International Journal of Mechanics Research 力学研究, 2016, 5(4), 148-155
Published Online December 2016 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/ijm
http://dx.doi.org/10.12677/ijm.2016.54014

A Unified Differential-Integral Quadrature Method

Xi Liu, Zheng Zhang

Institute of Solid Mechanics, Beihang University, Beijing
Email: jordanzzhang@buaa.edu.cn

Received: Dec. 2nd, 2016; accepted: Dec. 19th, 2016; published: Dec. 22nd, 2016

Abstract

The combination of the differential quadrature method and potential energy principle is greatly helpful to solve mechanical problems with local particularity. This kind of solutions is not only related to differential calculation, but also to integral calculation. In order to simplify such kind of calculation process and improve the computational efficiency, this paper presents an unified differential-integral quadrature method (D-IQM), based on the original concepts of differential/integral quadrature method, to calculate weight coefficients of differential/integral quadrature in an unified format of mathematics. The results from D-IQM were compared with the analytical solutions, demonstrating the advantages of this method in convergency, accuracy and stability, and robusticity on application.

Keywords

Differential Quadrature Method, Integral Quadrature Method, Potential Energy Principle, Weighting Coefficient

统一化的微分－积分求积法

刘　曦，张　铮

北京航空航天大学，固体力学研究所，北京
Email: jordanzzhang@buaa.edu.cn

收稿日期：2016年12月2日；录用日期：2016年12月19日；发布日期：2016年12月22日

文章引用: 刘曦, 张铮. 统一化的微分－积分求积法[J]. 力学研究, 2016, 5(4): 148-155.
http://dx.doi.org/10.12677/ijm.2016.54014

摘　要

传统微分求积法和势能原理相结合有助于解决具有局域特殊性的力学问题，因此，求解这类问题时不仅涉及微分计算，还涉及积分计算。为简化计算流程，提高计算效率，本文基于微分/积分求积法的思想，提出了统一化的微分/积分求积的权系数计算方法，从而形成统一化的微分－积分求积法，并将此计算方法得到的结果与解析解进行比较，验证了该方法在收敛速度、求解精度、稳定性、应用范围方面的优势。

关键词

微分求积法，积分求积分，势能原理，权系数

1. 引言

微分求积法(DQM) [1]具有计算逻辑简明、程序过程紧凑、计算量少、计算精度高等优点，近年来已经被广泛应用于众多研究领域[2] [3]。但是，DQM 在求解具有局域特殊性问题时，其计算收敛性和准确性受到很大影响，为了改善这一问题，一些研究者将 DQM 与势能原理相结合[4]，使得求解过程中同时存在数值微分和积分。对于势能泛函中的微分和积分计算，现有做法是利用微分求积法离散微分形式，利用 Gauss-Lobatto 求积、积分求积法[5]及其他求积方法来离散积分形式[6] [7]。由于微分和积分需要分开离散，且易受微积分计算节点不统一的约束，导致计算流程较为繁琐，计算效率降低。有鉴于此，本文提出了基于 DQM 和积分求积法(Integral Quadrature Method，简称 IQM)思想的统一化的微分－积分求积法(Differential-Integral Quadrature Method，简称 D-IQM)，建立计算微分求积法和积分求积法的权系数的统一方式，进一步提高了势能原理框架下的新型数值方法 D-IQM 的计算效率，从而有利于解决局域特殊性问题。

2. 原理简介

2.1. 微分求积法

微分求积法(DQM)的基本原理：函数 $f(x)$ 在区间[a,b]上连续可微，则其在给定节点处的导数值可以表示为域内全部离散节点的函数值的加权和，即

$$f(x_i)=\sum_{j=1}^{N} l_j(x_i) f(x_j) \tag{1}$$

其中，$l_j(x)$ 是插值基函数，函数的高阶导数可表示为：

$$f^{(k)}(x_i)=\sum_{j=1}^{N} A_{ij}^{(k)} f(x_j) \tag{2}$$

式中，$A_{ij}^{(k)}$ 为 k 阶导数加权系数。

若基函数采用拉格朗日插值多项式，则一阶导数权系数表达式如下：

$$\begin{cases} A_{ij}^{(1)}=\dfrac{\phi(x_i)}{(x_i-x_j)\phi(x_j)} \quad (i\neq j) \\ A_{ii}^{(1)}=-\sum\limits_{j=1,j\neq i}^{M} A_{ij}^{(1)} \end{cases} \tag{3}$$

