

# Experimental Identification of the First Sloshing Mode of Liquid

Pengxiang Wang, Yuchun Li

Department of Hydraulic Engineering, College of Civil Engineering, Tongji University, Shanghai  
Email: axiango@qq.com, ycl2000@tongji.edu.cn

Received: Dec. 2<sup>nd</sup>, 2017; accepted: Dec. 17<sup>th</sup>, 2017; published: Dec. 26<sup>th</sup>, 2017

---

## Abstract

The sloshing mode of liquid (natural frequency, mode shape and damping ratio) is the important parameter for the design of liquid-storage structure and the vibration control. In this paper, the artificial excitation is used to stimulate the first mode motion of the liquid free surface in container. The decaying free sloshing in the first mode will occur on the liquid free surface after removing the excitation. The decay curves of free vibration of wave height on the several points of liquid surface can be simultaneously measured by the several laser displacement sensors. Thus, the first natural frequency, mode shape and damping ratio of liquid sloshing can be obtained. The experimental frequencies and mode shapes agree well with theoretical results. The present experimental identification method is applicable to the arbitrary tanks.

## Keywords

Liquid Sloshing, Modal Parameter, Experimental Identification

---

# 液体一阶晃动模式的试验识别

王鹏翔, 李遇春

同济大学土木工程学院水利工程系, 上海  
Email: axiango@qq.com, ycl2000@tongji.edu.cn

收稿日期: 2017年12月2日; 录用日期: 2017年12月17日; 发布日期: 2017年12月26日

---

## 摘要

液体的晃动模式(自然频率、振型与阻尼比系数)是贮液结构设计以及振动控制的重要参数, 本文采用人

工激励的方法可容易激发出容器内液体自由表面的一阶模态运动, 撤除激励后液体表面按一阶振型作自由衰减振动, 采用多个激光位移器测量液体表面多个点的波高自由衰减曲线, 从而可得到液体晃动的一阶自然频率、振型和阻尼比系数, 试验测得的晃动频率、振型与理论结果吻合良好, 本文的试验模态识别方法适合于任意形状的容器。

