International Journal of Fluid Dynamics 流体力学, 2013, 1, 1-9
http://dx.doi.org/10.12677/ijfd.2013.11001 Published Online March 2013 (http://www.hanspub.org/journal/ijfd.html)

A Reduced-Order CN Finite Element Extrapolating Algorithm Based on POD for Burgers Equation*

Hong Li[1], Chunxia Huang[1], Zhendong Luo[2]

[1]School of Mathematical Sciences, Inner Mongolia University, Huhhot
[2]School of Mathematics and Physics, North China Electric Power University, Beijing
Email: malhong@imu.edu.cn, 515776650@qq.com, zhdluo@ncepu.edu.cn

Received: Jan. 20th, 2013; revised: Jan. 29th, 2013; accepted: Feb. 20th, 2013

Abstract: A Crank-Nicolson (CN) finite element reduced-order extrapolating algorithm with second-order accuracy based on proper orthogonal decomposition (POD) technique is established for two-dimensional Burgers equation, its error estimates are provided for criterions of the CN finite element reduced-order extrapolating algorithm to choose the number of POD basis and to renew POD basis. Some numerical experiments are used to show that the advantage of the CN finite element reduced-order extrapolating algorithm. It is shown that the CN finite element reduced-order extrapolating algorithm based on POD technique is feasible and efficient for finding the numerical solutions for two-dimensional Burgers equation.

Keywords: Two-Dimensional Burgers Equation; Proper Orthogonal Decomposition Technique; Crank-Nicolson Finite Element Reduced-Order Extrapolating Algorithm; Error Estimate

Burgers 方程基于 POD 方法的降维 CN 有限元外推算法*

李 宏[1]，黄春霞[1]，罗振东[2]

[1]内蒙古大学数学科学学院，呼和浩特
[2]华北电力大学数理学院，北京
Email: malhong@imu.edu.cn, 515776650@qq.com, zhdluo@ncepu.edu.cn

收稿日期：2013 年 1 月 20 日；修回日期：2013 年 1 月 29 日；录用日期：2013 年 2 月 20 日

摘　要：建立二维 Burgers 方程基于特征投影分解(POD)方法的时间二阶精度的 Crank-Nicolson (CN)有限元降维外推算法，给出这种算法的误差估计，并用误差估计作为算法的 POD 基数目选取及 POD 更新的准则。最后用数值实验说明该算法的优越性，这表明了该算法对于求解二维 Burgers 方程的数值解是有效可行的。

关键词：二维 Burgers 方程；特征投影分解方法；Crank-Nicolson 有限元降维外推算法；误差估计

1. 引言

设 $\Omega\subset R^2$ 是有界的连通凸多边形区域。考虑流体动力学中的二维非定常 Burgers 方程。

$$\boldsymbol{u}_t-\mu\Delta\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}=\boldsymbol{f}\text{，}\quad \text{在 }\Omega\times(0,T)\text{ 中}\qquad(1.1)$$

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{\varphi}(x,y,t)\text{，}\qquad \text{在 }\partial\Omega\times(0,T)\text{ 上}\qquad(1.2)$$

$$\boldsymbol{u}(x,y,0)=\boldsymbol{\psi}(x,y)\text{，}\qquad \text{在 }\Omega\text{ 中}\qquad(1.3)$$

其中 $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2)^{\mathrm{T}}$ 是未知的流体速度向量，T 是总体时间，$\mu=1/\mathrm{Re}$，Re 是 Reynolds 数，$\boldsymbol{f}$ 是已知的源函数，$\boldsymbol{\varphi}(x,y,t)$ 和 $\boldsymbol{\psi}(x,y)$ 分别是已知的边值函数和初值函数。为了便于理论分析，不失一般性，不妨在下面的理论分析中假定 $\boldsymbol{\varphi}(x,y,t)$ 和 $\boldsymbol{\psi}(x,y)$ 均为零向量。

非定常 Burgers 方程是流体力学中一个非常重要

*资助信息：国家自然科学基金(批准号：11271127、11061021 和 11061009)、贵州省科技计划项目(批准号：黔科合 J 字[2011]2367)、内蒙古自然科学基金(批准号：2012MS0106)和内蒙古自治区高等学校研究项目(批准号：NJ10006)资助项目。

和基本的偏微分方程，它广泛地应用于空气动力学、湍流、热传导、交通流、地下水污染等众多领域[1-3]。非定常 Burgers 方程可以看作是非定常 Navier-Stokes 方程的简化模型，并且可以通过对非定常 Burgers 方程的数值模拟来研究非定常 Navier-Stokes 方程的性态，对它的深入研究有助于更好地求解其它非线性偏微分方程。

由于非定常 Burgers 方程是非线性方程组，特别是当源项或计算域不规则时，要求出该方程组的解析解是很困难的，有效的方法是求其数值解。经典的 Crank-Nicolson (CN)有限元方法是求解非定常 Burgers 方程的高精度数值方法，但是对实际工程问题，非定常 Burgers 方程经典的 CN 有限元方法包含有大量的自由度。因此，重要的问题是在保证有足够精度的数值解的情况下，如何简化计算、节省计算量和存储要求及减缓计算过程中截断误差的积累。

特征投影分解(POD)方法是一种能够大量减少自由度即降低模型维数的有效逼近方法。该方法已经广泛应用于统计和地球物理中的样本识别和主分量分析及流体力中的湍流分析[4-7]，但是直到最近几年，该方法才被与 Galerkin 方法结合起来用于对微分方程的数值解进行求解[8,9]。我们已经对赤道太平洋模式、非定常的 Navier-Stokes 方程、Burgers 方程和抛物型方程及热传导对流方程等方程提出了一些基于 POD 方法的降维有限差分格式和有限元格式及有限体积元格式[10-29]，但是对于非定常的 Burger 方程降维有限元格式只给出时间一阶精度降维格式[20]。特别是现有的降维方法[8-29]都是相当于用基于 POD 方法的降维方法去验证同样时间段的解，没有采用外推算法，相当于相同时段上做重复计算。

据我们所知，到目前为止，还没有关于用 POD 方法对二维非定常的 Burger 方程的经典的 CN 有限元方法做降维处理的报道。因此，本文用 POD 方法对二维非定常 Burgers 方程的经典的 CN 有限元方法做降维处理，给出一种时间二阶精度的 CN 有限元降维外推算法，并给出这种时间二阶精度的 CN 有限元降维外推算法的误差估计和外推算法的实现，最后用数值实验说明数值结果与理论结果是相吻合的。本文与现有的文献[8-29]的区别在于：这里只用经典时间二阶精度的 CN 有限元方法求出最初很少时间步的数值解作为样本点(对于实际工程问题，也可以通过实际物理问题抽取样本点)，再用 POD 方法求出 POD 基，用最主要的几个 POD 基张成的子空间代替 Burgers 方程经典的 CN 有限元格式的有限元空间，得到一个只含有很少几个未知量的 CN 有限元降维外推算法，然后通过外推和 POD 基更新求出所有需求的数值解。这就充分发挥了 POD 方法的重要作用，即用已有的数据资料对未来物理现象做预报预测。因此，本文的工作是对现有降维方法[8-29]的改进和创新。

本文安排如下：第 2 节给出二维非定常 Burgers 方程的经典全 CN 有限元方法及瞬像的生成；第 3 节通过 POD 方法求出 POD 基，并建立 CN 有限元降维外推算法；第 4 节给出误差分析和 CN 有限元降维外推算法的实现；第 5 节用数值实验去验证理论结果的正确性；第 6 节是结论和讨论。

2. 经典全 CN 有限元方法及瞬像的生成

2.1. 关于时间半离散化格式

本文用到的 Sobolev 空间[30]都是标准的。设 $U = H_0^1(\Omega)^2$，则 Burgers 方程的变分形式为：

问题 I 求 $\boldsymbol{u} \in U$ 使得对于任意 $t \in [0,T]$ 满足

$$(\boldsymbol{u}_t, \boldsymbol{v}) + \mu(\nabla \boldsymbol{u}, \nabla \boldsymbol{v}) + ((\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}), \forall \boldsymbol{v} \in U \quad (2.1)$$

$$\boldsymbol{u}(x, y, 0) = \boldsymbol{0}，\quad 在\ \Omega\ 中 \quad (2.2)$$

其中 $(\cdot,\cdot)$ 为 $L^2(\Omega)^2$ 中的内积。

注意到 $((\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v})$ 有下面的性质[3-31]：

$$((\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}) = -((\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}), \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in U \quad (2.3)$$

$$((\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = 0, \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in U \quad (2.4)$$