其中，$\phi(x_i)=\prod_{k=1,k\neq i}^{N}(x_i-x_k)$。已知一阶权系数，各高阶权系数 $A_{ij}^{(k)}$ 可由下式推出：

$$A_{ij}^{(k)}=\sum_{k=1}^{n}A_{ik}^{(1)}A_{kj}^{(k-1)}=\sum_{k=1}^{n}A_{ik}^{(2)}A_{kj}^{(k-2)}=\cdots\sum_{k=1}^{n}A_{ik}^{(k-1)}A_{kj}^{(1)}\qquad i,j=1,2,\cdots,N \tag{4}$$

2.2. 统一化的微分－积分求积法(D-IQM)

下面，基于 DQM 和积分求积法(Integral Quadrature Method，简称 IQM)思想，本文提出统一化的微分－积分求积法(Differential-Integral Quadrature Method，简称 D-IQM)，建立计算微分求积法和积分求积法的权系数的统一方式。

设定在区间[a,b]上连续可微的函数 $F(x)$、$f(x)$，对 $F(x)$ 进行 n 阶求导，有

$$F^{n}(x_i)=f(x_i) \tag{5}$$

式(5)结合 DQM，且设 $f(x_i)=f_i$，$F(x_i)=F_i$，则

$$f_i=\sum_{j=1}^{N}A_{ij}^{(n)}F_j \tag{6}$$

一般的，设

$$\begin{gathered}\boldsymbol{f}=\left[f_1\cdots f_N\right]^{\mathrm{T}}\qquad \boldsymbol{F}=\left[F_1\cdots F_N\right]^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{A}^{(n)}=A_{ij}^{(n)}=\begin{bmatrix}A_{11}^{(n)} & \cdots & A_{1N}^{(n)}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{N1}^{(n)} & \cdots & A_{NN}^{(n)}\end{bmatrix}\end{gathered} \tag{7}$$

则式(6)可以表达为如下矩阵形式：

$$\boldsymbol{f}=\boldsymbol{A}^{(n)}\boldsymbol{F} \tag{8}$$

$$\boldsymbol{F}=\left[\boldsymbol{A}^{(n)}\right]^{-1}\boldsymbol{f} \tag{9}$$

$f(x)$ 的一次积分可以表达[2]为：

$$\int_{x_{i1}}^{x_{i2}}f(x)\mathrm{d}x=\int_{c}^{x_{i2}}f(x)\mathrm{d}x-\int_{c}^{x_{i1}}f(x)\mathrm{d}x \tag{10}$$

其中，c 为积分区域外任意一点，由上述关系可得：

$$\int_{c}^{x_{i1}}f(x)\mathrm{d}x=F^{n-1}(x_{i1})-F^{n-1}(c)=\sum_{j=1}^{N}A_{i1j}^{(n-1)}F_j-F^{n-1}(c) \tag{11}$$

$$\int_{c}^{x_{i2}}f(x)\mathrm{d}x=F^{n-1}(x_{i2})-F^{n-1}(c)=\sum_{j=1}^{N}A_{i2j}^{(n-1)}F_j-F^{n-1}(c) \tag{12}$$

式(10)可进一步表示为：

$$\int_{x_{i1}}^{x_{i2}}f(x)\mathrm{d}x=\sum_{j=1}^{N}\left(A_{i2j}^{(n-1)}-A_{i1j}^{(n-1)}\right)F_j \tag{13}$$

一般的，设

$$\begin{gathered}A_{I}^{(n-1)}=A_{i1j}^{(n-1)}=\left[A_{i11}^{(n-1)}\quad A_{i12}^{(n-1)}\quad\cdots\quad A_{i1n}^{(n-1)}\right]\\ A_{II}^{(n-1)}=A_{i2j}^{(n-1)}=\left[A_{i21}^{(n-1)}\quad A_{i22}^{(n-1)}\quad\cdots\quad A_{i2n}^{(n-1)}\right]\end{gathered} \tag{14}$$

式(13)的矩阵表达式如下

$$\int_{x_{i1}}^{x_{i2}} f(x)\mathrm{d}x = \left(\boldsymbol{A}_{II}^{(n-1)} - \boldsymbol{A}_{I}^{(n-1)}\right)\left[\boldsymbol{A}^{(n)}\right]^{-1}\boldsymbol{f} \tag{15}$$