## 关键词

液体晃动, 模态参数, 试验识别

Copyright © 2017 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

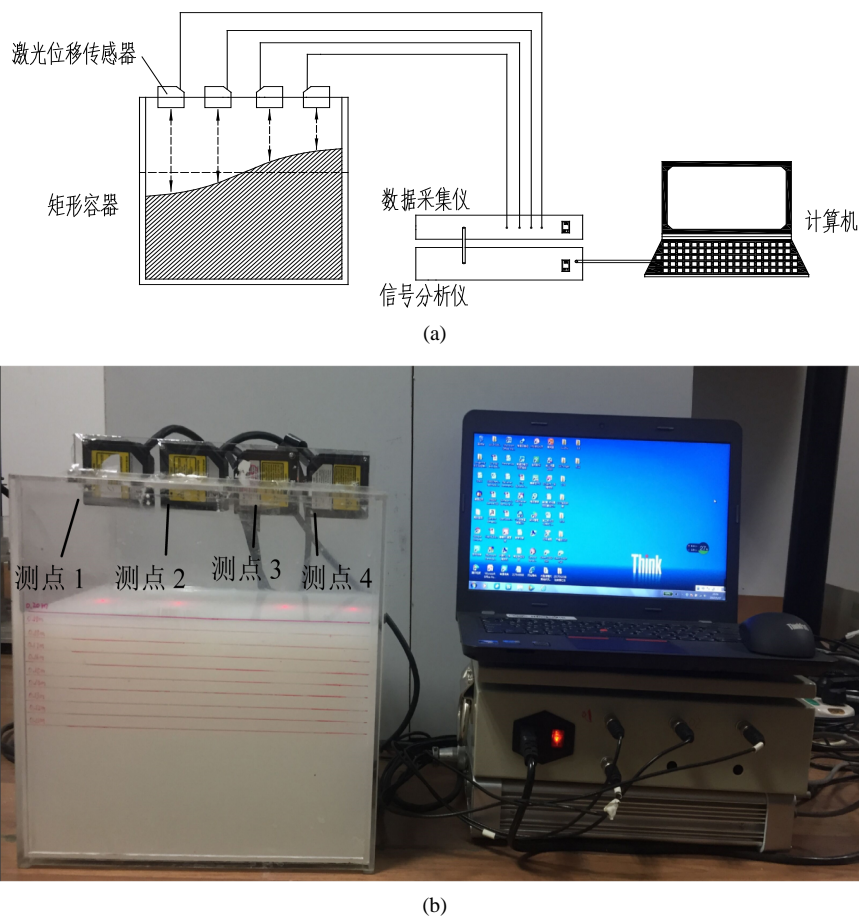
## 1. 引言

贮液容器中的液体一阶晃动频率、振型和阻尼是贮液结构设计以及振动控制的重要参数。液体晃动的模态识别方法包括理论与试验两种方法。Dodge [1], Ibrahim [2], Faltinsen 和 Timokha [3]在他们的专著中对液体晃动模态的一般理论进行了全面而系统的阐述。关于晃动的频率与振型计算, 理论方法比较成熟, 其计算结果和实验基本吻合, 但是晃动阻尼的计算一直是个难题, 尽管也有关于晃动阻尼的解析计算公式[3] [4], 但由于液体计算中的一些理论假设与实际情况不符, 所得计算值与试验结果相差甚远, 因此模态的试验方法不可或缺, 工程中需要采用试验方法对理论进行验证。相对于液体晃动的理论研究而言, 晃动的试验研究相对要少得多, 夏益霖[5]、丁文镜等[6]采用理论与试验的方法研究了液体等效力学模型的参数。

液体晃动模态识别需要测量液体表面的晃动, 现有许多的晃动试验采用浸入液体中的波高仪[3]来测量自由液面的改变, 波高仪的缺点是浸入液体的部分会影响液体晃动的流场, 特别是布置多个波高仪来测量液体振型时, 液体晃动的流场会受到比较大的扰动, 从而会影响测量数据的真实性。一种采用激光测量液面晃动的方法[7] [8]可避免测量对液体晃动流场的影响, 文献[8]采用参数共振的方法激发液体表面, 可得到较高模态的自由表面波形, 但需要昂贵的激振设备, 对于大的贮液容器, 试验费用很高, 且文献[8]并未对液体表面的振型进行测量, 液体一阶晃动模态是最重要的模态, 在一般工程实践中只需知道第一阶模态即可。本文将采用激光测量方法, 通过简单的自由激振方法, 不需要外加的激振设备, 通过布置多个激光位移传感器, 同时测量跟踪自由液面多点的晃动时程, 从而可以容易得到液体晃动的一阶晃动频率、振型与阻尼比系数。

## 2. 试验装置

本文以矩形贮液容器为例, 说明液体晃动模态的试验识别过程。实验装置如图 1 所示, 矩形容器采用有机玻璃制作, 容器内腔水平长度与宽度均为  $2a = 0.30$  m, 内贮水深  $H$  根据试验工况分别为 0.14 m、0.17 m 及 0.20 m, 在容器上方固定 4 个 HL-G112-S-J 型号的激光位移传感器(测量范围:  $120$  mm  $\pm$  60 mm, 分辨率为:  $8$   $\mu$ m), 用于测量液面波高, 激光信号可通过数据采集仪(型号 INV306N-5260)及信号分析仪将光信号转为数值信号传输至计算机, 由计算机可进行数据记录与分析, 在水体中加入微量白色染料使自由液面能反射激光位移传感器发射的激光。



**Figure 1.** Schematic diagram and equipment for sloshing measurement: (a) Schematic diagram for sloshing measurement; (b) Equipment for sloshing measurement  
**图 1.** 晃动测量装置简图与实物照片: (a) 实验装置简图; (b) 实验装置实物照片