设

$$N = \sup_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in U} \frac{((\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})}{\|\nabla \boldsymbol{u}\|_0 \|\nabla \boldsymbol{v}\|_0 \|\nabla \boldsymbol{w}\|_0} \quad (2.5)$$

则当 $\boldsymbol{f} \in H^{-1}(\Omega)^2$ 时，问题 I 至少有一个解，而且当 $2N\mu^{-1}\|\nabla \boldsymbol{u}\|_0 \le 1$ 时，问题 I 的解是唯一的[20]。

设 N 为正整数，时间步长为 $k = T/N, t_n = nk$，$\boldsymbol{u}^n$ 为 $\boldsymbol{u}$ 在 $t_n\ (n = 0,1,\cdots,N)$ 点关于时间的半离散化逼近。则问题 I 关于时间 t 的半离散化 CN 格式为

问题 II 求 $\boldsymbol{u}^n \in U\ (n = 1,2,\cdots,N)$ 满足

$$
\begin{aligned}
&4\left(\boldsymbol{u}^{n},\boldsymbol{v}\right)+k\left(\left(\left(\boldsymbol{u}^{n}+\boldsymbol{u}^{n-1}\right)\cdot\nabla\right)\left(\boldsymbol{u}^{n}+\boldsymbol{u}^{n-1}\right),\boldsymbol{v}\right)\\
&\quad+2\mu k\left(\nabla\boldsymbol{u}^{n},\nabla\boldsymbol{v}\right)=4k\left(\boldsymbol{f}^{n-1/2},\boldsymbol{v}\right)\\
&\quad+4\left(\boldsymbol{u}^{n-1},\boldsymbol{v}\right)-2\mu k\left(\nabla\boldsymbol{u}^{n-1},\nabla\boldsymbol{v}\right),\forall\boldsymbol{v}\in U
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

$$\boldsymbol{u}^{0}=\boldsymbol{0},\qquad \text{在}\,\Omega\,\text{中} \tag{2.7}$$

其中 $\boldsymbol{f}^{n-1/2}=\boldsymbol{f}\left(t_{n-1/2}\right)$。

利用[20]中类似的方法可以证明问题 II 存在唯一的解 $\boldsymbol{u}^{n}\in U\left(n=1,2,\cdots,N\right)$ 满足

$$\left\|\boldsymbol{u}^{n}\right\|_{0}^{2}+k\sum_{i=1}^{n}\left\|\nabla\left(\boldsymbol{u}^{i}+\boldsymbol{u}^{i-1}\right)\right\|_{0}^{2}\le Ck\sum_{i=1}^{n}\left\|\boldsymbol{f}^{i-1/2}\right\|_{0}^{2} \tag{2.8}$$

而且当问题 I 的解 $\boldsymbol{u}\in H^{m+1}\left(\Omega\right)^{2}$ 时，有下面的误差估计

$$\left\|\boldsymbol{u}\left(t_{n}\right)-\boldsymbol{u}^{n}\right\|_{0}+k^{1/2}\left\|\nabla\left(\boldsymbol{u}\left(t_{n}\right)-\boldsymbol{u}^{n}\right)\right\|_{0}\le Ck^{2} \tag{2.9}$$

其中 C 是与 k 无关的常数。

2.2. 全离散化 CN 有限元格式

设 $\Im_{h}$ 为 $\bar{\Omega}$ 的拟一致三角形剖分[3,31,32](其中 h 是剖分的最大直径)，有限元空间取为

$$U_{h}=\left\{\boldsymbol{v}_{h}\in C^{0}\left(\bar{\Omega}\right)^{2}\cap U;\boldsymbol{v}_{h}\big|_{K}\in P_{m}\left(K\right)^{2},\forall K\in\Im_{h}\right\}$$

其中 $P_{m}\left(K\right)$ 是 K 上次数不超过 $m\left(m>0\right)$ 的多项式空间。则问题 II 的全离散化 CN 有限元格式为：

问题 III 求 $\boldsymbol{u}_{h}^{n}\in U_{h}\left(n=1,2,\cdots,N\right)$ 满足

$$
\begin{aligned}
&4\left(\boldsymbol{u}_{h}^{n},\boldsymbol{v}_{h}\right)+2\mu k\left(\nabla\boldsymbol{u}_{h}^{n},\nabla\boldsymbol{v}_{h}\right)+k\left(\left(\boldsymbol{u}_{h}^{n}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{u}_{h}^{n},\boldsymbol{v}_{h}\right)\\
&+k\left(\left(\boldsymbol{u}_{h}^{n}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{u}_{h}^{n-1},\boldsymbol{v}_{h}\right)+k\left(\left(\boldsymbol{u}_{h}^{n-1}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{u}_{h}^{n},\boldsymbol{v}_{h}\right)\\
&=4k\left(\boldsymbol{f}^{n-1/2},\boldsymbol{v}_{h}\right)-k\left(\left(\boldsymbol{u}_{h}^{n-1}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{u}_{h}^{n-1},\boldsymbol{v}_{h}\right)\\
&+4\left(\boldsymbol{u}_{h}^{n-1},\boldsymbol{v}_{h}\right)-2\mu k\left(\nabla\boldsymbol{u}_{h}^{n-1},\nabla\boldsymbol{v}_{h}\right),\forall\boldsymbol{v}_{h}\in U_{h}
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

$$\boldsymbol{u}_{h}^{0}=\boldsymbol{0},\qquad \text{在}\,\Omega\,\text{中} \tag{2.9}$$

当 $2N\mu^{-1}\left\|\nabla\boldsymbol{u}_{h}\right\|_{0}\le 1$ 时，利用类似于[20]的方法不难证明问题 III 存在唯一的解满足

$$\left\|\boldsymbol{u}_{h}^{n}\right\|_{0}^{2}+k\sum_{i=1}^{n}\left\|\nabla\left(\boldsymbol{u}_{h}^{i}+\boldsymbol{u}_{h}^{i-1}\right)\right\|_{0}^{2}\le Ck\sum_{i=1}^{n}\left\|\boldsymbol{f}^{i-1/2}\right\|_{0}^{2} \tag{2.10}$$

而且当问题 I 的解 $\boldsymbol{u}\in H^{m+1}\left(\Omega\right)^{2}$ 时，有下面的误差估计

$$\left\|\boldsymbol{u}\left(t_{n}\right)-\boldsymbol{u}_{h}^{n}\right\|_{0}+k^{1/2}\left\|\nabla\left(\boldsymbol{u}\left(t_{n}\right)-\boldsymbol{u}_{h}^{n}\right)\right\|_{0}\le C\left(k^{2}+h^{m+1}\right) \tag{2.11}$$

这里和下面用到的 C 均是与 h 和 k 无关的常数，不同处出现可以不等。

这样只要给定雷诺数 Re、初边值条件和源项、时间步长和空间及有限元空间，通过解问题 III 就可以得到全离散化 CN 有限元解 $\boldsymbol{u}_{h}^{n}\left(n=1,2,\cdots,N\right)$。取最初的 L 个时刻的解 $\boldsymbol{u}_{h}^{n}\left(n=1,2,\cdots,L\ll N\right)$ 作为样本解，在 POD 方法中称为瞬像(Snapshots)。

3. POD 基的构造和降阶外推迭代 CN 格式

对第 2 节中抽取的瞬像 $\boldsymbol{u}_{h}^{n}\left(n=1,2,\cdots,L\right)$，记 $\boldsymbol{W}_{n}=\boldsymbol{u}_{h}^{n}\left(n=1,2,\cdots,L\right)$ 及 $V=\operatorname{span}\left\{\boldsymbol{W}_{1},\boldsymbol{W}_{2},\cdots,\boldsymbol{W}_{L}\right\}$ 如果 $l=\dim\left(V\right)$ (即 V 的维数)，设 $\left\{\boldsymbol{\psi}_{j}\right\}_{j=1}^{l}$ 是 V 的标准正交基向量函数，则有

$$\boldsymbol{W}_{i}=\sum_{j=1}^{l}\left(\nabla\boldsymbol{W}_{i},\nabla\boldsymbol{\psi}_{j}\right)\boldsymbol{\psi}_{j},i=1,2,\cdots,L \tag{3.1}$$