因此，可以利用微积分统一形式的权系数计算方法解决微分计算和积分计算。

对于上述方法中 $n=1$ 的特殊情况，参看式(5)可知 $f(x)$ 的积分为原函数 $F(x)$，设插值基函数 $l_j(x)$，$\overline{l}_i$ 为插值函数的系数矩阵，则有

$$F(x_i) = \sum_{j=1}^{N} l_{ij}F_j = \overline{l}_i\boldsymbol{F} \tag{16}$$

因此，由式(13)可知

$$\int_{x_{i1}}^{x_{i2}} f(x)\mathrm{d}x = F(x_{i2}) - F(x_{i1}) = \left(\overline{l}_{i2} - \overline{l}_{i1}\right)\boldsymbol{F} \tag{17}$$

结合式(9)，

$$\int_{x_{i1}}^{x_{i2}} f(x)\mathrm{d}x = \left(\overline{l}_{i2} - \overline{l}_{i1}\right)\boldsymbol{F} = \left(\overline{l}_{i2} - \overline{l}_{i1}\right)\left[\boldsymbol{A}^{(1)}\right]^{-1}\boldsymbol{f} = \sum_{j=1}^{N} C_j f_j = \boldsymbol{Cf} \tag{18}$$

式中 C_j 为统一化的集成权系数。

至此，我们得到了一套计算微分求积法和积分求积法的权系数的统一方式，即根据微分求积法方式所确定的权系数，在求解积分问题时可以采用式(15)进行计算；特别是当 n = 1 时可以采用式(18)进行计算。上述方式有助于提高新型数值方法 D-IQM 的计算效率，从而进一步拓展微分求积法的应用范围。

2.3. 基于势能原理的微分－积分求积法(D-IQM)

势能原理以变分形式表示物理定律[8]，即在满足一定约束条件的所有可能物体运动状态中，真实的运动状态使某物理量(如势能泛函)取极值或驻值。对于复杂结构，特别是具有局部特殊性的问题，引进势能泛函，应用 D-IQM 进行离散计算，有助于求解这类问题，改善计算结果的收敛性与准确性。

一般来讲，一维梁结构的总势能泛函表达式[9]如下：

$$\Pi = \int_0^L \left[\frac{1}{2}EI\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 - qw\right]\mathrm{d}x \tag{19}$$

根据 D-IQM，上式离散成如下表达形式：

$$\Pi = \int_0^L \left[\frac{1}{2}EI\left(\sum_{j=1}^{n} A_{ij}^{(2)} w_j\right)^2 - qw\right]\mathrm{d}x \tag{20}$$

定义下列矩阵及向量：

$$\boldsymbol{B} = \left[A_{ij}^{(2)}\right]_{n\times n} \qquad \boldsymbol{w} = \left[w_1, w_2, \cdots, w_{n-1}, w_n\right] \tag{21}$$

那么势能泛函式（20）可以写成矩阵表达形式：

$$\Pi = \frac{EI}{2}\int_0^L \left[\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Bw} - \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}\right]\mathrm{d}x \tag{22}$$

根据最小势能原理，结合式（21）中定义的权系数矩阵有

$$\delta\Pi = \delta\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\left(EI\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}C\boldsymbol{Bw} - C\boldsymbol{q}\right) = \delta\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{Kw} - \boldsymbol{Q}\right) = 0 \tag{23}$$

其中，在一维问题中，梁的刚度矩阵 $\boldsymbol{K}$ 为

$$\boldsymbol{K} = EI\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B} \tag{24}$$

梁的载荷矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 为

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{q} \tag{25}$$

在微分－积分求积法中，仍然可以采用方程替代法将边界条件加入到刚度矩阵中去，在此不再详述。

无论一维或是二维的局域性问题，结合势能原理的微分求积法具有良好的计算稳定性、收敛性及准确性，这主要是因为在势能原理的框架下，不仅方程中需要求导的阶次降低，而且泛函的形式更有利于局域载荷在求解中的处理，这些都有利于 DQM 更好地解决局域特殊性问题。

