

# Iterative Multigrid Image Deformation Method for PIV\*

Huai Chen, Qiang Zhong, Danxun Li, Xingkui Wang

State Key Laboratory of Hydrosience and Engineering, Tsinghua University, Beijing  
Email: huai-chen10@mails.tsinghua.edu.cn

Received: Mar. 13<sup>th</sup>, 2013; revised: Mar. 27<sup>th</sup>, 2013; accepted: Apr. 15<sup>th</sup>, 2013

Copyright © 2013 Huai Chen et al. This is an open access article distributed under the Creative Commons Attribution License, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

**Abstract:** This paper presents a brief introduction of the iterative multigrid image deformation method which combines iterative multigrid approach and image deformation approach for PIV. Major components of the method are discussed in detail, including correlation peak finding algorithms, interpolation schemes, velocity interpolation schemes, outlier detection schemes and weighting windows.

**Keywords:** Multigrid; Iterative; Image Deformation; PIV

## 多级网格迭代的图像变形算法在 PIV 中的应用\*

陈 槐, 钟 强, 李丹勋, 王兴奎

清华大学水沙科学与水利水电工程国家重点实验室, 北京  
Email: huai-chen10@mails.tsinghua.edu.cn

收稿日期: 2013 年 3 月 13 日; 修回日期: 3 月 27 日; 录用日期: 2013 年 4 月 15 日

**摘 要:** 本文简述了多级网格迭代的图像变形算法的发展, 重点介绍了多级网格迭代算法与图像变形算法匹配进行流场分析的基本原理及计算步骤。对算法的各主要环节进行了详细的讨论, 包括相关系数峰值拟合方法, 图形的速度场插值方法, 亚像素点灰度插值方法, 数据剔除方法及窗函数的应用。

**关键词:** 多级网格; 迭代; 图像变形; PIV

### 1. 引言

粒子图像测速技术(PIV)已被广泛应用于二维瞬时流场的测量, 其中测速算法对 PIV 的测速范围和测量精度至关重要。互相关算法是 20 世纪 90 年代提出的 PIV 经典算法<sup>[1,2]</sup>, 但由于诊断窗口位置固定不变, 部分粒子移出诊断窗口, 导致信噪比的降低和计算误差的增大<sup>[1]</sup>。为减少诊断窗口固定造成的粒子“配对减少”现象, 可采用窗口平移算法, 将诊断窗口整体移动适当的位移来跟随粒子在流场中的运动, 如移动整数像素位移<sup>[3,4]</sup>或亚像素位移<sup>[5]</sup>。当诊断窗口内粒子

的运动不一致(如强旋转或剪切流), 窗口平移算法的效果就不明显了。

为在复杂流态下更好地跟随诊断窗口内的粒子, 可采用网格细分及图像变形两类方法。网格细分法采用多级网格迭代法<sup>[6]</sup>, 计算的网格尺寸随迭代次数不断减小, 采用大网格计算大位移, 根据大网格的位移量移动小网格的诊断窗口, 再用小网格计算精度更高的小位移, 两者相加得出总位移, 从而提高算法的可测速度范围及空间分辨率。图像变形法就是将诊断窗口按当地流场的运动形态进行扭曲变形, 从而最大限度跟随粒子的运动。图像变形最早由 Huang 等<sup>[7]</sup>提出, 通过计算速度梯度, 运用运动学公式对诊断窗口进行

\*基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51127006); 国家“十二五”科技支撑计划(2012BAB04B01)。

变形,从而提高了复杂流态下位移的计算精度;为提高窗口变形的精度, Tokumar 和 Dimotakis<sup>[8]</sup>将位移的高阶偏导数引入窗口变形计算,但计算量随参数个数呈指数增加;为平衡计算量及计算精度, Jambunathan 等<sup>[9]</sup>只引入旋转及剪切两个参数。

Scarano 和 Riethmuller<sup>[10]</sup>将多级网格迭代和图像变形算法相结合,提出多级网格迭代的图像变形算法,用粗网格的计算结果为图像变形提供第一次的估计位移,对细分网格采用图像变形提高位移计算精度,如今该算法已经被广泛的接受和应用<sup>[11-14]</sup>,并不断有研究者对其主要构成部分(如速度场插值方法、窗函数等)进行补充和发展。