### 3. 自由液面波高、频率、振型与阻尼的测量

对于图 2 容器内的液体二维晃动, 所布置的 4 个激光位移传感器的测点位置如表 1 所示, 可在水平方向轻轻推动容器, 可容易激起容器内水体的一阶模态自由晃动波形(见图 3), 通过激光位移传感器可同步测得自由液面上 4 个点的波高时程响应曲线如图 4 所示, 任取其中一个时刻处的 4 个波高值(相对值), 连接这些波高点就可得到自由液面的振型。取图 4 中测点 1(其它测点也可)曲线的某一时间段(如图 5(a)所示), 所取的时间段的波幅应比较小, 避免晃动非线性的影响, 通过对波高响应进行 FFT 变换得到图 5(b)的频谱图, 从图中可容易得到晃动的一阶模态频率  $f_1$ , 一阶晃动模态的阻尼比系数可根据结构动力学的方法[9], 由下式估计:

$$\zeta = \frac{1}{2\pi \cdot (N-1)} \ln \left( \frac{h_1}{h_N} \right) \quad (1)$$

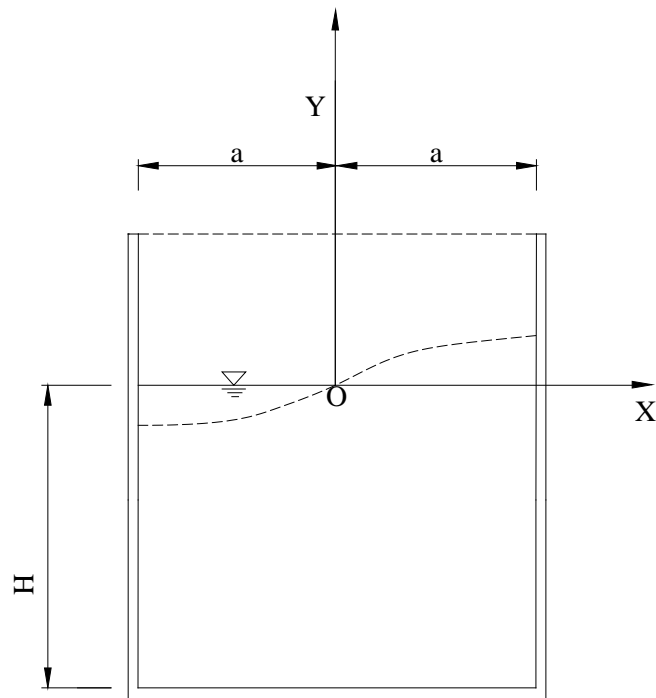
式中:  $h_1$  及  $h_{N+1}$  分别为第 1 及  $N$  个振动循环的波高, 见图 5(a)所示。

### 4. 一阶自然频率、振型和阻尼比系数理论解

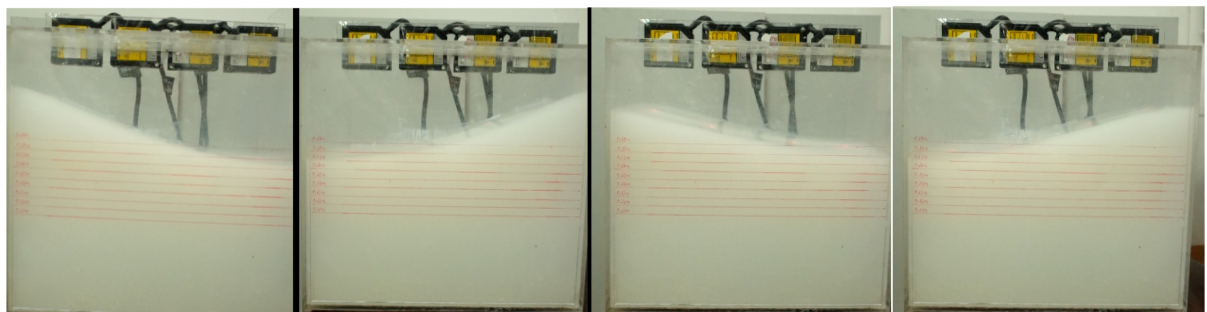
设二维矩形截面水槽内自由水面静止宽度和深度分别为  $2a$  和  $H$ , 则水体一阶晃动(自然)圆频率理论值可以表示为[4]:

**Table 1.** The positions of laser displacement sensors  
**表 1.** 激光位移传感器位置

位移传感器编号	1	2	3	4
位置 X (m)	-0.123	-0.053	0.053	0.123



**Figure 2.** Elevation drawing of rectangular tank  
**图 2.** 矩形容器立面图



**Figure 3.** The oscillogram of the first sloshing mode  
**图 3.** 液体一阶晃动波形图

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\pi g}{2a} \tanh\left(\frac{\pi H}{2a}\right)} \quad (2)$$

自由液面的一阶晃动振型可以表示为:

$$Y(x) = C \sin \frac{\pi}{2a} x \quad (3)$$

其中: C 为任意常数。

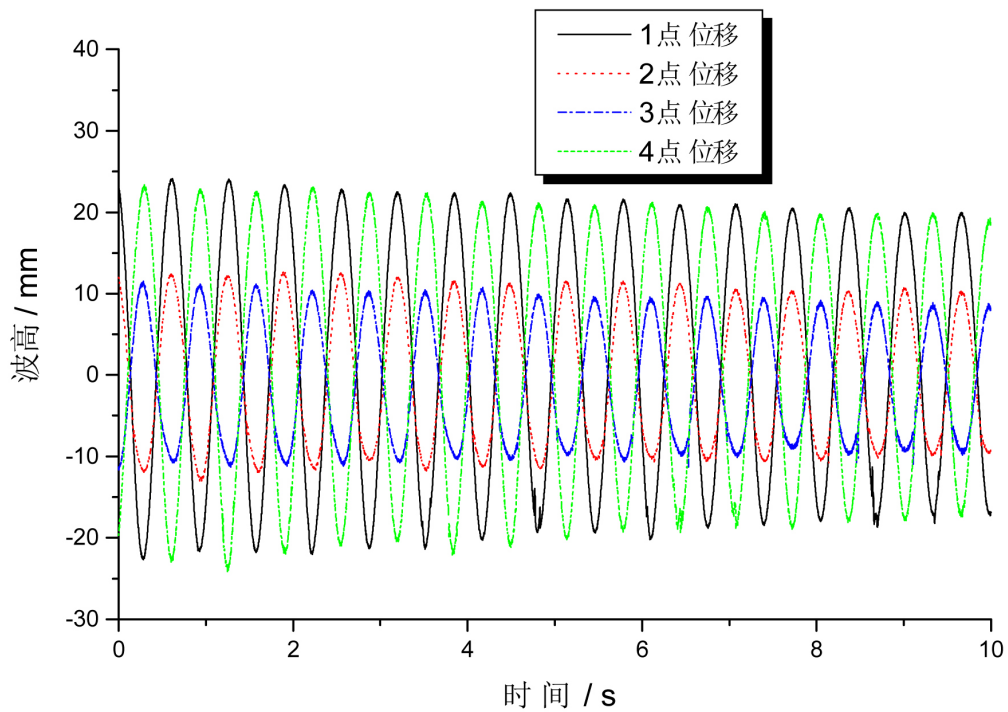


Figure 4. Synchronous wave-height response curves of 4 measuring points  
图 4. 4 个测点的同步波高响应曲线