3. 实例结果及分析

3.1. 简单函数

为了检验上述微分－积分求积法(D-IQM)的正确性，现以若干简单函数(参见表 1)为例进行对比。

所求结果与精确解对比如图 1 所示，可以发现以 D-IQM 所求结果与精确解近似，并随着节点的增多，呈现出较好的准确性、收敛性，计算结果有着良好的稳定性。

3.2. 力学问题

本文提出的 D-IQM 沿承了传统 DQM 的计算逻辑，在势能原理的框架下同样可以更好的处理应用性问题。为了进一步验证 D-IQM 的应用性，将其与势能原理结合(参见 2.3 节有关推导)求解具有局域特殊性的实际问题，下面以梁为例。

如图 2 所示，梁的材料弹性模量为 $E = 100$ GPa，泊松比 $\mu = 0.3$，梁长 $l = 1$ m，梁横截面高 $h = 0.02$ m，宽 $b = 0.01$ m，坐标轴 x 以梁的左端为原点，梁的载荷类型及边界条件如表 2 所示，其中 q 为分布于全梁的均布载荷。

表 2 中“精确解”和“本文解”均指梁的最大挠度，其中，“本文解”即采用本文提出的 D-IQM 得到的解。从表 2 可以看出，上述两种解对于表 2 所列各种梁问题都取得了较为一致的结果。图 3 显示了

Table 1. Integrable function and integral interval
表 1. 被积函数及积分区间

CASE	被积函数	积分域	精确解	本文解	误差(%)
1	$f(x) = x$	[0,1]	0.5	0.4958	−0.84
2	$f(x) = x^2$	[0,1]	0.333	0.3298	−0.96
3	$f(\mathrm{x}) = x^3$	[0,1]	0.25	0.2498	−0.08
4	$f(\mathrm{x}) = x^4$	[0,1]	0.2	0.1975	−1.25
5	$f(x) = x^2+2$	[0,1]	2.333	2.3306	−0.10
6	$f(x) = \sin x$	[0,π]	2	2.002	0.10
7	$f(x) = \cos x$	[0,π]	0	0.0016	0.16
8	$f(x) = 2^x$	[2,3]	5.771	5.7706	−0.007

