用改进的方法能够把理想的方法实用化。通过在频谱之间预留保留频带，能够使用实际的滤波器把相应的频谱过滤出来。

3. 抽样定理验证

实际抽样脉冲的宽度和高度都是有限的，这样抽样时抽样定理仍然正确[1]。从另一个角度来看，可以把周期性脉冲序列看作是非正弦载波，而抽样过程可以看作是用模拟信号对它进行振幅调制。这种调制称为脉冲振幅调制(PAM)。下面我们通过具有实用性的 PAM 来验证抽样定理。

3.1. 脉冲振幅调制(PAM)

设基带模拟信号的波形为 $m(t)$，其频谱为 $M(f)$；用这个信号对一个脉冲载波 $s(t)$调幅，$s(t)$的周期为 T，其频谱为 $S(f)$；脉冲宽度为 τ，幅度为 A；并设抽样信号 $m_s(t)$是 $m(t)$和 $s(t)$的乘积。则抽样信号 $m_s(t)$的频谱就是两者频谱的卷积：

$$M(f) = M(f) * S(f) = \frac{A\tau}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} Sa(\pi n\tau f_s) M(f - 2nf_H) \tag{13}$$

其中 $Sa(\pi n\tau f_s) = \sin(\pi n\tau f_s)/(\pi n\tau f_s)$。

在上述 PAM 调制中，得到的已调信号 $m_s(t)$的脉冲顶部和原模拟信号波形相同。这种 PAM 常称为自然抽样。在实际应用中，则常用“抽样保持电路”产生 PAM 信号。原理方框图如图 3 所示，图中模拟信号 $m(t)$和非常窄的周期性脉冲(近似冲激函数) $\delta_T(t)$相乘，得到乘积 $m_s(t)$，然后通过一个保持电路，将抽样电压保持一定时间，这样，保持电路输出脉冲波形保持平顶，我们称之为平顶抽样。

3.2. 抽样定理的验证

PAM 信号频谱是在理想抽样信号的基础上有一频率加权，引起频率失真，所以解调时除了用低通滤波器外，还加入一补偿网络。在保持被抽样信号和抽样时钟的频率不变的情况下，将被抽样信号经过平顶抽样处理输出，再经抗混叠滤波器进行恢复，最后加入一反 SINC 滤波作为进一步处理。

实验原理框图如图 4 所示。

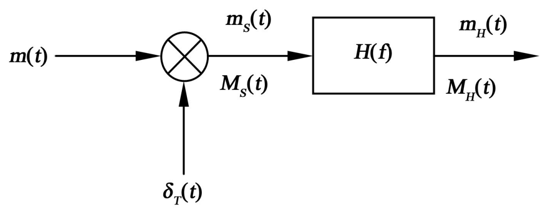

Figure 3. Sample hold circuit
图 3. 抽样保持电路

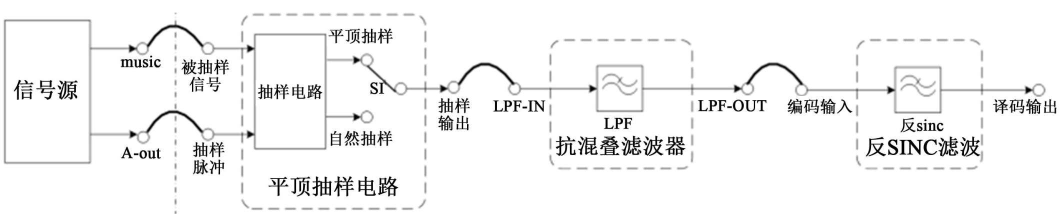

Figure 4. The block diagram of verification theory of PAM
图 4. PAM 验证抽样定理原理框图

图 5 中分别给出 2 KHz 正弦波输入信号。分别用 8 KHz、16 KHz 和 32 KHz 的矩形脉冲进行抽样，得到不同的抽样信号，波形如图 5 所示。其中上面三个是自然抽样实验结果，下面三个是平顶抽样的实验结果。

其中黄色表示原信号，蓝色表示抽样信号和恢复信号。可以看出，原信号与还原信号除相位以及大小不同外，信号波形与频率完全一致，可见能够顺利从抽样信号中恢复原信号。

3.3. 最低抽样频率探讨

一提到最低抽样频率，脱口而出是：最低抽样频率等于被抽样信号最高频率的两倍。实际上，这个最低抽样频率只适合于低通型、实的、非周期信号抽样的情况。其它情况下的抽样，其最低抽样频率则各不相同。下面分别给出输入 2 KHz 正弦波，用 4 K 矩形脉冲进行抽样，自然抽样和平顶抽样的实验结果，如图 6。

其中黄色表示原信号，蓝色表示抽样信号和恢复信号。对于最低抽样率等于信号带宽 2 倍情况，由图 6 可知，左图自然抽样能够恢复信号，右图平顶抽样，不能重建原始信号。