本文对该算法的基本原理做了介绍,并详细说明算法的计算步骤及注意事项,并将其他作者对该算法的发展及完善内容进行归纳总结,使读者对该算法具有全面的了解并易于编程实现。

## 2. 多级网格迭代的图像变形算法原理

### 2.1. 多级网格迭代算法

多级网格迭代算法的主要贡献在于提高了空间分辨率和计算精度,增大了速度梯度的测量范围。Scarano 和 Riethmuller<sup>[6]</sup>指出,对于无多级网格迭代的算法,其可测速度范围如下:

$$\frac{U_{\max} - U_{\min}}{U_{\min}} = \frac{l_{\max}}{l_{\min}} - 1 = c_1 \frac{W_0}{l_{\min}} - 1 \quad (1)$$

其中,  $U_{\max}$ 、 $U_{\min}$  为可测的最大、最小速度;  $l_{\max}$ 、 $l_{\min}$  为可测的最大、最小位移;  $W_0$  为诊断窗口的边长;  $c_1 = l_{\max}/W_0$ , 为保证较高的置信度,  $c_1$  值一般不超过 0.2~0.3, 即“1/4 准则”。

引入多级网格迭代方法后,利用大网格诊断窗口的计算位移对小网格诊断窗口进行平移,从而解耦可测最大位移与小诊断窗口边长间的联系,新的测速范围如下:

$$\frac{U_{\max} - U_{\min}}{U_{\min}} = c_1' \frac{RW_K}{l_{\min}} - 1 \quad (2)$$

其中,  $K$  是多级网格的级数,网格尺寸从大到小排列;  $W_k$  是  $k$  级诊断窗口的尺寸,  $k = 1, 2, \dots, K$ ;  $R = W_1/W_K$ , 是网格细化比例因子;  $c_1' = l_{\max}/W_1$ ,  $c_1' \in [0.2, 0.3]$ 。

对比(1)及(2)两式可知,对于诊断窗口最终尺寸一致( $W_0 = W_K$ )的无迭代算法与多级网格算法,多级网格算法可将速度梯度测量范围增大  $R$  倍。故应用多级网格迭代算法可消除  $l_{\max}$  与  $W_K$  间的“1/4 准则”限制,极大提高了速度测量的范围,但需指出的是,初级诊断窗口的尺寸仍受“1/4 准则”的制约。

### 2.2. 图像变形算法

图像变形算法按照流场运动形态对诊断窗口进行变形,从而使两幅计算图片间的配对粒子数量到达最大,提高位移计算精度。

由于诊断窗口内粒子的位移并不相等,而是存在空间分布, Scarano 和 Riethmuller<sup>[10]</sup>用泰勒展开法对位移分布进行拟合,对于  $(x, y)$  点的速度  $u(x, y)$ , 其关于  $(x_0, y_0)$  点的二阶泰勒展开式如下:

$$\begin{aligned} u(x, y) = & u(x_0, y_0) + u_x(x - x_0) + u_y(y - y_0) \\ & + \frac{1}{2!} [u_{xx}(x - x_0)^2 + u_{xy}(x - x_0)(y - y_0) \\ & + u_{yy}(y - y_0)^2] + o(x - x_0)^3 + o(y - y_0)^3 \end{aligned} \quad (3)$$

其中,  $x \in [x_0 - 0.5W, x_0 + 0.5W]$ ,  $y \in [y_0 - 0.5W, y_0 + 0.5W]$ ,  $W$  是诊断窗口尺寸,  $(x_0, y_0)$  为诊断窗口中心坐标,  $u_x$ 、 $u_{xx}$  分别为  $u$  对  $x$  的一阶及二阶导数,其他偏导数的定义类似;  $v(x, y)$  的展开同理。

由(3)式可知,窗口平移算法实际上是用 0 阶泰勒展开法对诊断窗口进行变形。图 1 比较了经典互相关、窗口平移及图像变形算法对诊断窗口进行变形的差异。

图 1 中, a、b 表示两幅图片中用来进行互相关计算的诊断窗口;实圆圈表示真正匹配的相关粒子,空圆圈代表不匹配的粒子; b 图中实线框、虚线框及点划线框分别表示互相关、窗口平移及图像变形算法采用的诊断窗口。对于互相关算法,由于没有采用窗口平移技术, B1 中含有较多的不匹配粒子干扰相关计算,所以 Keane 和 Adrian<sup>[1]</sup>提出“1/4 准则”来限制不匹配粒子所占的比重。由于窗口平移算法通过平移诊断窗口适当的像素以跟随粒子的运动,较大的减少了不匹配粒子的比重,从而弥补经典互相关算法的不足;但该算法只对诊断窗口内粒子位移差异较小的条