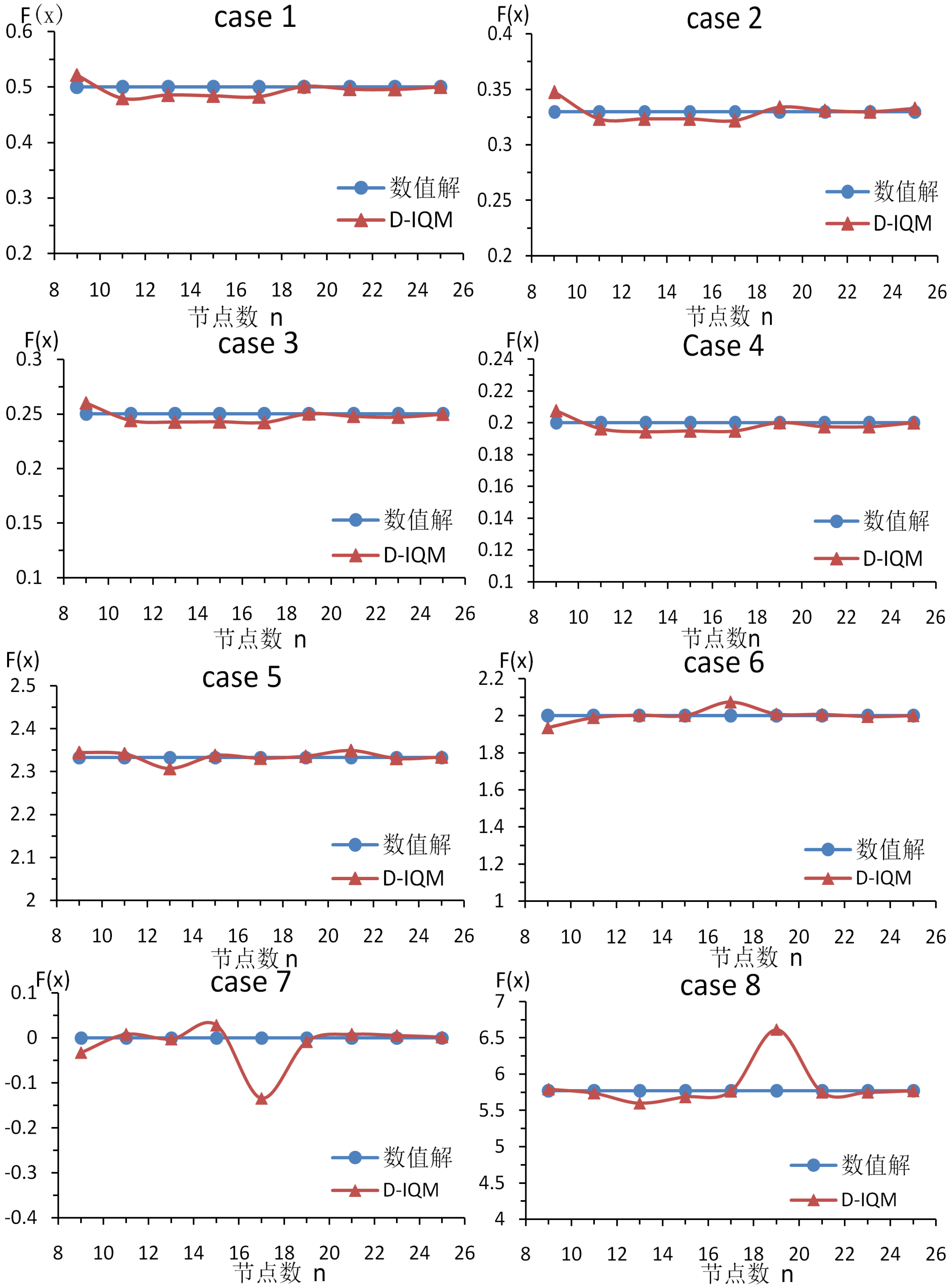

Figure 1. Curve: Comparison of numerical results and numerical solutions
图 1. 计算结果与数值解对比图

Table 2. Load type and boundary condition of beam
表 2. 梁的载荷类型及边界条件

CASE	载荷类型	边界条件	精确解	本文解	误差(%)
1	q = 1 kN/m	两端简支	0.0195	0.0197	1.03
2	q = 1 kN/m	两端固支	0.0039	0.0040	2.56
3	q = 1 kN/m	左固支右简支	0.0081	0.0082	1.23
4	P = 100 N	两端简支	0.0031	0.0032	3.23

