

Numerical Study on the Prohibited Area and Transfer Orbit of the Sun-Jupiter-Trojans-Greeks-Spacecraft System

Jiaqing Xu, Fabao Gao*, Wen Hu, Li Wang, Yuexing Chen

College of Mathematical Science, Yangzhou University, Yangzhou Jiangsu

Email: *gaofabao@sina.com, 913380686@qq.com

Received: May 17th, 2017; accepted: Jun. 4th, 2017; published: Jun. 7th, 2017

Abstract

Based on the Sun-Jupiter-Trojans-Greeks-Spacecraft System, the authors of this paper established a dynamical equation of the spacecraft, studied the prohibited area of the spacecraft on different Jacobi constants with Matlab software and designed a transfer orbit from Jupiter to Trojans.

Keywords

Jacobi Constant, Prohibited Area, Transfer Orbit, Numerical Simulation

太阳-木星-特洛伊小行星群-希腊小行星群-航天器系统的禁飞区域和转移轨道的数值研究

徐嘉庆, 高发宝*, 胡文, 王丽, 陈悦欣

扬州大学数学科学学院, 江苏 扬州

Email: *gaofabao@sina.com, 913380686@qq.com

收稿日期: 2017年5月17日; 录用日期: 2017年6月4日; 发布日期: 2017年6月7日

摘要

基于太阳-木星-特洛伊小行星群-希腊小行星群-航天器系统, 建立了航天器的动力学方程, 结合Matlab软件研究了在不同的Jacobi常数下航天器的禁飞区域, 并设计了一条从木星飞往特洛伊小行星的转移轨道。

*通讯作者。

文章引用: 徐嘉庆, 高发宝, 胡文, 王丽, 陈悦欣. 太阳-木星-特洛伊小行星群-希腊小行星群-航天器系统的禁飞区域和转移轨道的数值研究[J]. 力学研究, 2017, 6(2): 82-91. <https://doi.org/10.12677/ijm.2017.62010>

关键词

Jacobi常数, 禁飞区域, 转移轨道, 数值模拟

Copyright © 2017 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在深空探测的三体问题中, 假设其中一个天体质量相对于另外两个天体的质量可以忽略不计, 这样的三体问题称为限制性三体问题。如果三体中的两个有限质量体以一定角速度绕其公共质心做匀速圆周运动, 这样的三体问题称为圆型限制性三体问题[1] [2]。如果在系统中再加入两个天体就称为限制型五体问题。这类系统在宇宙中也是实际存在的, 比如太阳-木星-特洛伊小行星群-希腊小行星群-航天器(本文将两个小行星群近似看作两个整体)。特洛伊小行星群是极早期太阳系中形成外侧大行星留下的原始遗迹, 这些小天体包含了有关于太阳系历史的关键信息。对于它们的研究有望革新我们对于自身起源的认识。

本文主要研究太阳-木星-特洛伊小行星群-希腊小行星群-航天器这一特殊系统, 结合当前航天工程研究热点, 探讨航天器在系统下的能量曲面结构和 Jacobi 常数的关系, 寻找航天器的飞行区域和禁飞区域的临界位置。此外, 运用 Matlab 软件数值模拟出一条航天器介于木星和特洛伊小行星群之间的转移轨道。该轨道能够有效的减少航天器消耗的燃料量。由于特洛伊小行星群及希腊小行星群位于拉格朗日特解所确定的区域, 本项目对于研究三角平动点附近运动的周期轨道的存在性和稳定性问题[3], 不仅有着较高的理论价值, 还具有一定的实用意义。