定义 1 POD 方法在于求标准正交基 $\boldsymbol{\psi}_{j}\left(j=1,2,\cdots,l\right.$ 使得对于每个 $d\left(1\le d\le l\right)$，元素 $\boldsymbol{W}_{n}\left(n=1,2,\cdots,L\right)$ 与(3.1)的 d 项和之间的均方误差在平均意义下最小，即求标准正交基 $\psi_{j}\left(j=1,2,\cdots,l\right)$ 使得

$$\min_{\left\{\psi_{j}\right\}_{j=1}^{l}}\frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L}\left\|\nabla\left(\boldsymbol{W}_{i}-\sum_{j=1}^{d}\left(\nabla\boldsymbol{W}_{i},\nabla\boldsymbol{\psi}_{j}\right)\boldsymbol{\psi}_{j}\right)\right\|_{0}^{2} \tag{3.2}$$

满足

$$\left(\nabla\boldsymbol{\psi}_{i},\nabla\boldsymbol{\psi}_{j}\right)=\delta_{ij},1\le i,j\le d \tag{3.3}$$

问题(3.2)和(3.3)的解 $\left\{\boldsymbol{\psi}_{j}\right\}_{j=1}^{d}$ 称为秩等于 d 的 POD 基。

记相关矩阵 $\boldsymbol{A}=\left(\nabla\boldsymbol{W}_{i},\nabla\boldsymbol{W}_{j}\right)_{L\times L}$，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是秩等于 l 的对称非负定矩阵，它存在正特征值被排列为 $\lambda_{1}\ge\lambda_{2}\ge\cdots\ge\lambda_{l}>0$，以及对应的标准正交特征向量 $\boldsymbol{w}_{i}=\left(a_{1}^{i},a_{2}^{i},\cdots,a_{L}^{i}\right)^{\mathrm{T}}\left(i=1,2,\cdots,l\right)$。可以证明求 POD 基的问题可以转化为求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量问题，而且 POD 基的构造及相关性质有下面的主要结论[15-23]。

命题 1 设 $\lambda_{1}\ge\lambda_{2}\ge\cdots\ge\lambda_{l}>0$ 是矩阵 A 非零特征值，$\boldsymbol{w}_{i}=\left(a_{1}^{i},a_{2}^{i},\cdots,a_{L}^{i}\right)^{\mathrm{T}}\left(i=1,2,\cdots,l\right)$ 是相应标准正交特征向量，则秩为 d 的标准正交 POD 基表示如下

$$\boldsymbol{\psi}_{j}=\frac{1}{\sqrt{L\lambda_{j}}}\sum_{i=1}^{L}a_{i}^{j}\boldsymbol{u}_{h}^{i},j=1,2,\cdots,d \tag{3.4}$$

而且有下面的误差公式

$$\frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L}\left\|\nabla\left(\boldsymbol{W}_{i}-\sum_{j=1}^{d}\left(\nabla\boldsymbol{W}_{i},\nabla\boldsymbol{\psi}_{j}\right)\boldsymbol{\psi}_{j}\right)\right\|_{0}^{2}=\sum_{j=d+1}^{l}\lambda_{j} \tag{3.5}$$

记$U^d = \mathrm{span}\{\boldsymbol{\psi}_1,\boldsymbol{\psi}_2,\cdots,\boldsymbol{\psi}_d\}$。对于每个$\boldsymbol{u}_h \in U_h$，定义一个 Ritz 投影$P^d : U_h \to U^d$，即对于$\boldsymbol{u}_h \in U_h$满足

$$\left(\nabla P^d \boldsymbol{u}_h, \nabla \boldsymbol{v}_d\right) = \left(\nabla \boldsymbol{u}_h, \nabla \boldsymbol{v}_d\right), \forall \boldsymbol{v}_d \in U^d \quad (3.6)$$

那么由泛函分析理论[33]知，存在P^d的一个延拓$P^h : U \to U_h$使得$P^h\big|_{U_h} = P^d : U_h \to U_d$满足

$$\left(\nabla P^h \boldsymbol{u}, \nabla \boldsymbol{v}_h\right) = \left(\nabla \boldsymbol{u}, \nabla \boldsymbol{v}_h\right), \forall \boldsymbol{v}_h \in U_h \quad (3.7)$$

其中$\boldsymbol{u} \in U$。由(3.7)可推导出投影P^h是有界的：

$$\left\|\nabla P^h \boldsymbol{u}\right\|_0 \le \left\|\nabla \boldsymbol{u}\right\|_0, \forall \boldsymbol{u} \in U \quad (3.8)$$

而且有下面不等式成立[15-23]

$$\left\|\boldsymbol{u} - P^h \boldsymbol{u}\right\|_0 \le Ch\left\|\nabla\left(\boldsymbol{u} - P^h \boldsymbol{u}\right)\right\|_0 \quad (3.9)$$

此外，还有下面结果成立[20,3,31,32]。

引理 2 对于每个$d\left(1 \le d \le l\right)$，投影算子$P^d$满足[20]

$$\frac{1}{L}\sum_{i=1}^{L}\left\|\nabla\left(\boldsymbol{u}_h^i - P^d \boldsymbol{u}_h^i\right)\right\|_0^2 \le \sum_{j=d+1}^{l}\lambda_j \quad (3.10)$$

其中$\boldsymbol{u}_h^i \in U_h\left(i = 1,2,\cdots,L\right)$是问题 III 的解。而且当$\boldsymbol{u} \in U \cap H^{m+1}(\Omega)^2$时，有下面结论[3,31,32]

$$\left\|\boldsymbol{u} - P^h \boldsymbol{u}\right\|_0 + h\left\|\nabla\left(\boldsymbol{u} - P^h \boldsymbol{u}\right)\right\|_0 \le Ch^{m+1}|u|_{m+1} \quad (3.11)$$

这样，利用U^d可以得到问题 II 基于 POD 方法的 CN 有限元降阶外推算法：

问题 IV 求$\boldsymbol{u}_d^n \in U^d\left(n = 1,2,\cdots,N\right)$满足

$$\boldsymbol{u}_d^n = \sum_{j=1}^{d}\left(\nabla \boldsymbol{u}_h^n, \nabla \boldsymbol{\psi}_j\right)\boldsymbol{\psi}_j, n = 1,2,\cdots,L \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned}
&4\left(\boldsymbol{u}_d^n, \boldsymbol{v}_d\right) + 2\mu k\left(\nabla \boldsymbol{u}_d^n, \nabla \boldsymbol{v}_d\right) + k\left(\left(\boldsymbol{u}_d^n \cdot \nabla\right)\boldsymbol{u}_d^n, \boldsymbol{v}_d\right)\\
&+k\left(\left(\boldsymbol{u}_d^n \cdot \nabla\right)\boldsymbol{u}_d^{n-1}, \boldsymbol{v}_d\right) + k\left(\left(\boldsymbol{u}_d^{n-1} \cdot \nabla\right)\boldsymbol{u}_d^n, \boldsymbol{v}_d\right)\\
&= 4k\left(\boldsymbol{f}^{n-1/2}, \boldsymbol{v}_d\right) - k\left(\left(\boldsymbol{u}_d^{n-1} \cdot \nabla\right)\boldsymbol{u}_d^{n-1}, \boldsymbol{v}_d\right) \qquad (3.13)\\
&+4\left(\boldsymbol{u}_d^{n-1}, \boldsymbol{v}_d\right) - 2\mu k\left(\nabla \boldsymbol{u}_d^{n-1}, \nabla \boldsymbol{v}_d\right),\\
&\forall \boldsymbol{v}_d \in U^d, n = L+1,\cdots,N
\end{aligned}$$