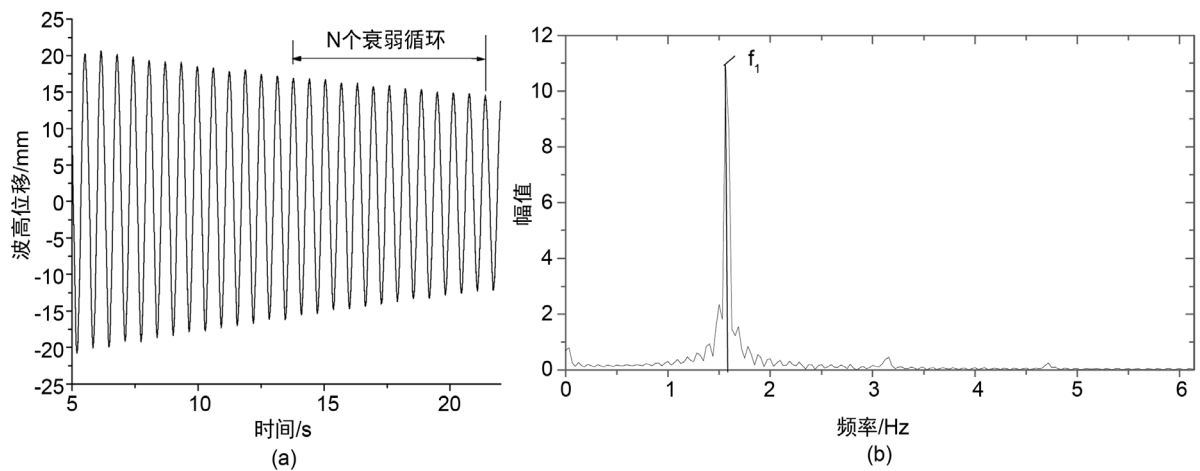


Figure 5. Decay curve of free sloshing wave-height: (a) Time-response curve of wave height; (b) FFT transformation of wave height response  
图 5. 自由晃动波高的衰减曲线: (a) 波高响应时程曲线; (b) 波高响应的 FFT 变换

一阶晃动模态的边界层阻尼可根据 Stokes (层流)边界层理论近似估计, 其一阶阻尼比计算公式如下[4]:

$$\xi_{b1} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu}{2\omega_1}} \cdot \frac{k_1}{\sinh(k_1 H) \cosh(k_1 H)} + \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\nu}{2\omega_1}} \cdot \frac{\frac{1}{2} \sinh(2k_1 H) - k_1 H}{\sinh(k_1 H) \cosh(k_1 H)} + \frac{1}{2b} \sqrt{\frac{\nu}{2\omega_1}} \quad (4)$$

式中:  $k_1 = \pi/(2a)$ ,  $2b$  为矩形截面(水槽)容器的厚度,  $\nu$  为液体的运动粘度系数。20°C 时的水体运动粘度为  $1 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ 。液体作小幅自由晃动时, 液体内部的粘性耗散可以采用耗散函数来计算[3], 矩形容器

内二维晃动第一阶体阻尼比系数可以由下式估计:

$$\xi_{v1} = \frac{2\nu k_1^2}{\omega_1} \quad (5)$$

于是总的一阶粘性阻尼比系数为:

$$\xi_1 = \xi_{b1} + \xi_{v1} \quad (6)$$

液体晃动的自然频率与振型也可采用数值(例如: Ansys 有限元程序)方法计算, 可适用于不同的几何形状。

利用 Ansys 程序进行计算时, 选用 Fluid80 单元模拟容器内水体的晃动。Fluid80 单元是专门用来模拟容器内流体的单元, 较适合计算和模拟流体静压力、流体固体相互作用的情况和流体晃动等, 水体的体积压缩模量可近似地取为  $K = 2.067 \times 10^9 (P_a)$ 。采用缩减法进行模态分析, 自由水面的法向 Z 轴方向定义为主自由度, 水体与刚性水槽间接触面按滑动边界处理, 即刚性水槽与液体法向相对位移强制为零, 切向相对位移不施加约束。关于晃动模拟的 Ansys 程序计算细节可参见文献[4]。

## 5. 试验结果与理论值的比较

采用人工激励的方式, 测量容器内水体自由衰减阶段(激振骤然停止后的液面自由晃动)的水体晃动频率、振型与阻尼比系数, 将试验测量的一阶晃动频率、式(2)的理论值以及 Ansys 计算值列于表 2, 由表 2 可知, 理论计算结果(解析与数值解)和试验结果吻合良好。图 6 为水槽的水深  $H = 0.2 \text{ m}$ , 长宽均为  $2a = 0.3 \text{ m}$  时, Ansys 计算的液体一阶晃动模态图。图 7 为相应的一阶晃动理论振型图和实验测点的振型图, 理论振型与试验测点的振型吻合良好。