2. 限制性五体系统建模及分析

考虑太阳-木星-特洛伊小行星群-希腊小行星群系统(如图 1)。

航天器 P 的质量相对于太阳, 木星, 特洛伊小行星群和希腊小行星群来说可忽略不计, 所以不考虑航天器对他们的吸引。此外, 我们将特洛伊小行星群和希腊小行星群均视为一个整体来进行分析。在两个常用的坐标系中, 即质心惯性坐标系 $OXYZ$ 和质心转动坐标系 $oxyz$ 。质心惯性系统 $OXYZ$ 是由航天器 P , 太阳 S , 木星 J , 特洛伊小行星群 T , 希腊小行星群 G 组成的系统(如图 2)。原点 O 是系统的质心。其中 $X-Y$ 平面是太阳-木星-特洛伊小行星群-希腊小行星群的轨道平面, S 、 J 、 T 和 G 绕它们的公共质心做圆周运动, 航天器 P 只受到 S 、 J 、 T 和 G 的引力作用。 X 轴由 S 指向 J , Y 轴与之垂直并满足右手坐标系(默认 Z 垂直于轨道平面 $X-Y$)。 P 、 S 、 J 、 T 和 G 的质量分别为 m 、 m_s 、 m_j 、 m_T 和 m_G , 且 $m_T \ll m_s$, m_j , m_T , m_G 。

为了便于研究, 无量纲长度单位取 $P_S P_J + P_G P_T = 1$, 其中 P_S, P_J, P_G, P_T 分别为太阳, 木星, 希腊小行星群, 特洛伊小行星群的位置坐标。图 2 中的 θ 表示 P_S 和 P_J 的连线绕其质心所转过的角度。系统的质量比率 $\mu = m_T / (m_G + m_s + m_j + m_T)$ 。质心转动坐标系的原点 o 和质心惯性坐标系的原点 O 重合, 其坐标轴 x 和 y 以单位角速度绕其质心做逆时针转动(相对于惯性坐标系的 X 轴和 Y 轴), 不妨假设两个坐标系在时间 $t = 0$ 时重合, 则有 $\theta = t$ 。由图 2 所示, 在 $oxyz$ 中, S 、 J 、 T 和 G 保持静止, 坐标分别为: $P_S = (-\mu, 0, 0)$, $P_J = ((\sqrt{3}-1)/2 - \mu, 0, 0)$, $P_T = ((\sqrt{3}-1)/4 - \mu, (\sqrt{3}-3)/4, 0)$, $P_G = ((\sqrt{3}-1)/4 - \mu, (\sqrt{3}+3)/4, 0)$, 第五体 P 的坐标记为 (x, y, z) , 则有[4]

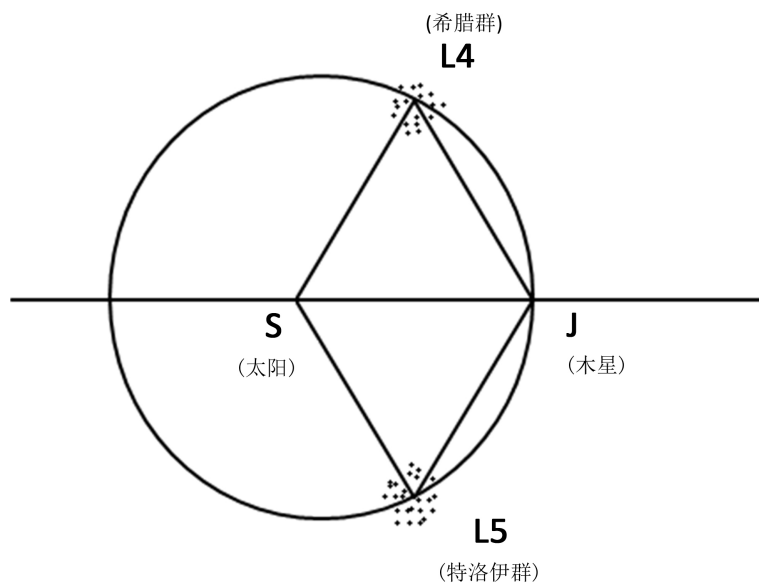


Figure 1. The location of the Sun-Jupiter-Trojans-Greeks system
 图 1. 太阳-木星-特洛伊小行星群-希腊小行星群位置图