附注 1 当$\mathfrak{I}_h$是三角形剖分，而且U_h是分片线性多项式空间时，问题 III 的总体自由度(即未知量总数)为$2N_h$(其中N_h为$\mathfrak{I}_h$中三角形顶点数目[3,31,32])，如果U_h采用更高次数分片多项式空间，自由度更多；而问题 IV 的自由度为$2d\left(d \ll N\right)$。对于实际科学工程问题，$\mathfrak{I}_h$中三角形定点数目是数以万计的，甚至上亿的。而d只是从N个瞬时解中取出很少的$L\left(L \ll N\right)$个瞬像所对应的一些较大特征值个数是很小的(例如，在第 5 节中，$d = 5$，而$N_h = 10^4$)。因此，问题 IV 是问题 II 基于 POD 方法的一个 CN 有限元降阶降维外推算法。特别是，问题 IV 不像现有的其他降维格式[8-29]做重复的计算，而是将已经求出的很短时段的经典 CN 有限元解投影到 POD 基，然后通过外推迭代去求其他时段的 CN 有限元降维解。这就是该方法被称为 POD 降维 CN 有限元外推算法的原因。这也是该方法与现有的其他降维方法(例如，文献[8,9])的主要区别，是对现有降维方法[8-29]的改进和创新。

4. CN 有限元降阶外推算法稳定性和收敛性及算法实现

4.1. CN 有限元降维外推算法稳定性和收敛性

借助于经典有限元法的理论可以证明 CN 有限元降维外推算法问题 IV 的稳定性和收敛性。主要有下面的结论(详细证明见附录)。

定理 3 当$\boldsymbol{f} \in H^{-1}(\Omega)^2$时，问题 IV 存在唯一的解$\boldsymbol{u}_d^n \in U^d\left(n = 1,2,\cdots,N\right)$满足

$$\left\|\boldsymbol{u}_d^n\right\|_0^2 + k\sum_{i=1}^{n}\left\|\nabla\left(\boldsymbol{u}_d^i + \boldsymbol{u}_d^{i-1}\right)\right\|_0^2 \le Ck\sum_{i=1}^{n}\left\|\boldsymbol{f}^{i-1/2}\right\|_0^2 \quad (4.1)$$

而且，当$k = O(h)$和$L^2 = O(N)$时，有下面的误差估计

$$\begin{aligned}
&\left\|\boldsymbol{u}_h^n - \boldsymbol{u}_d^n\right\|_0 + k^{1/2}\left\|\nabla\left(\boldsymbol{u}_h^n - \boldsymbol{u}_d^n\right)\right\|_0\\
&\le CM(n)\left(k^2 + h^{m+1}\right) + C\left(k^{1/2}\sum_{j=d+1}^{l}\lambda_j\right)^{1/2}
\end{aligned} \quad (4.2)$$

其中$\boldsymbol{u}_h^i \in U_h\left(i = 1,2,\cdots,N\right)$是问题 III 的解，$M(n) = 0\left(1 \le n \le L\right)$，而$M(n) = \sqrt{h(n-L)^3}\left(L+1 \le n \le N\right)$。

结合定理 3 和(2.11)得到下面的结论。

定理 4 在定理 3 的条件下，当问题 II 的解$\boldsymbol{u} \in H^{m+1}(\Omega)^2$，问题 IV 的解$\boldsymbol{u}_d^n \in U^d\left(n = 1,2,\cdots,N\right)$有下面的误差估计

$$\begin{aligned}
&\left\|\boldsymbol{u}(t_n) - \boldsymbol{u}_d^n\right\|_0 + k^{1/2}\left\|\nabla\left(\boldsymbol{u}(t_n) - \boldsymbol{u}_d^n\right)\right\|_0\\
&\le C\left(k^{1/2}\sum_{j=d+1}^{l}\lambda_j\right)^{1/2} + C\left[M(n)+1\right]\left(k^2 + h^{m+1}\right)
\end{aligned} \quad (4.3)$$

其中 $M(n)=0(n=1,2,\cdots,L)$，而 $M(n)=\sqrt{h(n-L)^3}$ $(n=L+1,L+2,\cdots,N)$。

附注 2 定理 3 的(4.1)表明问题 IV 的解是稳定的。定理 3 和 4 的误差估计给出了选取 POD 基数目的指导，即只要选取 POD 基数目 d 使得 $k^{1/2}\sum_{j=d+1}^{l}\lambda_j \le k^4+h^{2m+2}$ 即可。定理 3 和 4 的误差估计中的 $(k^2+h^{m+1})\sqrt{h(n-L)^3}$ 是由外推迭代产生的误差，它们可以作为外推迭代过程中 POD 更新的指南，即当 $\sqrt{h(n-L)^3}>1$ 或 C (C 是某个大于 1 小于 10 的定数，$n=L+1,L+2,\cdots,N$)时，需要考虑更新 POD 基。

4.2. CN 有限元降阶外推算法的实现

求解 CN 降阶外推有限元格式问题 IV 可按下面的步骤实现。

步 1 对所需要的计算精度 δ，确定最初用经典 CN 有限元格式问题 III 的时间步长 k 和空间网格尺寸 h 及插值次数 m 使得 $(k^2+h^{m+1})\le\delta$，用问题 III 求出最初的 L 步的经典 CN 有限元解 $\boldsymbol{u}_h^n\in U_h\left(n=1,2,\cdots,L=O\left(\sqrt{N}\right)\right)$，通常取 $L=20$ 即可)；

步 2 组成相关矩阵 $\boldsymbol{A}=\left(\nabla\boldsymbol{W}_i,\nabla\boldsymbol{W}_j\right)_{L\times L}$ (其中 $\boldsymbol{W}_i=\boldsymbol{u}_h^i$)，解特征值问题 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{w}=\lambda\boldsymbol{w}$ 求出正特征值，并排列为 $\lambda_1\ge\lambda_2\ge\cdots\ge\lambda_l>0$，对应的标准正交特征向量为 $\boldsymbol{w}_i=\left(a_1^i,a_2^i,\cdots,a_L^i\right)^{\mathrm{T}}(i=1,2,\cdots,l)$；

步 3 确定 POD 基的数目 d 使得 $k^{1/2}\sum_{j=d+1}^{l}\lambda_j\le\delta^2$，并求出 POD 基

$$\boldsymbol{\psi}_j=\frac{1}{\sqrt{L\lambda_j}}\sum_{i=1}^{L}a_i^j\boldsymbol{u}_h^i,\ j=1,2,\cdots,d$$

步 4 令 $U^d=\mathrm{span}\left\{\boldsymbol{\psi}_j;j=1,2,\cdots,d\right\}$，解基于 POD 方法的 CN 有限元降阶外推算法问题 IV 求出 $\boldsymbol{u}_d^n\in U^d$ $(n=1,2,\cdots,N)$。

步 5 如果 $\sqrt{h(n-L)^3}\le1$ (或 C 是某个大于 1 小于 10 的定数时，$n=L+1,L+2,\cdots,N$)，则 $\boldsymbol{u}_d^n\in U^d$ $(n=1,2,\cdots,N)$ 就是满足精度要求的数值解。否则，即如果 $\sqrt{h(n-L)^3}>1$ (或 C 是某个大于 1 小于 10 的定数时，$n=L+1,L+2,\cdots,N$)需要更新 POD 基，这时令 $\boldsymbol{W}_i=\boldsymbol{u}_h^{n-i}(i=1,2,\cdots,L)$，重复步 2 至步 4。

5. 数值实验

下面给出 Burgers 经典 CN 有限元解和基于 POD 方法的 CN 有限元降阶外推算法解的数值实验，说明基于 POD 方法的 CN 有限元降阶外推算法的优越性。

计算域取为 $\bar{\Omega}=[0,1]\times[0,1]$，源函数 $f=0$，$\mathrm{Re}=1000, T=4$，初始函数和边值函数取为相等，即 $\boldsymbol{\varphi}(x,y,t)=\boldsymbol{\psi}(x,y)=(\sin\pi x\cos\pi y,\cos\pi x\sin\pi y)$。

将计算域 $\bar{\Omega}=[0,1]\times[0,1]$ 剖分为 100×100 个边长 $\Delta x=\Delta y=0.01$ 小正方形，然后在同一方向连结其对角线将每个小正方形剖分成为两个小三角形构成 $h=\sqrt{2}\times0.01$ 的三角形剖分 $\Im_h$，节点数目 $N_h=10^4$。时间步长 $k=0.01$。为了使得 CN 有限元解的误差为最优阶，有限元空间取为分片一次插值。