将试验测得液体一阶晃动阻尼比结果、式(4)~(6)计算的理论阻尼比列于表 3, 由表可以看出, 理论阻尼比系数比试验值偏小, 理论计算和试验结果的最大相对误差为 29.545%, 最小相对误差也达到了 21.667%。这是因为理论公式是根据层流边界层理论得到的, 而实际的流动有紊流成分, 此外理论阻尼中并未包含自由表面张力以及毛细作用等的影响, 理论假设难以与真实流动状况符合, 理论结果将低估实际液体的晃动阻尼。

**Table 2.** The first natural frequencies of liquid sloshing in a rectangular container

**表 2.** 矩形容器内液体一阶晃动自然频率

水深 H (m)	频率试验值(Hz)	频率 Ansys 计算值(Hz)	频率理论计算值(Hz)
0.14	1.516	1.507	1.529
0.17	1.547	1.538	1.567
0.20	1.574	1.559	1.588

**Table 3.** The first damping ratios of liquid sloshing in a rectangular container

**表 3.** 矩形容器内液体一阶晃动阻尼比(%)

水深 H (m)	边界层阻尼比 $\xi_{b1}$	体阻尼比 $\xi_{v1}$	理论阻尼比 $\xi_1$	阻尼比试验值
0.14	0.192	0.00283	0.195	0.251
0.17	0.186	0.00223	0.188	0.240
0.20	0.184	0.00220	0.186	0.264

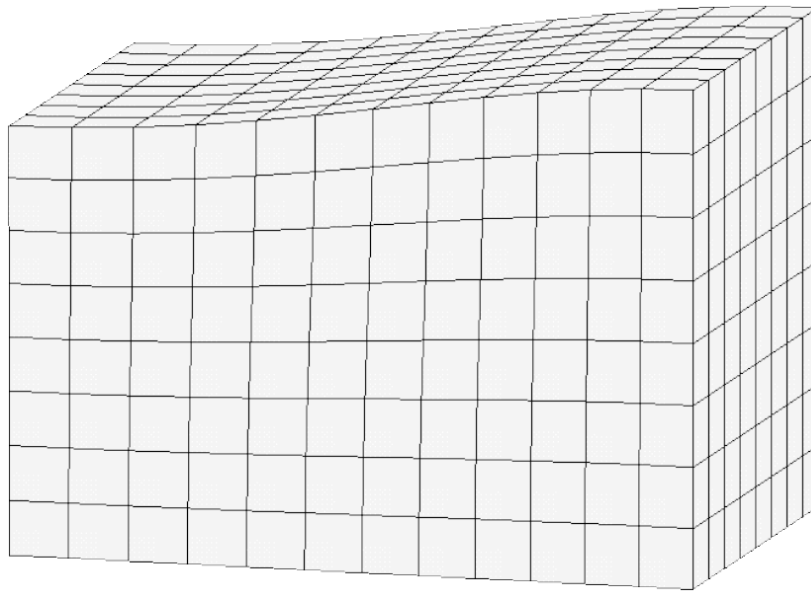


Figure 6. The first sloshing mode of liquid (Ansys result)

图 6. 液体一阶晃动模态图(Ansys 结果)