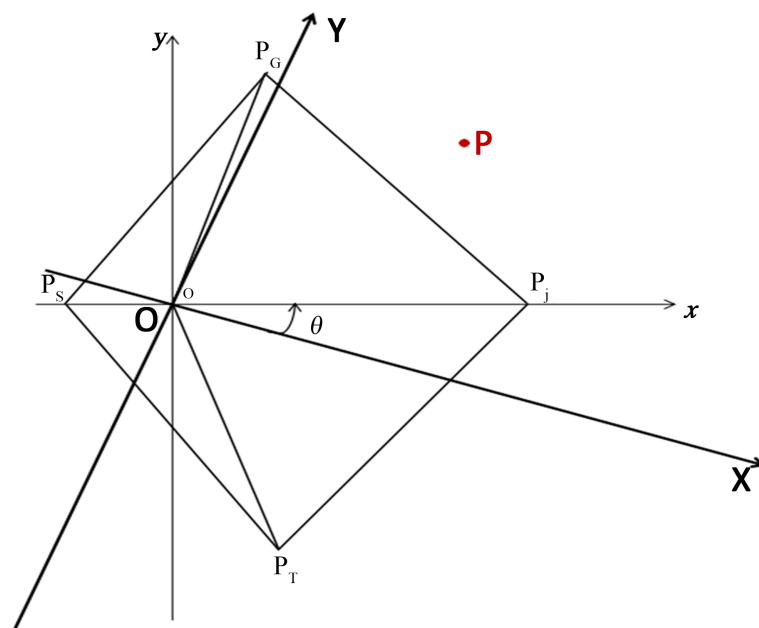


Figure 2. Rotation and inertial coordinate system
 图 2. 转动及惯性坐标系

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = R_t \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (1)$$

其中 $R_t = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 。

将方程的两边同时对时间 t 求导，得到

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{pmatrix} = \dot{R}_t \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + R_t \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = -R_t \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + R_t \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = R_t \begin{pmatrix} \dot{x} - y \\ \dot{y} + x \\ \dot{z} \end{pmatrix} \quad (2)$$

由欧拉-拉格朗日方程

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (3)$$

其中函数 L 是总动能和总位能之差, 称为运动位能(或拉格朗日函数), q_i 和 \dot{q}_i ($i=1,2,3$) 分别为广义坐标和广义速度, 可得 P 的运动方程为

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{y} &= \Omega_x, \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= \Omega_y, \\ \ddot{z} &= \Omega_z, \end{aligned} \quad (4)$$

其中广义势能为

$$\begin{aligned} \Omega(x, y, z) &= \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{\mu}{r_s} + \frac{\sqrt{3}-1-\mu}{2r_j} + \frac{3-\sqrt{3}}{4r_G} + \frac{3-\sqrt{3}}{4r_T}, \\ r_s &= \left[(x+\mu)^2 + y^2 + z^2 \right]^{1/2}, \\ r_j &= \left[\left(x - \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \mu \right)^2 + y^2 + z^2 \right]^{1/2}, \\ r_G &= \left[\left(x - \frac{\sqrt{3}-1}{4} + \mu \right)^2 + \left(y - \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \right)^2 + z^2 \right]^{1/2}, \\ r_T &= \left[\left(x - \frac{\sqrt{3}-1}{4} + \mu \right)^2 + \left(y + \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} \right)^2 + z^2 \right]^{1/2} \end{aligned}$$

其中 r_s, r_j, r_G, r_T 分别是 P 到 S, J, G, T 的距离。

3. 系统的零速度曲面的研究

对系统(4)积分得到其运动状态流形为

$$v^2 = 2\Omega(x, y, z) - C \quad (5)$$

其中 $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$ 为航天器的速度, C 为 Jacobi 常数。

航天器的运动被限制在此流形上, 而运动的允许区域和禁飞区域分别由 $v^2 \geq 0$ 和 $v^2 < 0$ 决定的, 所以当质量无限小的航天器的速度 $v=0$ 时, 方程(5)在 x - y 平面上表现为一系列的曲线, 即为零速度曲线, 曲线的结构随着 Jacobi 常数的变化而变化, 根据文献 [5] $m_s = 1.989e + 30 \text{ kg}$, $m_j = 1.9e + 27 \text{ kg}$, $m_G = 5.965e + 24 \text{ kg}$, $m_T = 5.965e + 20 \text{ kg}$, 则系统的质量比率 $\mu = 3e - 10$ 。