利用经典 CN 有限元格式问题 III 算出 $t=4$ 时的解画在图 1 中。

首先用经典 CN 有限元格式最初 20 时间步求出的经典有限元解 $\boldsymbol{u}_h^n(n=1,2,\cdots,L=20)$ 作为瞬像，取精度为 $\delta=k^2=10^{-4}$。按照 4.2 节的 5 个步骤求 POD 基，经计算得到

$$\left(k^{1/2}\sum_{j=6}^{20}\lambda_j\right)^{1/2}\le2\times10^{-4}$$

这样只需取最初的 5 个 POD 基张成子空间 U^5。在求 $t=4$ 的 CN 有限元降维外推解过程中，当 $t=2$ 时更新了一次 POD 基，最后算出的 $t=4$ 时的降维解画在图 2 中。

比较图 1 和图 2 可看出，它们很相像。但是经典 CN 有限元格式在每个时间层有 20,000 个自由度，而基于 POD 方法的 CN 有限元降维外推算法在每个 $(n>L)$ 时间层仅有 10 个自由度，即经典 CN 有限元

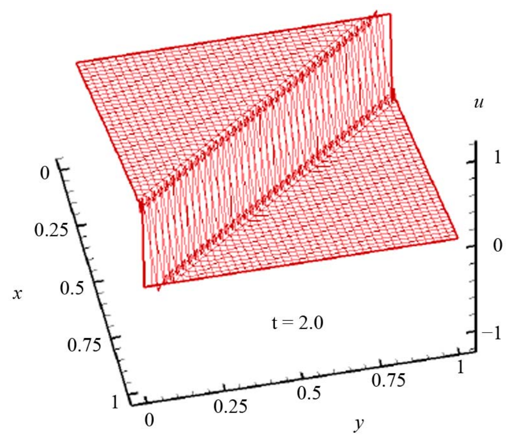

Figure 1. Classical CN finite element solution at *t* = 4
图 1. 在 *t* = 4 处的经典 CN 有限元解

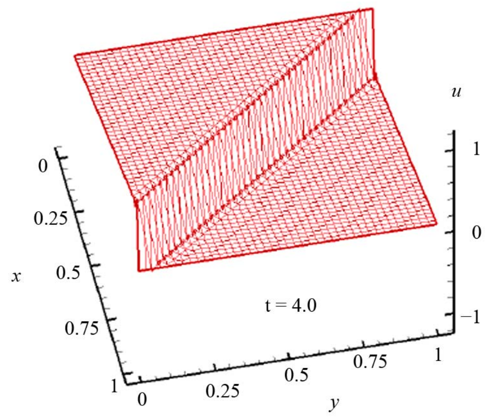

Figure 2. Reduced-order CN finite element solution at $t = 4$
图 2. 在 $t = 4$ 处的降维 CN 有限元解

方法的计算量是 CN 有限元降维外推方法的 2000 倍，基于POD方法的CN有限元降维外推算法效果要比经典 CN 有限元格式好。因此利用 CN 有限元降维外推算法计算 Burgers 方程的数值解可以极大地减少计算量，从而会减少计算过程中截断误差的积累。这也说明了基于POD方法的CN有限元降维外推算法在求解 Burgers 方程是可行有效的。

图 3 是在 $t = 4$ 时的经典 CN 有限元解与 CN 有限元降维外推取不同 POD 数目的解之间的误差。由此可见，当 $d = 5$ 时，误差不超过 2×10^{-4}，这与定理 3 的理论结果相吻合，这进一步说明了数值结果是与理论结果相吻合的。

如果采用基于 POD 方法时间一阶精度降维有限元格式[20]求 Burgers 方程的数值解，为了得到 2×10^{-4} 的精度，时间步长取为 10^{-4}，当计算 $t = 4$ 的解时，要计算 4×10^{4} 步，而用 CN 有限元降维外推格式只要计

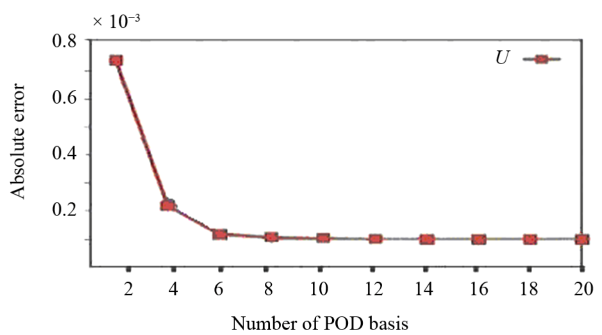

Figure 3. The absolute errors at $t = 4$ between the classical CN finite element solution and the reduced-order CN finite element solutions with different number of POD basis.
图 3. $t = 4$ 时经典 CN 有限元解与取不同 POD 基数目的降维 CN 有限元解之间的误差

算 400 步，计算步数减少 100 倍，从而能减少计算过程中截断误差的积累。而且基于 POD 方法时间一阶精度降维有限元格式[20]没有采用外推，相当于重复计算经典有限元方法在相同时段的解。因此本文的方法更有应用价值。

6. 结论和讨论

本文利用 POD 方法建立了二维非定常 Burgers 方程的 CN 有限元降阶降维外推算法、分析了经典的 CN 有限元解与 CN 有限元降维外推算法解的误差、用误差估计建立了 POD 基数目选取和 POD 基更新的准则、给出了 CN 有限元降维外推算法实现步骤。最后，用数值实验说明 CN 有限元降维外推算法对于求解二维非定常 Burgers 方程的数值解是有效和可靠的。

虽然二维非定常 Burgers 方程基于 POD 方法时间一阶精度降维有限元格式[20]已经被建立，但是没有采用外推，相当于重复计算经典有限元方法在相同时段的解。而本文是只是在很短的时段上用经典 CN 有限元格式求出的样本解作为瞬像，构造 POD 基和建立基于 POD 方法的 CN 有限元降维外推算法，是具有二阶时间精度的高精度降维算法，这相当于用已有的信息去预测预报未来流体流动现象，这是具有实际应用前景的方法，这也是对现有基于 POD 方法的降阶格式[8-29]的改进和创新。

参考文献 (References)

[1] 傅德薰. 流体力学数值模拟[M]. 北京: 国防工业出版社, 1993.
[2] 刘儒勋, 舒其望. 计算流体力学的若干新方法[M]. 北京: 科学出版社, 2003.
[3] 罗振东. 混合有限元法基础及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2006.
[4] P. Holmes, J. L. Lumley and G. Berkooz. Turbulence, coherent structures, dynamical systems and symmetry. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.
[5] K. Fukunaga. Introduction to statistical recognition. New York: Academic Press, 1990.
[6] I. T. Jolliffe. Principal component analysis. Berlin: Springer-Verlag, 2002.
[7] F. M. Selten. Baroclinic empirical orthogonal functions as basis functions in an atmospheric model. Journal of the Atmospheric Sciences, 1997, 54(16): 2100-2114.
[8] K. Kunisch, S. Volkwein. Galerkin proper orthogonal decomposition methods for parabolic problems. Numerische Mathematik, 2001, 90(1): 117-148.
[9] K. Kunisch, S. Volkwein. Galerkin proper orthogonal decomposition methods for a general equation in fluid dynamics. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2002, 40(2): 492-515.
[10] Z. D. Luo, J. Chen, Z. H. Xie, et al. A reduced second-order time