对于正弦特征信号，在工程技术领域有着广泛的应用。根据抽样定理，对低通信号只要保证抽样频率大于或等于最高频率的两倍，即可由抽样后的离散信号恢复原模拟信号；对于带通信号其抽样频率需要大于 2B。实验结果与上节讨论的适应性一致。

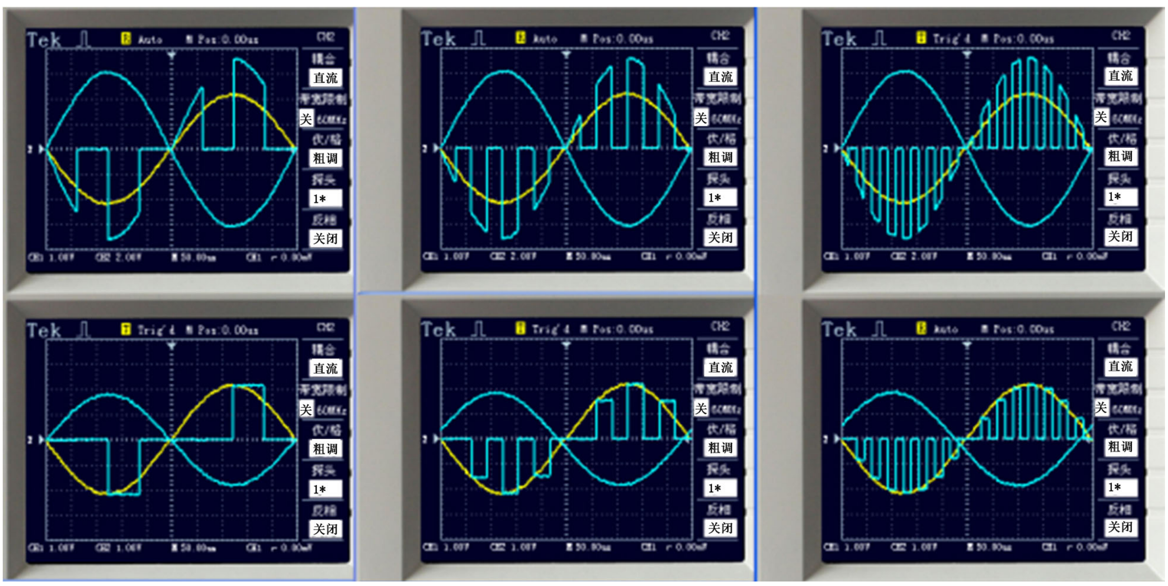

Figure 5. Curve of comparison between sampling signal of different frequency and restoring signal
图 5. 不同抽样频率信号抽样和恢复比较图

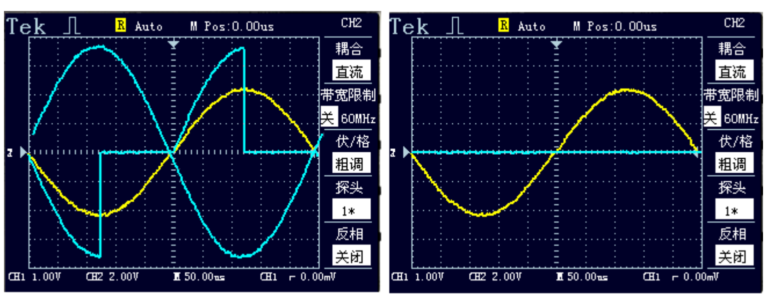

Figure 6. Curve of the minimum sampling frequency.
图 6. 最低抽样频率验证曲线图

4. 结论

抽样定理论述了在一定条件下，连续时间信号可以用该信号在等时间间隔上的样本值表示，样本值包含该连续信号的全部信息。它为连续信号离散化，进而数字化提供了理论基础，是连续时间信号与离散时间信号之间的桥梁。

本文充分阐述了抽样定理，分低通、带通以及单频正弦信号进行讨论。并利用仿真软件，对抽样定理进行验证。按照抽样定理中所要求的滤波器，需要在信号恢复时采用理想低通滤波器。但是理想低通滤波器是物理不可实现的，因此实际滤波器都不可能达到理想的滤波特性，从实验结果看抽样信号频率越高重建效果越好；严格说来只有最低抽样频率大于 $2f_H$ 时，才能保证信号的无失真恢复。

致　谢

本论文得到公安海警学院教改课题资助。

基金项目

浙江省教育厅科研项目(Y201431731)公安海警学院项目(2013XYPYZ012)。

参考文献 (References)

[1] 樊昌信，曹丽娜 (2006) 通信原理(第 6 版). 国防工业出版社，北京.

[2] 奥本海姆，著，刘树棠，译 (1998) 信号与系统(第二版). 西安交通大学出版社，西安.

[3] 郑君里，应启珩，杨为理 (2000) 信号与系统. 高等教育出版社，北京.

[4] 胡广书 (1997) 正弦信号抽样中若干基本问题的讨论. *清华大学学报*(*自然科学版*), **1**, 74-77.