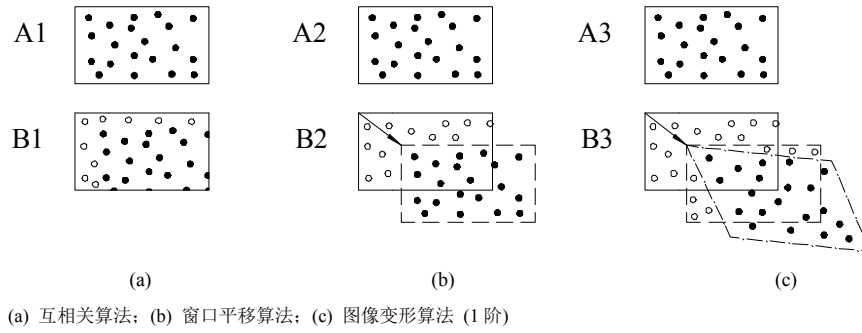


Figure 1. Comparison of interrogation window deformation  
图 1. 不同算法下的窗口变形

件适用，对于存在较大流速梯度的流场(如图 1(c))，虚线框中仍存在较大比重的不匹配粒子，导致计算精度降低。图像变形算法利用流速梯度对诊断窗口进行变形，极大的减少了不相关粒子的比重，增大了位移计算的精度。

虽然可以采用更高阶的泰勒展开逼近，但 Tokumaru 和 Dimotakis<sup>[8]</sup>指出，展开阶数越高，计算时间越长，见表 1，其中  $W_0$  是诊断窗口的尺寸。

### 2.3. 多级网格迭代的图像变形算法的计算步骤

多级网格迭代的图像变形算法的详细计算步骤为：

- 1) 对两帧图片进行大网格的节点流速场计算，得出大诊断窗口的平均位移，剔除不合理数据并插值，建立一帧与第一帧图片相同的临时图片；
- 2) 根据相邻区域内大网格计算的节点位移插值得到诊断窗口内每个像素点的位移，得出像素点位移场；
- 3) 在第二帧图片中定出像素点位移场的位置，插值计算该位置的灰度值并赋给临时图片中与第一帧图片对应的像素点(即图像变形)；
- 4) 细化网格尺寸，计算临时图片相对于第一帧图片的小位移；
- 5) 将前后两级网格的节点位移相加，得到总位移，剔除插补，得到次一级网格的节点位移；
- 6) 重复 2~5 步，或当达到迭代次数时结束计算，算法的计算流程见图 2。

在以上步骤中，需要注意以下问题：

- 1) 为保证足够的计算置信度，初级诊断窗口的尺寸应该满足 1/4 准则；

Table 1. Parameters in Taylor series expansion  
表 1. 泰勒展开阶数对应的参数及计算复杂度

展开阶数	0	1	2
参数个数	2	6	12
对应参数	$u, v$	$u, v, u_x, u_y, v_x, v_y$	$u, v, u_x, u_y, v_x, v_y, u_{xx}, u_{yy}, u_{xy}, v_{xx}, v_{yy}, v_{xy}$
计算复杂度	$(W_0^2)^2$	$(W_0^2)^6$	$(W_0^2)^{12}$

- 2) 需要利用一定的拟合方法，确定相关系数峰值的亚像素位置；
- 3) 插值算法的选择会影响图像变形的质量；
- 4) 若两幅图片都分别进行了 1/2 位移的变形，而计算区域固定在中心位置，则可得到二阶精度的位移估计；
- 5) 当像素点位移的终点不处于整数像素时，需要进行亚像素点灰度插值，插值方法的选择较为重要；
- 6) 较优的剔错算法可以有效剔除错误矢量；
- 7) 采用 FFT 法进行互相关计算会引入频谱泄露等问题，必须通过加窗函数来减低此项影响；
- 8) 由上一级网格的像素点位移场计算次一级网格内像素点位移的平均值，加上次一级网格相关计算的位移，得出次一级网格的节点位移<sup>[15]</sup>。