在二维平面中, $C=10$ 时, 如图 3 所示, 上方的环是希腊小行星群所在区域, 下方的环是特洛伊小行星群所在区域, 最右方的环是木星所在区域。此时三者呈相离状态, 说明此时航天器仅能绕希腊小行星群, 特洛伊小行星群或者木星飞行, 却不能在三者之间穿梭飞行。此外, 在三个环之外实际上还有一个大环(参见图 9), 为了便于观察, 图 3 至图 8 只显示了部分图像, 这表示航天器仅能在大环包围的区域内活动, 下同。

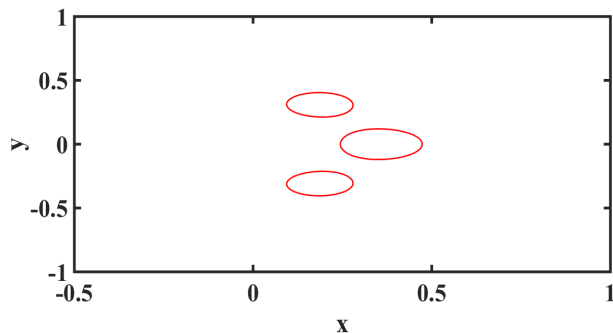


Figure 3. The zero velocity curve of the spacecraft $C = 10$

图 3. 航天器的零速度曲线 $C = 10$

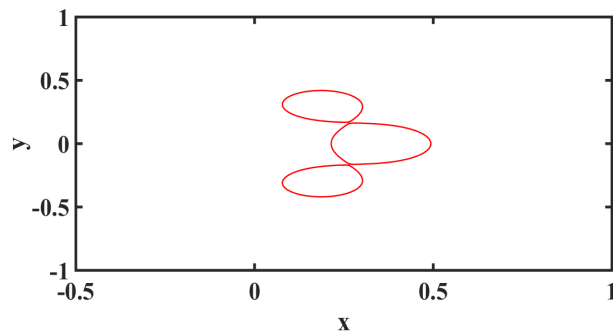


Figure 4. The zero velocity curve of the spacecraft $C = 8.8576$

图 4. 航天器的零速度曲线 $C = 8.8576$

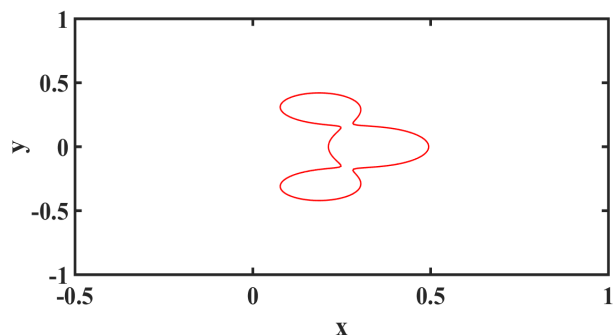


Figure 5. The zero velocity curve of the spacecraft $C = 8.8$

图 5. 航天器的零速度曲线 $C = 8.8$

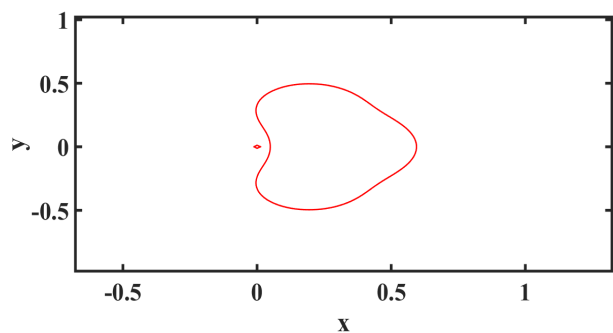


Figure 6. The zero velocity curve of the spacecraft $C = 6$

图 6. 航天器的零速度曲线 $C = 6$

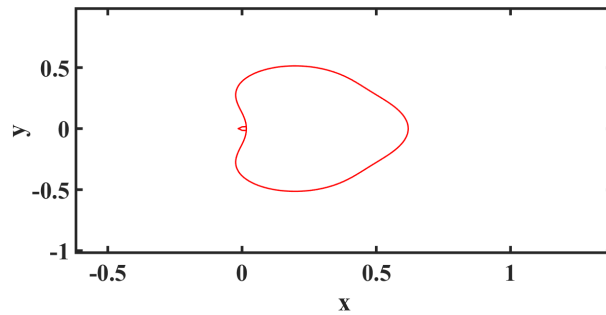


Figure 7. The zero velocity curve of the spacecraft $C = 5.633$
图 7. 航天器的零速度曲线 $C = 5.633$