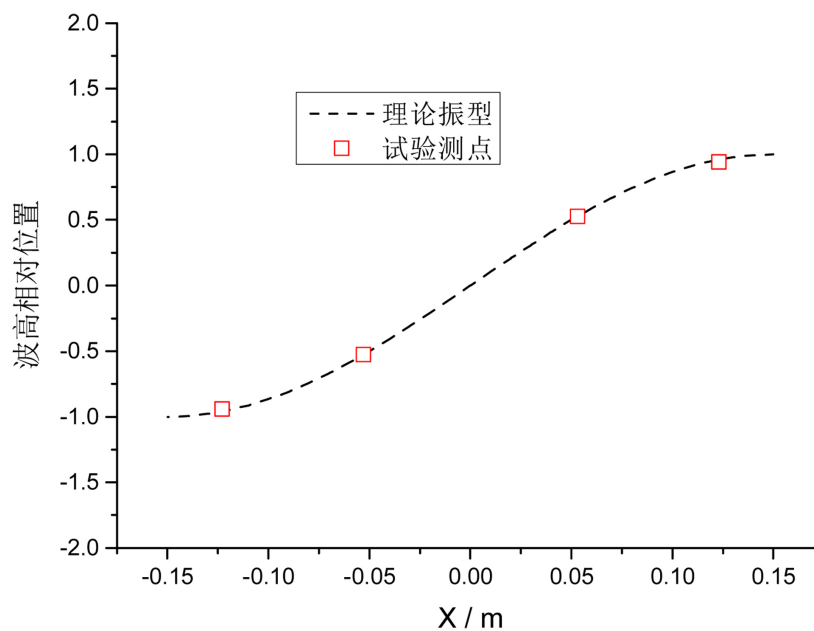


Figure 7. The first sloshing mode of liquid

图 7. 液体一阶晃动振型图

## 6. 结论

本文通过布置多个激光位移传感器可同时测量液面多个点的晃动, 利用人工激励的方式, 可容易激发容器内一阶晃动模态, 从而可测得液体一阶自由晃动频率、振型与阻尼比系数。将试验测得的晃动频率、振型与对应的理论结果进行了比较, 实验与理论结果吻合良好, 但理论阻尼比系数比试验值要小许多, 其原因有: 理论公式是根据层流边界层理论得到的, 而实际有紊流成分, 理论难以与真实流动状况符合, 此外理论阻尼并未包含自由表面张力以及毛细作用等的影响。本文液体晃动模态识别方法同样适

用于任意形状的容器。

### 参考文献 (References)

- [1] Dodge, F.T. (2000) The New “Dynamic Behavior of Liquids in Moving Containers”. Southwest Research Institute, San Antonio, TX.
- [2] Ibrahim, R.A. (2005) Liquid Sloshing Dynamics: Theory and Applications. Cambridge University Press, Cambridge. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511536656>
- [3] Faltinsen, O.M. and Timokha, A.N. (2009) Sloshing. Cambridge: Cambridge University Press.
- [4] 李遇春. 液体晃动动力学基础[M]. 北京: 科学出版社, 2017.
- [5] 夏益霖. 液体晃动等效力学模型的参数识别[J]. 应用力学学报, 1991, 8(4): 27-35.
- [6] 丁文镜, 曾庆长. 晃动液体单摆模型动力学参数的频域辨识[J]. 振动工程学报, 1992, 5(3): 211-218.
- [7] Li, Y. and Wang, Z. (2016) Unstable Characteristics of Two-Dimensional Parametric Sloshing in Various Shape Tanks: Theoretical and Experimental Analyses. *Journal of Vibration and Control*, **22**, 4025-4046. <https://doi.org/10.1177/1077546315570716>
- [8] 王立时, 李遇春, 张皓. 二维晃动自然频率与阻尼比系数的试验识别[J]. 振动与冲击, 2016, 35(8): 173-176.
- [9] Clough, R.W. and Penzien, J. (2003) Dynamics of Structures. 3rd Edition, Computers & Structures, Inc., Berkeley, CA.

#### 知网检索的两种方式:

1. 打开知网页面 <http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD>  
下拉列表框选择: [ISSN], 输入期刊 ISSN: 2328-0557, 即可查询
2. 打开知网首页 <http://cnki.net/>  
左侧“国际文献总库”进入, 输入文章标题, 即可查询

投稿请点击: <http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱: [ijfd@hanspub.org](mailto:ijfd@hanspub.org)