accurate finite element formulation based on POD for parabolic equations. Scientia Sinica Mathematica, 2011, 41(5): 447-460.
[11] Z. D. Luo, H. Li, Y. J. Zhou, et al. A reduced FVE formulation based on POD method and error analysis for two-dimensional viscoelastic problem. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2012, 385(1): 310-321.
[12] Z. D. Luo, H. Li, Y. J. Zhou, et al. A reduced finite element formulation and error estimates based on POD method for two-dimensional solute transport problems. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2012, 385(1): 371-383.
[13] Z. D. Luo, Q. L. Ou and Z. H. Xie. A reduced finite difference scheme and error estimates based on POD method for the non-stationary Stokes equation. Applied Mathematics and Mechanics, 2011, 32(7): 847-858.
[14] P. Sun, Z. D. Luo and Y. J. Zhou. Some reduced finite difference schemes based on a proper orthogonal decomposition technique for parabolic equations. Applied Numerical Mathematics, 2010, 60(1-2): 154-164.
[15] Z. D. Luo, J. Du, Z. H. Xie, et al. A reduced stabilized mixed finite element formulation based on proper orthogonal decomposition for the no-stationary Navier-Stokes equations. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2011, 88(1): 31-46.
[16] Z. D. Luo, Z. H. Xie, Y. Q. Shang, et al. A reduced finite volume element formulation and numerical simulations based on POD for parabolic equations. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2011, 235(8): 2098-2111.
[17] Z. D. Luo, Z. H. Xie and J. Chen. A reduced MFE formulation based on POD for the non-stationary conduction-convection problems. Acta Mathematica Scientia, 2011, 31(5): 1765-1785.
[18] Z. D. Luo, Q. L. Ou, J. R. Wu, et al. A reduced finite element formulation based on POD for two-dimensional hyperbolic equation. Acta Mathematica Scientia, 2012, 32(5): 1997-2009.
[19] H. R. Li, Z. D. Luo and J. Chen. Numerical simulation based on proper orthogonal decomposition for two-dimensional solute transport problems. Applied Mathematical Modelling, 2011, 35 (5): 2489-2498.
[20] Z. D. Luo, Y. J. Zhou and X. Z. Yang. A reduced finite element formulation based on proper orthogonal decomposition for Burgers equation. Applied Numerical Mathematics, 2009, 59(8): 1933-1946.
[21] Z. D. Luo, J. Chen, P. Sun, et al. Finite element formulation based on proper orthogonal decomposition for parabolic equations. Science in China Series A: Mathematics, 2009, 52(3): 587-596.
[22] Z. D. Luo, J. Chen, I. M. Navon, et al. Mixed finite element formulation and error estimates based on proper orthogonal decomposition for the non-stationary Navier-Stokes equations. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2008, 47(1): 1-19.
[23] Z. D. Luo, J. Chen, I. M. Navon, et al. An optimizing reduced PLSMFE formulation for non-stationary conduction—convection problems. International Journal for Numerical Methods in Fluid, 2009, 60(4): 409-436.
[24] Z. D. Luo, X. Z. Yang and Y. J. Zhou. A reduced finite difference scheme based on singular value decomposition and proper orthogonal decomposition for Burgers equation. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2009, 229(1): 97-107.
[25] Z. D. Luo, R. W. Wang and J. Zhu. Finite difference scheme based on proper orthogonal decomposition for the non-stationary Navier-Stokes equations. Science in China Series A: Mathematics, 2007, 50(8): 1186-1196.
[26] Z. D. Luo, J. Chen, J. Zhu, et al. An optimizing reduced order FDS for the tropical Pacific Ocean reduced gravity model. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2007, 55(2): 143-161.
[27] Z. D. Luo, J. Zhu, R. W. Wang, et al. Proper orthogonal decomposition approach and error estimation of mixed finite element methods for the tropical Pacific Ocean reduced gravity model. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2007, 196(41-44): 4184-4195.
[28] Z. D. Luo, H. Li, Y. Q. Shang, et al. A LSMFE formulation based on proper orthogonal decomposition for parabolic equations. Finite Elements in Analysis and Design, 2012, 60: 1-12.
[29] 腾飞, 孙萍, 罗振东. 抛物型方程基于 POD 方法的时间二阶中心差的二阶精度简化有限元格式[J]. 计算数学, 2011, 33(4): 373-386.
[30] R. A. Adams. Sobolev spaces. New York: Academic Press, 1975.
[31] V. Girault, P. A. Raviant. Finite element methods for Navier-Stokes equations: Theory and algorithms. Berlin: Spinger-Verlag, 1986.
[32] F. Brezzi, M. Fortin. Mixed and hybrid finite element methods. New York: Springer-Verlag, 1991.
[33] W. Rudin. Functional and analysis (2nd Edition). New York: McGraw-Hill Companies, Inc., 1973.

附录

定理 3 证明。

注意到，当$1\le n\le L$时，

$\boldsymbol{u}_d^n=\sum_{j=1}^{d}\left(\nabla\boldsymbol{u}_h^n,\nabla\boldsymbol{\psi}_j\right)\boldsymbol{\psi}_j=P^d\boldsymbol{u}_h^n$，这时存在唯一解，而且由(3.8)和(2.10)有

$$\begin{aligned}&\left\|\boldsymbol{u}_d^n\right\|_0^2+k\sum_{i=1}^{n}\left\|\nabla\left(\boldsymbol{u}_d^i+\boldsymbol{u}_d^{i-1}\right)\right\|_0^2\\&=\left\|P^d\boldsymbol{u}_h^n\right\|_0^2+k\sum_{i=1}^{n}\left\|\nabla P^d\left(\boldsymbol{u}_h^i+\boldsymbol{u}_h^{i-1}\right)\right\|_0^2\\&\le C\left\|\boldsymbol{u}_h^n\right\|_0^2+k\sum_{i=1}^{n}\left\|\nabla\boldsymbol{u}_h^i\left(+\boldsymbol{u}_h^{i-1}\right)\right\|_0^2\\&\le Ck\sum_{i=1}^{n}\left\|\boldsymbol{f}^{i-1/2}\right\|_0^2\end{aligned}\tag{7.1}$$

当$L+1\le n\le N$时，类似于问题 III，用标准的有限元法不难证明(3.13)的存在唯一解。在(3.13)中取$\boldsymbol{v}_d=\boldsymbol{u}_d^n+\boldsymbol{u}_d^{n-1}$，并由(2.4)和 Hölder 不等式及 Cauchy 不等式有

$$\begin{aligned}&2\left(\left\|\boldsymbol{u}_d^n\right\|_0^2-\left\|\boldsymbol{u}_d^{n-1}\right\|_0^2\right)+k\mu\left\|\nabla\left(\boldsymbol{u}_d^n+\boldsymbol{u}_d^{n-1}\right)\right\|_0^2\\&=2k\left(\boldsymbol{f}^{n-1/2},\boldsymbol{u}_d^n+\boldsymbol{u}_d^{n-1}\right)\\&\le Ck\left\|\boldsymbol{f}^{n-1/2}\right\|_{-1}^2+\frac{k\mu}{2}\left\|\nabla\left(\boldsymbol{u}_d^n+\boldsymbol{u}_d^{n-1}\right)\right\|_0^2\end{aligned}\tag{7.2}$$

即得

$$\left\|\boldsymbol{u}_d^n\right\|_0^2-\left\|\boldsymbol{u}_d^{n-1}\right\|_0^2+k\left\|\nabla\left(\boldsymbol{u}_d^n+\boldsymbol{u}_d^{n-1}\right)\right\|_0^2\le Ck\left\|\boldsymbol{f}^{n-1/2}\right\|_{-1}^2\tag{7.3}$$

对(7.3)两边从$L+1$到n求和，并由(7.1)即得(4.1)。

当$1\le n\le L$时，(3.9)和引理 2 有

$$\begin{aligned}&\left\|\boldsymbol{u}_h^n-\boldsymbol{u}_d^n\right\|_0^2+k\left\|\nabla\left(\boldsymbol{u}_h^n-\boldsymbol{u}_d^n\right)\right\|_0^2\\&=\left\|\boldsymbol{u}_h^n-P^d\boldsymbol{u}_h^n\right\|_0^2+k\left\|\nabla\left({}_h^n-P^d\boldsymbol{u}_h^n\right)\right\|_0^2\\&\le Ck\left\|\nabla\left({}_h^n-P^d\boldsymbol{u}_h^n\right)\right\|_0^2\le Ck^{1/2}\sum_{j=d+1}^{l}\lambda_j\end{aligned}\tag{7.4}$$