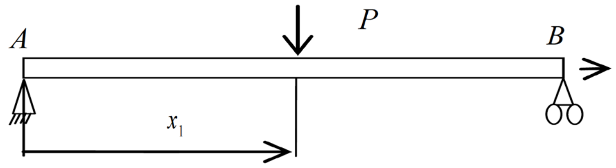

Figure 2. Simply supported beam of single concentrated force
图 2. 单集中力作用下的简支梁

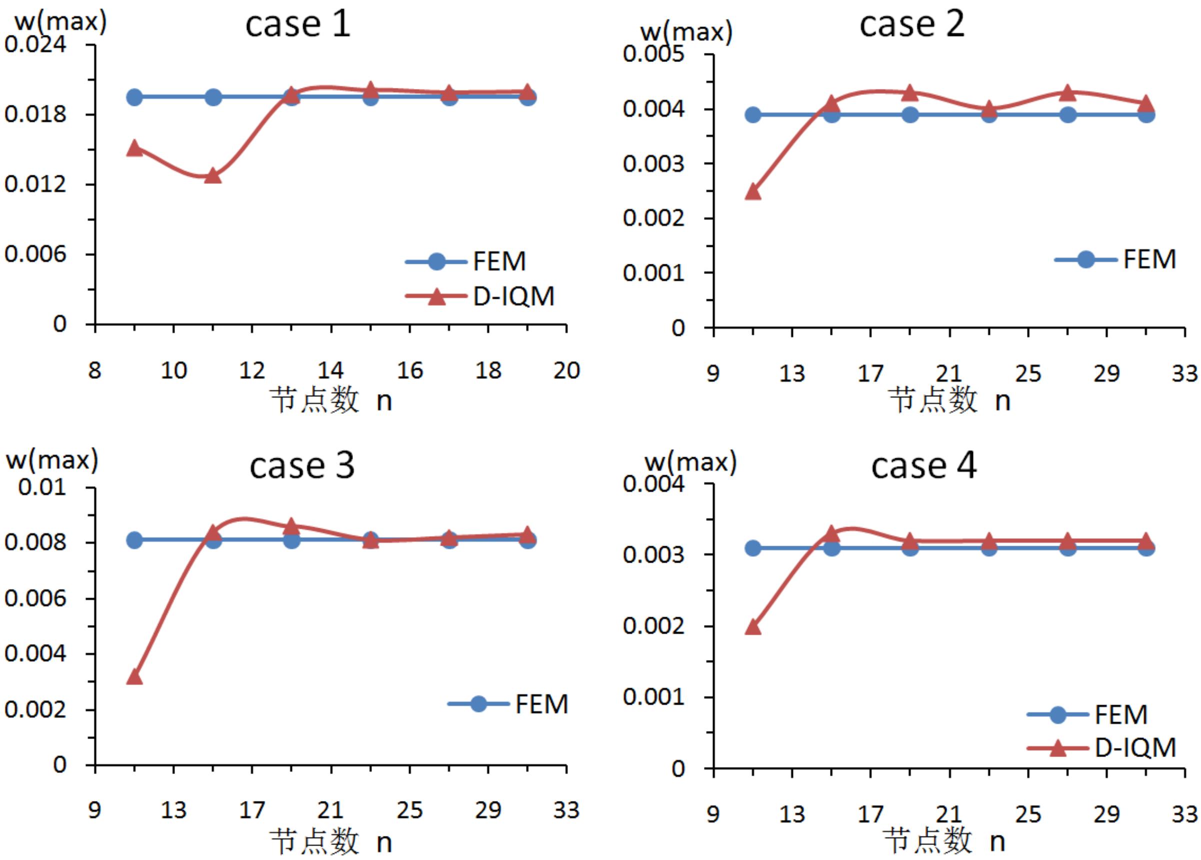

Figure 3. Curve: maximum deflection of beam
图 3. 梁最大挠度收敛情况

本文 D-IQM 求解的收敛趋势，由该图可知，D-IQM 解随着节点数增多逐渐收敛于有限元值，并保持了良好的稳定性。这些结果表明，统一化的微分－积分求积法在保持原有 DQM 计算逻辑的简明性前提下，具有良好的数值计算性能，以及良好的应用性；同时，微分权系数计算方法和积分求积法计算方法的统一有助于简化计算逻辑，提高计算效率。

4. 结论

本文基于 DQM 和积分求积法，本文提出统一化的微分－积分求积法(简称 D-IQM)，建立了计算微分求积法和积分求积法的权系数的统一方式，根据微分求积法的权系数计算积分权系数，从而简化了计算逻辑。文中对基础函数积分进行计算，通过对比讨论证明了该方法在收敛速度、求解精度、稳定性、应用范围方面的良好性能。进一步通过力学问题实例的求解，证明新型数值方法 D-IQM 可以有效提高势能原理框架下相关问题的计算效率，从而有利于解决局域特殊性问题。上述应用实例从不同侧面说明了本文提出的 D-IQM 的应用性和有效性。

参考文献 (References)

[1] Bellman, R. and Casti, J. (1971) Differential Quadrature and Long-Term Integration. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **34**, 235-238. https://doi.org/10.1016/0022-247X(71)90110-7

[2] 朱媛媛，胡育佳，程昌钧. 流体饱和多孔弹性柱体动力响应的微分求积法[J]. 计算力学学报，2010，27(5): 868-873.

[3] 钮耀斌，王中伟. 高速小展弦比机翼颤振的微分求积法分析[J]. 计算力学学报, 2012, 29(6): 835-840.

[4] 薛雯静，钟宏志. 三维问题的弱形式求积元分析[D]: [硕士学位论文]. 北京：清华大学, 2008.

[5] Shu, C. (2000) Differential Quadrature and Its Application in Engineering. Springer, Berlin. https://doi.org/10.1007/978-1-4471-0407-0

[6] 肖乃佳，钟宏志. 基于几何精确梁理论的框架的弱形式求积元分析[D]: [硕士学位论文]. 北京：清华大学, 2011.

[7] 付云浩. 微分求积法在局域特殊问题中的应用[D]: [硕士学位论文]. 北京：北京航空航天大学, 2013: 13-39.

[8] 胡海昌. 弹性力学的变分原理及其应用[M]. 北京：科学出版社, 1998.

[9] 邢誉峰，李敏. 计算固体力学原理与方法[M]. 北京：北京航空航天大学, 2011: 230-244.