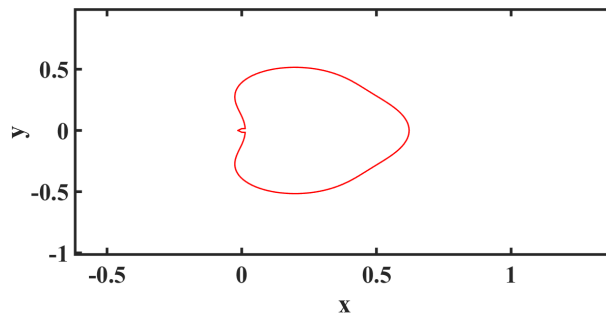


Figure 8. The zero velocity curve of the spacecraft $C = 5.6$
图 8. 航天器的零速度曲线 $C = 5.6$

当 C 由 10 逐渐减小时, 三个区域逐渐靠近, 当 C 减小到 8.8576 时, 最终右边的圆与其他两个圆连接起来形成一条链状图形, 此时虽然航天器的飞行距离有所增加, 但连接两圆的交叉点 $(0.272, 0.16)$, $(0.272, -0.16)$ 却成了航天器在木星-特洛伊小行星群或者木星-希腊小行星群之间穿越飞行的“要塞”(如图 4 所示)。

当 $C < 8.8576$ 且逐渐减小时, 连接木星-特洛伊小行星群和木星-希腊小行星群之间的要塞被打开, 如图 5 所示, 此时航天器不仅可以在木星, 特洛伊小行星群, 希腊小行星群的邻域内飞行, 还可以通过转移轨道从一个星体飞到另一个星体。

C 继续减小时, 系统能量继续增大, 当减小到 7.46 时, 太阳所在区域出现了圆, 这表示航天器可以在太阳的邻域内活动, 且 C 越小, 太阳所在区域的圆越来越大, 飞行区域越来越大。当 C 减小到 6 时, 航天器的零速度曲线如图 6 所示。

当 C 继续减小到 5.633 时, 太阳所在区域与其他三个天体所在区域开始相遇, 形成新的“要塞”, 如图 7, 此时航天器虽然可以在两个区域内自由飞行, 但却不能通过此新的“要塞”从一个区域飞向另一个区域。

当 $C < 5.633$ 时, “要塞”被逐渐打开, 航天器可以在四个天体之间来回飞行, 如图 8 所示(此时 $C = 5.6$), 且 C 越小, “要塞”打开的越来越大, 当 $C = 5.3$ 时, 如图 9 所示。

当 C 由 5.3 继续减小时, 航天器的飞行区域逐渐增大, 当 C 减小到 3.5022 时, 又产生新的“要塞” $(1.152, 0)$, 如图 10 所示, 此时航天器虽然能在四个天体所在的区域内自由飞行, 但却不能通过此“要塞”飞向外围宇宙空间。

当 C 继续逐渐减小时, 四个天体所在区域与外围宇宙空间之间的要塞 $(1.152, 0)$ 被打开, 当 $C = 3.495$ 时, 航天器不仅可以在四个天体之间来回飞行, 还可以通过新打开的“要塞”探索外太空, 如图 11 所示。