当$L+1\le n\le N$时，在问题 III 中去$\boldsymbol{v}_h=\boldsymbol{v}_d$，并与问题 IV 相减得到误差方程

$$\begin{aligned}&4\left(\boldsymbol{u}_h^n-\boldsymbol{u}_d^n-\left(\boldsymbol{u}_h^{n-1}-\boldsymbol{u}_d^{n-1}\right),\boldsymbol{v}_d\right)\\&\quad+2\mu k\left(\nabla\left(\boldsymbol{u}_h^n-\boldsymbol{u}_d^n+\boldsymbol{u}_h^{n-1}-\boldsymbol{u}_d^{n-1}\right),\nabla\boldsymbol{v}_d\right)\\&\quad+k\left(\left(\boldsymbol{u}_h^n+\boldsymbol{u}_h^{n-1}\right)\cdot\nabla\left(\boldsymbol{u}_h^n+\boldsymbol{u}_h^{n-1}\right),\boldsymbol{v}_d\right)\\&\quad-k\left(\left(\boldsymbol{u}_d^n+\boldsymbol{u}_d^{n-1}\right)\cdot\nabla\left(\boldsymbol{u}_d^n+\boldsymbol{u}_d^{n-1}\right),\boldsymbol{v}_d\right)\\&=0,\forall\boldsymbol{v}_d\in U^d\end{aligned}\tag{7.5}$$

利用(7.5)可有

$$\begin{aligned}&4\left\|\boldsymbol{u}_h^n-\boldsymbol{u}_d^n-\left(\boldsymbol{u}_h^{n-1}-\boldsymbol{u}_d^{n-1}\right)\right\|_0^2\\&\quad+2\mu k\left\|\nabla\left(\boldsymbol{u}_h^n-\boldsymbol{u}_d^n\right)\right\|_0^2-\left\|\nabla\left(\boldsymbol{u}_h^{n-1}-\boldsymbol{u}_d^{n-1}\right)\right\|_0^2\\&=4\left(\boldsymbol{u}_h^n-\boldsymbol{u}_d^n-\left(\boldsymbol{u}_h^{n-1}-\boldsymbol{u}_d^{n-1}\right),\boldsymbol{u}_h^n-\boldsymbol{u}_d^n-\left(\boldsymbol{u}_h^{n-1}-\boldsymbol{u}_d^{n-1}\right)\right)\\&\quad+2\mu k\left(\nabla\left(\boldsymbol{u}_h^n-\boldsymbol{u}_d^n+\boldsymbol{u}_h^{n-1}-\boldsymbol{u}_d^{n-1}\right),\nabla\left(\boldsymbol{u}_h^n-\boldsymbol{u}_d^n-\left(\boldsymbol{u}_h^{n-1}-\boldsymbol{u}_d^{n-1}\right)\right)\right)\\&=4\left(\boldsymbol{u}_h^n-\boldsymbol{u}_d^n-\left(\boldsymbol{u}_h^{n-1}-\boldsymbol{u}_d^{n-1}\right),\boldsymbol{u}_h^n-P^d\boldsymbol{u}_h^n-\left(\boldsymbol{u}_h^{n-1}-P^d\boldsymbol{u}_h^{n-1}\right)\right)\\&\quad+4\left(\boldsymbol{u}_h^n-\boldsymbol{u}_d^n-\left(\boldsymbol{u}_h^{n-1}-\boldsymbol{u}_d^{n-1}\right),P^d\boldsymbol{u}_h^n-\boldsymbol{u}_d^n-\left(P^d\boldsymbol{u}_h^{n-1}-\boldsymbol{u}_d^{n-1}\right)\right)\\&\quad+2\mu k\left(\nabla\left(\boldsymbol{u}_h^n-\boldsymbol{u}_d^n+\boldsymbol{u}_h^{n-1}-\boldsymbol{u}_d^{n-1}\right),\nabla\left(\boldsymbol{u}_h^n-P^h\boldsymbol{u}_h^n-\boldsymbol{u}_h^{n-1}+P^h\boldsymbol{u}_h^{n-1}\right)\right)\\&\quad+2\mu k\left(\nabla\left(\boldsymbol{u}_h^n-\boldsymbol{u}_d^n+\boldsymbol{u}_h^{n-1}-\boldsymbol{u}_d^{n-1}\right),\nabla\left(P^d\boldsymbol{u}_h^n-\boldsymbol{u}_d^n-P^d\boldsymbol{u}_h^{n-1}+\boldsymbol{u}_d^{n-1}\right)\right)\\&=4\left(\boldsymbol{u}_h^n-\boldsymbol{u}_d^n-\left(\boldsymbol{u}_h^{n-1}-\boldsymbol{u}_d^{n-1}\right),\boldsymbol{u}_h^n-P^d\boldsymbol{u}_h^n-\left(\boldsymbol{u}_h^{n-1}-P^d\boldsymbol{u}_h^{n-1}\right)\right)\\&\quad+2\mu k\left(\nabla\left(\boldsymbol{u}_h^n-P^d\boldsymbol{u}_h^n+\boldsymbol{u}_h^{n-1}-P^d\boldsymbol{u}_h^{n-1}\right),\nabla\left(\boldsymbol{u}_h^n-P^h\boldsymbol{u}_h^n-\boldsymbol{u}_h^{n-1}+P^h\boldsymbol{u}_h^{n-1}\right)\right)\\&\quad-k\left(\left(\boldsymbol{u}_h^n+\boldsymbol{u}_h^{n-1}\right)\cdot\nabla\left(\boldsymbol{u}_h^n+\boldsymbol{u}_h^{n-1}\right),P^d\boldsymbol{u}_h^n-\boldsymbol{u}_d^n-P^d\boldsymbol{u}_h^{n-1}+\boldsymbol{u}_d^{n-1}\right)\\&\quad+k\left(\left(\boldsymbol{u}_d^n+\boldsymbol{u}_d^{n-1}\right)\cdot\nabla\left(\boldsymbol{u}_d^n+\boldsymbol{u}_d^{n-1}\right),P^d\boldsymbol{u}_h^n-\boldsymbol{u}_d^n-P^d\boldsymbol{u}_h^{n-1}+\boldsymbol{u}_d^{n-1}\right)\end{aligned}\tag{7.6}$$

由 Hölder 不等式及 Cauchy 不等式有

$$
\begin{aligned}
&\left(\boldsymbol{u}_h^n-\boldsymbol{u}_d^n-\left(\boldsymbol{u}_h^{n-1}-\boldsymbol{u}_d^{n-1}\right),\boldsymbol{u}_h^n-P^d\boldsymbol{u}_h^n-\left(\boldsymbol{u}_h^{n-1}-P^d\boldsymbol{u}_h^{n-1}\right)\right)\\
&\le\left\|\boldsymbol{u}_h^n-\boldsymbol{u}_d^n-\left(\boldsymbol{u}_h^{n-1}-\boldsymbol{u}_d^{n-1}\right)\right\|_0\left\|\boldsymbol{u}_h^n-P^d\boldsymbol{u}_h^n-\left(\boldsymbol{u}_h^{n-1}-P^d\boldsymbol{u}_h^{n-1}\right)\right\|_0\\
&\le\frac{3}{4}\left\|\boldsymbol{u}_h^n-\boldsymbol{u}_d^n-\left(\boldsymbol{u}_h^{n-1}-\boldsymbol{u}_d^{n-1}\right)\right\|_0^2+Ch^2\left\|\nabla\left(\boldsymbol{u}_h^n-P^d\boldsymbol{u}_h^n-\left(\boldsymbol{u}_h^{n-1}-P^d\boldsymbol{u}_h^{n-1}\right)\right)\right\|_0^2
\end{aligned}
\tag{7.7}
$$

$$
\begin{aligned}
&2\mu k\left(\nabla\left(\boldsymbol{u}_h^n-P^d\boldsymbol{u}_h^n+\boldsymbol{u}_h^{n-1}-P^d\boldsymbol{u}_h^{n-1}\right),\nabla\left(\boldsymbol{u}_h^n-P^h\boldsymbol{u}_h^n-\boldsymbol{u}_h^{n-1}+P^h\boldsymbol{u}_h^{n-1}\right)\right)\\
&=2\mu k\left(\left\|\nabla\left(\boldsymbol{u}_h^n-P^d\boldsymbol{u}_h^n\right)\right\|_0^2-\left\|\nabla\left(\boldsymbol{u}_h^{n-1}-P^d\boldsymbol{u}_h^{n-1}\right)\right\|_0^2\right)
\end{aligned}
\tag{7.8}
$$