## 3. 拟合、插值、剔错方法及窗函数的应用

### 3.1. 相关系数峰值拟合方法

若不采用拟合方法拟合相关系数峰值的位置，则 PIV 的位移计算精度只能达到像素级别；当采用一定的拟合方法后，位移计算可以精确到亚像素级别。常用的相关系数峰值拟合方法有抛物线、3 点高斯、质心及 Whittaker 重构拟合法<sup>[2,16]</sup>；Forliti 等<sup>[17]</sup>分析上述四种插值方法，发现 3 点高斯拟合方法具有最小的偏

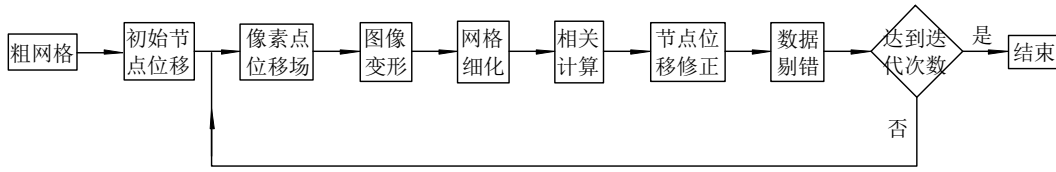


Figure 2. Flow chart of the iterative multigrid image deformation method  
图 2. 多级网格迭代的图像变形算法计算流程图

差和总误差。

计算两诊断窗口的互相关系数时， $x$  方向的相关系数可能出现如图 3 所示的情况( $y$  方向情况相同)。图中，横坐标为诊断窗口  $x$  方向的像素点坐标， $x \in [x_{\min}, x_{\max}]$ ， $x_{\min}$ 、 $x_{\max}$  为诊断窗口的左、右边界；纵坐标为对应像素点的相关系数值；②表示相关系数最大值出现在诊断窗口内部，①、③分别表示相关系数最大值出现在诊断窗口左、右边界。对于上述 3 种情况，相关系数峰值位置的拟合公式分别为：

$$x_g = \begin{cases} x_0 - \frac{4 \ln(R_{x_1}) - 3 \ln(R_{x_0}) - \ln(R_{x_2})}{2(\ln(R_{x_0}) + \ln(R_{x_2}) - 2 \ln(R_{x_1}))}, x_0 = x_{\min} \\ x_0 + \frac{\ln(R_{x_{-1}}) - \ln(R_{x_1})}{2(\ln(R_{x_{-1}}) - 2 \ln(R_{x_0}) + \ln(R_{x_1}))}, \\ x_{\min} < x_0 < x_{\max} \\ x_0 + \frac{4 \ln(R_{x_{-1}}) - 3 \ln(R_{x_0}) - \ln(R_{x_{-2}})}{2(\ln(R_{x_0}) + \ln(R_{x_{-2}}) - 2 \ln(R_{x_{-1}}))}, x_0 = x_{\max} \end{cases} \quad (4)$$

其中，下标 0 表示相关系数最大值所在的整数像素点，下标 $\pm 1$ 、 $\pm 2$  分别表示相差 $\pm 1$ 、 $\pm 2$  个像素点； $R$  表示整数像素点对应的相关系数值； $x_g$  表示高斯公式拟合峰值所处的亚像素点坐标。

需指出，实际计算中情况②的置信度最高，对于①、③两种情况，由于最大峰值出现在诊断窗口边缘，意味着粒子最大位移已经为 1/2 诊断窗口尺寸或更大，即真实的位移可能已在诊断窗口外，此时计算的相关系数置信度较低或出现错误，应尽量避免此种情况的发生，即初级诊断窗口应尽量满足 1/4 准则。

### 3.2. 图像变形的速度场插值方法

对诊断窗口进行变形时，无论是只涉及旋转及剪切两个参数，还是用泰勒展开法近似，计算过程都较为复杂，计算量也较大，有必要采用简单的方法来近

似考虑速度梯度引起的变形。Scarano<sup>[11]</sup>将互相关计算的网格节点位移，用双线性插值法插值到图像中每一个像素点，构建像素点位移场，利用像素点位移场进行图像变形，相当于对诊断窗口按流场信息进行了变形；线性插值可以看成 1 阶泰勒展开，高阶的插值方法近似于高阶的泰勒展开，从而速度梯度引起的变形就可以通过插值方法来近似。