当 C 继续减小至 2.9 时, 航天器的禁飞区域已经退化成月牙状区域, 如图 12 所示, 此时航天器虽然

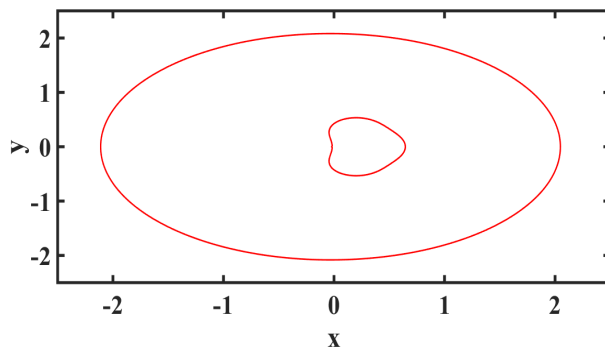


Figure 9. The zero velocity curve of the spacecraft $C = 5.3$

图 9. 航天器的零速度曲线 $C = 5.3$

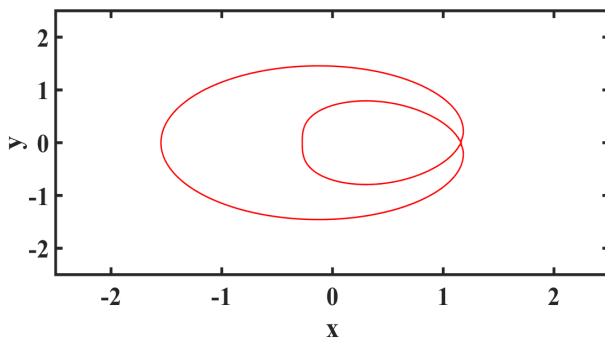


Figure 10. The zero velocity curve of the spacecraft $C = 3.5022$

图 10. 航天器的零速度曲线 $C = 3.5022$

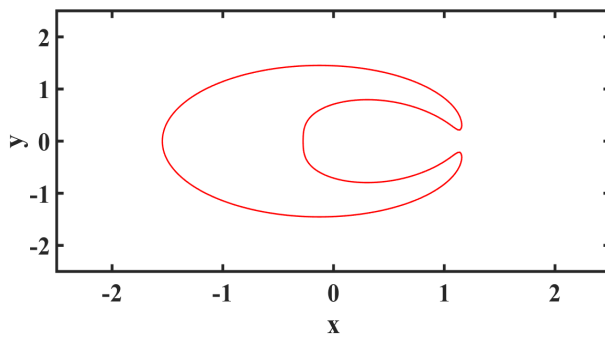


Figure 11. The zero velocity curve of the spacecraft $C = 3.495$

图 11. 航天器的零速度曲线 $C = 3.495$

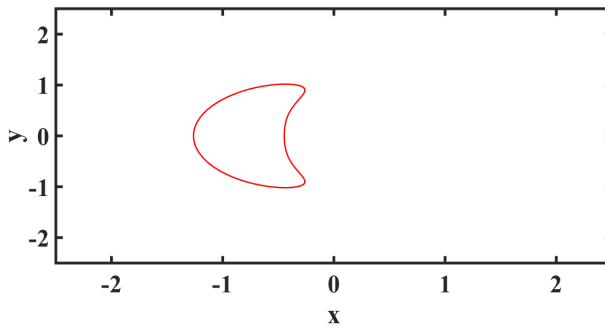


Figure 12. The zero velocity curve of the spacecraft $C = 2.9$

图 12. 航天器的零速度曲线 $C = 2.9$

可以通过打开的“要塞”飞也越来越小，最终航天器的禁飞区域退化为一个点，即航天器几乎可以在空间中任何地方飞行，如图 13。

综上所述，当 Jacobi 常数 C 的值较大时，它描绘出三条分别围绕木星，特洛伊小行星群，希腊小行星群的闭曲线，随着 C 的值逐渐减小，三条闭曲线逐渐增大，最后在交点处相遇，由于在交点处曲线的法线方向不确定，也就是奇点的情况，那么这两个交点记为平动点 $L1$, $L2$ ，类似的，当 C 继续减小时，木星，特洛伊小行星群，希腊小行星群所在的区域逐渐增大，随后与太阳所在区域相遇于平动点(记为 $L3$)。接着，当 C 继续减小时，太阳所在区域与其它三个天体所在区域融合起来并逐渐变大，与外围曲线相交于一点平动点(记为 $L4$)。最后航天器的禁飞区域退化为一个平动点(记为 $L5$)。