当 $2N\mu^{-1}\left\|\nabla\boldsymbol{u}_h\right\|_0\le 1$ 时，由(2.4)和 Hölder 不等式及 Cauchy 不等式有

$$
\begin{aligned}
&k\left(\left(\boldsymbol{u}_h^n+\boldsymbol{u}_h^{n-1}\right)\cdot\nabla\left(\boldsymbol{u}_h^n+\boldsymbol{u}_h^{n-1}\right),P^d\boldsymbol{u}_h^n-\boldsymbol{u}_d^n-P^d\boldsymbol{u}_h^{n-1}+\boldsymbol{u}_d^{n-1}\right)\\
&\quad-k\left(\left(\boldsymbol{u}_d^n+\boldsymbol{u}_d^{n-1}\right)\cdot\nabla\left(\boldsymbol{u}_d^n+\boldsymbol{u}_d^{n-1}\right),P^d\boldsymbol{u}_h^n-\boldsymbol{u}_d^n-P^d\boldsymbol{u}_h^{n-1}+\boldsymbol{u}_d^{n-1}\right)\\
&=k\left(\left(\boldsymbol{u}_h^n-\boldsymbol{u}_d^n+\boldsymbol{u}_h^{n-1}-\boldsymbol{u}_d^{n-1}\right)\cdot\nabla\left(\boldsymbol{u}_h^n+\boldsymbol{u}_h^{n-1}\right),P^d\boldsymbol{u}_h^n-\boldsymbol{u}_h^n-P^d\boldsymbol{u}_h^{n-1}+\boldsymbol{u}_h^{n-1}\right)\\
&\quad+k\left(\left(\boldsymbol{u}_h^n-\boldsymbol{u}_d^n+\boldsymbol{u}_h^{n-1}-\boldsymbol{u}_d^{n-1}\right)\cdot\nabla\left(\boldsymbol{u}_h^n+\boldsymbol{u}_h^{n-1}\right),\boldsymbol{u}_h^n-\boldsymbol{u}_d^n-\boldsymbol{u}_h^{n-1}+\boldsymbol{u}_d^{n-1}\right)\\
&\quad+k\left(\left(\boldsymbol{u}_d^n+\boldsymbol{u}_d^{n-1}\right)\cdot\nabla\left(\boldsymbol{u}_h^n-\boldsymbol{u}_d^n+\boldsymbol{u}_h^{n-1}-\boldsymbol{u}_d^{n-1}\right),P^d\boldsymbol{u}_h^n-\boldsymbol{u}_h^n-P^d\boldsymbol{u}_h^{n-1}+\boldsymbol{u}_h^{n-1}\right)\\
&\quad+k\left(\left(\boldsymbol{u}_d^n+\boldsymbol{u}_d^{n-1}\right)\cdot\nabla\left(\boldsymbol{u}_h^n-\boldsymbol{u}_d^n+\boldsymbol{u}_h^{n-1}-\boldsymbol{u}_d^{n-1}\right),\boldsymbol{u}_h^n-\boldsymbol{u}_d^n-\boldsymbol{u}_h^{n-1}+\boldsymbol{u}_d^{n-1}\right)\\
&\le k\mu\left(\left\|\boldsymbol{u}_h^n-\boldsymbol{u}_d^n\right\|_0^2-\left\|\boldsymbol{u}_h^{n-1}+\boldsymbol{u}_d^{n-1}\right\|_0^2\right)
\end{aligned}
\tag{7.9}
$$

结合(7.6)~(7.9)可得到

$$
\begin{aligned}
&\left\|\boldsymbol{u}_h^n-\boldsymbol{u}_d^n-\left(\boldsymbol{u}_h^{n-1}-\boldsymbol{u}_d^{n-1}\right)\right\|_0^2\\
&\quad+\mu k\left(\left\|\nabla\left(\boldsymbol{u}_h^n-\boldsymbol{u}_d^n\right)\right\|_0^2-\left\|\nabla\left(\boldsymbol{u}_h^{n-1}-\boldsymbol{u}_d^{n-1}\right)\right\|_0^2\right)\\
&\le Ch^2\left\|\nabla\left(\boldsymbol{u}_h^n-P^d\boldsymbol{u}_h^n-\left(\boldsymbol{u}_h^{n-1}-P^d\boldsymbol{u}_h^{n-1}\right)\right)\right\|_0^2\\
&\quad+2\mu k\left(\left\|\nabla\left(\boldsymbol{u}_h^n-P^d\boldsymbol{u}_h^n\right)\right\|_0^2-\left\|\nabla\left(\boldsymbol{u}_h^{n-1}-P^d\boldsymbol{u}_h^{n-1}\right)\right\|_0^2\right)
\end{aligned}
\tag{7.10}
$$

注意到，由引理 2 和(2.11)有

$$
\begin{aligned}
&\left\|\nabla\left(\boldsymbol{u}_h^n-P^d\boldsymbol{u}_h^n\right)\right\|_0\le\left\|\nabla\left(\boldsymbol{u}_h^n-\boldsymbol{u}(t_n)\right)\right\|_0\\
&\quad+\left\|\nabla\left(\boldsymbol{u}(t_n)-P^h\boldsymbol{u}(t_n)\right)\right\|_0+\left\|\nabla\left(P^h\boldsymbol{u}(t_n)-P^d\boldsymbol{u}_h^n\right)\right\|_0\\
&\le C\left[\left\|\nabla\left(\boldsymbol{u}_h^n-\boldsymbol{u}(t_n)\right)\right\|_0+\left\|\nabla\left(\boldsymbol{u}(t_n)-P^h\boldsymbol{u}(t_n)\right)\right\|_0\right]\\
&\le C\left(k^2+h^{m+1}\right)\Big/k^{1/2}
\end{aligned}
\tag{7.11}
$$

注意到 $\boldsymbol{u}_d^L=P^d\boldsymbol{u}_h^L$，当 $k=O(h)$ 时，结合(7.10)和(7.11)，并从 $L+1$ 到 n 求和可得

$$
\begin{aligned}
&\left\|\boldsymbol{u}_h^n-\boldsymbol{u}_d^n-\left(\boldsymbol{u}_h^{n-1}-\boldsymbol{u}_d^{n-1}\right)\right\|_0^2+\mu k\left\|\nabla\left(\boldsymbol{u}_h^n-\boldsymbol{u}_d^n\right)\right\|_0^2\\
&\le C(n-L)h\left(k^2+h^{m+1}\right)^2
\end{aligned}
\tag{7.12}
$$

即得

$$
\begin{aligned}
&\left\|\boldsymbol{u}_h^n-\boldsymbol{u}_d^n-\left(\boldsymbol{u}_h^{n-1}-\boldsymbol{u}_d^{n-1}\right)\right\|_0+k^{1/2}\left\|\nabla\left(\boldsymbol{u}_h^n-\boldsymbol{u}_d^n\right)\right\|_0\\
&\le C\left(k^2+h^{m+1}\right)\sqrt{(n-L)h}
\end{aligned}
\tag{7.13}
$$

进一步，由三角不等式得到

$$
\begin{aligned}
&\left\|\boldsymbol{u}_h^n-\boldsymbol{u}_d^n\right\|_0-\left\|\boldsymbol{u}_h^{n-1}-\boldsymbol{u}_d^{n-1}\right\|_0+k^{1/2}\left\|\nabla\left(\boldsymbol{u}_h^n-\boldsymbol{u}_d^n\right)\right\|_0\\
&\le C\left(k^2+h^{m+1}\right)\sqrt{(n-L)h}
\end{aligned}
\tag{7.14}
$$

再对(7.14)从 $L+1$ 到 n 求和可得

$$
\begin{aligned}
&\left\|\boldsymbol{u}_h^n-\boldsymbol{u}_d^n\right\|_0+k^{1/2}\left\|\nabla\left(\boldsymbol{u}_h^n-\boldsymbol{u}_d^n\right)\right\|_0\\
&\le C\left(k^{1/2}\sum_{j=d+1}^{l}\lambda_j\right)^{1/2}+C\left(k^2+h^{m+1}\right)\sqrt{h(n-L)^3},\\
&n=L+1,\cdots,N
\end{aligned}
\tag{7.15}
$$

结合(7.4)和(7.15)即得(4.2)。定理 3 证毕。