当网格间距较小时，双线性插值可以得到较好的精度；但是当网格间距较大时，双线性插值法就会扭曲位移信号。Astarita<sup>[18]</sup>分析双线性、平移双线性、B 样条及 FFT 插值算法得出：双线性插值方法只能得到较为粗糙的像素点位移场；平移双线性插值方法在低频位移场下会引进噪声；FFT 插值法缺点是对远处数据点很敏感；插值精度最高的是 B 样条方法，且 2 阶 B 样条能适用于大部分实际情况。

### 3.3. 亚像素点灰度插值方法

虽然相关系数峰值计算精确到亚像素级别可以提高位移精度，但却给图像变形带来难题。当由像素点位移场得出某像素点前一刻(或前后 1/2 时刻)的位置不处于整数像素时，无法提取出此位置的灰度信息(只有整数像素才有)，只能依靠插值方法插值得到此处的近似灰度值，而应用最广泛的是双线性插值法<sup>[7,11,19]</sup>。

Astarita 和 Cardone<sup>[20]</sup>、Astarita<sup>[21]</sup>及 Kim 和 Sung<sup>[22]</sup>曾系统的对亚像素点灰度插值方法进行了分析。Astarita 和 Cardone<sup>[20]</sup>利用随机生成的常数位移图片，在图像无噪声和有噪声影响的条件下，详细比较了 4 种不同类型的插值方法，分别为：多项式类(双线性，双二次，双三次)、单纯形类(4 种模板)、辛克函数类(包括 FFT)及 B 样条类插值。当图片无噪声时，插值方法类型会明显的影响计算精度，模板越大、插值函数的阶数越高<sup>[20]</sup>，插值的精度越高；但当图片的噪声含量较大时，插值方法的类型对精度的影响较小<sup>[21]</sup>。Kim

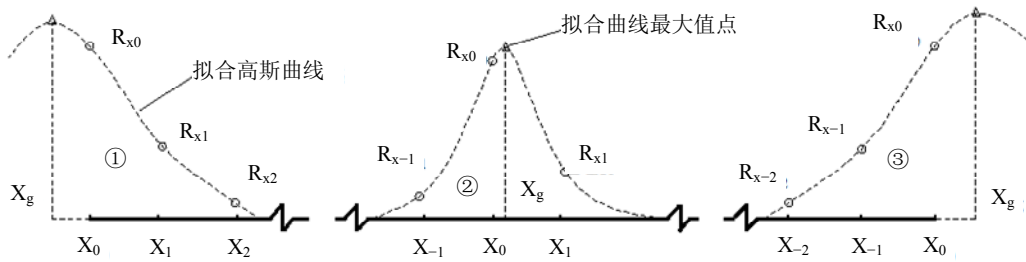


Figure 3. Gaussian curve-fitting  
图 3. 相关系数峰值的高斯曲线拟合法

和 Sung<sup>[22]</sup>利用人工合成的两种流态(均匀流及剪切流)的无噪声图片,分析了 7 种插值算法,分别为双线性、双二次、双三次、B 样条、辛克函数、拉格朗日及高斯插值法。结果表明,对于均匀流,辛克函数及拉格朗日插值方法结果最好;对于剪切流,插值方法的类型对误差几乎没有影响;插值方法的误差主要受粒子粒径的影响,随粒子粒径的增加而减小。

文献[22]的“插值方法的误差随粒子粒径增加而减小”的观点,从某一角度正好和文献[21]的“噪声级别很高的情况下,插值算法的类型对计算精度影响不大”的观点相一致。如果认为粒子周围就是噪声,那么粒子半径越小,意味着周围噪声越大,故插值方法作用越不显著。大噪声条件下,高阶插值方法的计算误差反而更大。因为高阶插值方法所需的模板节点数比低阶插值法多,在高噪声条件下,引入的噪声成分更多,插值得到的亚像素点的灰度值失真较大,计算结果自然很差,建议对于实际图片应采用双线性插值法。

### 3.4. 数据剔错方法

受相机、激光、粒子均匀性及其他因素的影响,PIV 图片局部可能存在较大的噪声,导致计算出现错误矢量,此时可采用剔错算法检测出错误矢量并插值替换。Raffel 等<sup>[23]</sup>比较了 9 种数据剔错方法,分别为:直接数据量级剔错法、全局直方图法、动态均值法、速度差检验法、中值检测法、标准化中值检测法、最小相关滤波法、峰值高度比滤波法及信噪比滤波法,其中剔错效果最好的是标准化中值检测法<sup>[24]</sup>。

标准化中值检测法公式如下:

$$r_0 = \frac{|U_0 - U_m|}{r_m + \varepsilon} > \xi_{thresh} \quad (5)$$

其中,  $U_0$  是待检测节点的速度值;  $U_m$  是  $U_0$  周围 8 个

节点速度值的中值,即  $U_m = \text{median}\{U_1, U_2, \dots, U_8\}$ ;  $r_m = \text{median}\{|U_1 - U_m|, \dots, |U_8 - U_m|\}$ ;  $\varepsilon$  反映了互相关算法可接受的峰值波动范围,建议取  $\varepsilon = 0.1$ ;  $\xi_{thresh}$  是剔错临界值,建议取 2,如果  $r_0 > \xi_{thresh}$ ,就认为  $U_0$  是不合理速度值并将其删除,一般用周围 8 点速度值的均值插补。

### 3.5. 窗函数的应用

用 FFT 方法计算诊断窗口相关系数时,相当于对原图像加了一个和诊断窗口同尺寸的二维矩形窗,从而扭曲了真实相关系数的计算值,且诊断窗口越小,扭曲度越大。为此,必须引入窗函数降低矩形窗的影响。

Nogueira 等发现 sinc 函数(矩形窗函数的频域函数)负瓣中的负频率会导致计算的不稳定<sup>[19]</sup>,并构造出 3 种频谱全为正值的窗函数<sup>[19,25,26]</sup>,指出添加此类窗函数可以提高 PIV 的计算稳定性及空间分辨率<sup>[27]</sup>。Florio 等<sup>[28]</sup>及 Scarano<sup>[29]</sup>将高斯窗函数应用到相关系数的计算中。Astarita<sup>[30]</sup>详细分析了 6 种类型的窗函数(矩形,三角形,高斯,布莱克曼,凯塞及 Nogueira 等(1999<sup>[19]</sup>, 2005a<sup>[25]</sup>, 2005b<sup>[26]</sup>)提出的窗函数),并组合运用在互相关及诊断窗口中心点位移的计算中,指出窗函数的尺寸及不同组合方式都会较大的影响图像变形算法的精度、空间分辨率及稳定性。

总结前人的研究成果表明,应用窗函数时必须同时考虑其在频域及时域内的分布,矩形窗函数虽然在时域内最优,但频域内最差;Nogueira 提出的窗函数在频域内较好,但时域内较差;Gauss 窗函数在时频域内达到较好的折中。

## 4. 小结

本文简述了多级网格迭代的图像变形算法的发

展过程,介绍其两大核心算法(多级网格迭代算法及图像变形算法)的基本原理及计算步骤,并详细讨论了算法中涉及到的拟合、插值、剔错算法和窗函数。建议采用 3 点高斯拟合算法进行相关系数峰值拟合,用双线性插值法插值亚像素点灰度值,利用 2 阶 B 样条插值法构建像素点位移场,使用标准化中值检验法进行数据剔错,添加高斯窗函数进行 FFT 相关系数计算。

## 参考文献 (References)

- [1] R. D. Keane, R. J. Adrian. Optimization of particle image velocimeters. I. Double pulsed systems. *Measurement Science and Technology*, 1990, 1(11): 1202.
- [2] C. E. Willert, M. Gharib. Digital particle image velocimetry. *Experiments in Fluids*, 1991, 10(4): 181-193.
- [3] J. Soria. An investigation of the near wake of a circular cylinder using a video-based digital cross-correlation particle image velocimetry technique. *Experimental Thermal and Fluid Science*, 1996, 12(2): 221-233.
- [4] J. Westerweel, D. Dabiri and M. Gharib. The effect of a discrete window offset on the accuracy of cross-correlation analysis of digital PIV recordings. *Experiments in Fluids*, 1997, 23(1): 20-28.
- [5] B. Lecordier, D. Demare, L. Vervisch, et al. Estimation of the accuracy of PIV treatments for turbulent flow studies by direct numerical simulation of multi-phase flow. *Measurement Science and Technology*, 2001, 12(9): 1382.
- [6] F. Scarano, M. L. Riethmuller. Iterative multigrid approach in PIV image processing with discrete window offset. *Experiments in Fluids*, 1999, 26(6): 513-523.
- [7] H. T. Huang, H. E. Fiedler and J. J. Wang. Limitation and improvement of PIV. *Experiments in Fluids*, 1993, 15(4): 263-273.
- [8] P. T. Tokumaru, P. E. Dimotakis. Image correlation velocimetry. *Experiments in Fluids*, 1995, 19(1): 1-15.
- [9] K. Jambunathan, X. Y. Ju, B. N. Dobbins, et al. An improved cross correlation technique for particle image velocimetry. *Measurement Science and Technology*, 1995, 6(5): 507.
- [10] F. Scarano, M. L. Riethmuller. Advances in iterative multigrid PIV image processing. *Experiments in Fluids*, 2000, 29(1 Suppl.): S51-S60.
- [11] F. Scarano. Iterative image deformation methods in PIV. *Measurement Science & Technology*, 2002, 13(1): R1-R19.
- [12] M. Stanislas, K. Okamoto and C. Kähler. Main results of the first international PIV challenge. *Measurement Science and Technology*, 2003, 14(10): R63.
- [13] M. Stanislas, K. Okamoto, C. J. Kähler, et al. Main results of the second international PIV challenge. *Experiments in Fluids*, 2005, 39(2): 170-191.
- [14] M. Stanislas, K. Okamoto, C. J. Kähler, et al. Main results of the third international PIV challenge. *Experiments in Fluids*, 2008, 45(1): 27-71.
- [15] F. Scarano. On the stability of iterative PIV image interrogation methods. *Proceedings of 12th international symposium on applications of laser techniques to fluid mechanics*, Lisbon, 2004: 1-9.
- [16] L. Lourenco, A. Krothapalli. On the accuracy of velocity and vorticity measurements with PIV. *Experiments in Fluids*, 1995, 18(6): 421-428.
- [17] D. J. Forliti, P. J. Strykowski and K. Debatin. Bias and precision errors of digital particle image velocimetry. *Experiments in Fluids*, 2000, 28(5): 436-447.
- [18] T. Astarita. Analysis of velocity interpolation schemes for image deformation methods in PIV. *Experiments in Fluids*, 2008, 45(2): 257-266.
- [19] J. Nogueira, A. Lecuona and P. A. Rodriguez. Local field correction PIV: On the increase of accuracy of digital PIV systems. *Experiments in Fluids*, 1999, 27(2): 107-116.
- [20] T. Astarita, G. Cardone. Analysis of interpolation schemes for image deformation methods in PIV. *Experiments in Fluids*, 2005, 38(2): 233-243.
- [21] T. Astarita. Analysis of interpolation schemes for image deformation methods in PIV: Effect of noise on the accuracy and spatial resolution. *Experiments in Fluids*, 2006, 40(6): 977-987.
- [22] B. J. Kim, H. J. Sung. A further assessment of interpolation schemes for window deformation in PIV. *Experiments in Fluids*, 2006, 41(3): 499-511.
- [23] M. Raffel, C. Willert and J. Kompenhans. *Particle image velocimetry*. Berlin: Springer, 2007: 178-188.
- [24] J. Westerweel, F. Scarano. Universal outlier detection for PIV data. *Experiments in Fluids*, 2005, 39(6): 1096-1100.
- [25] J. Nogueira, A. Lecuona and P. A. Rodriguez. Limits on the resolution of correlation PIV iterative methods: Fundamentals. *Experiments in Fluids*, 2005, 39(2): 305-313.
- [26] J. Nogueira, A. Lecuona, P. Rodriguez, et al. Limits on the resolution of correlation PIV iterative methods. Practical implementation and design of weighting functions. *Experiments in Fluids*, 2005, 39(2): 314-321.
- [27] J. Nogueira, A. Lecuona, U. Ruiz-Rivas, et al. Analysis and alternatives in two-dimensional multigrid particle image velocimetry methods: Application of a dedicated weighting function and symmetric direct correlation. *Measurement Science & Technology*, 2002, 13(7): 963-974.
- [28] D. D. Florio, F. D. Felice and G. P. Romano. Windowing, re-shaping and re-orientation interrogation windows in particle image velocimetry for the investigation of shear flows. *Measurement Science and Technology*, 2002, 13(7): 953.
- [29] F. Scarano. Theory of non-isotropic spatial resolution in PIV. *Experiments in Fluids*, 2003, 35(3): 268-277.
- [30] T. Astarita. Analysis of weighting windows for image deformation methods in PIV. *Experiments in Fluids*, 2007, 43(6): 859-872.