在三维空间情况下，当 $2.49505 < C < 8.8576$ 时，航天器的禁飞区域如图 14 所示，当 Jacobi 常数 C 的值越小时，系统能量逐渐增大，此时航天器的零速度曲面的范围越来越小，航天器的飞行区域越来越开阔，而 C 的值越来越大时，航天器的禁飞区域越来越大，能活动的范围也越来越小。此时可以清楚看到两个“要塞”点 $L1$ 和 $L2$ ，以及细棒状的太阳的禁飞区域。

当 $2.49505 < C < 5.633$ 时，航天器的禁飞区域如图 15 所示，此时可以看到太阳所在飞行区域与其他三个天体飞行区域的相遇点 $L3$ 。

当 $2.49505 < C < 3.5022$ 时，航天器的禁飞区域如图 16 所示，此时可以看到航天器能挣脱四个天体的引力束缚飞向外太空的“要塞”点 $L4$ ，同时也可以看到 C 很小时，航天器的禁飞区域几乎退化为一个点 $L5$ 。

4. 木星-特洛伊小行星群之间转移轨道的数值模拟

在实际的深空探测任务中，图 11 是本文最为关注的情形，也最具有实用价值，因为如果 Jacobi 常数 C 的取值比图 11 中的 C 还大的话，航天器可能会没有足够的能量，摆脱不了太阳，木星，特洛伊小行星群，希腊小行星群的引力束缚，这样航天器无法飞向外围宇宙空间进行深空探索，而如果 C 的值比图 11

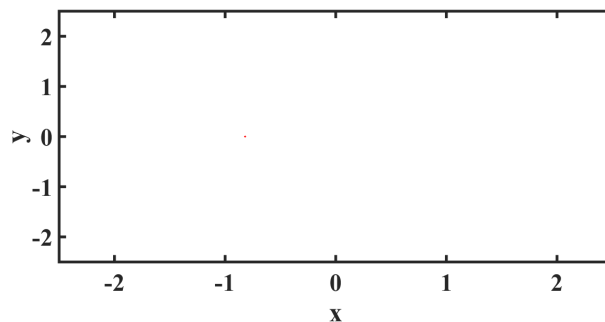


Figure 13. The zero velocity curve of the spacecraft $C = 2.49505$

图 13. 航天器的零速度曲线 $C = 2.49505$

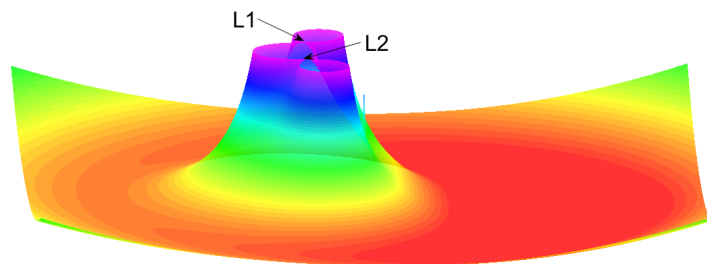


Figure 14. The zero velocity curve of the spacecraft $C \in [2.49505, 8.8576]$

图 14. 航天器的零速度曲线 $C \in [2.49505, 8.8576]$

中的 C 还小的话, 那么航天器需要消耗更多的能量, 而且对运载火箭也提出了较高的要求。只有当 C 的值介于上述两种情况之间时, 航天器才能飞离系统又不需要携带额外的能量, 大大节约了能源。

由计算可以得出木星的坐标为 $(0.366025, 0, 0)$, 特洛伊小行星群的坐标为 $(0.183012, -0.316987, 0)$, 于是我们选取了适当的初始条件 $x_0 = [0.367, 0, 0]$, $v_0 = [0.2922, -0.0216008, -0.00002]$, 其中 x_0 为航天器的初始位置坐标, v_0 为航天器的初始速度。通过软件 matlab2015a 对系统(4)进行数值模拟, 得到一条从木星 $(0.367, 0, 0)$ 出发, 以 $(0.2922, -0.0216008, -0.00002)$ 的初速度前行, 最终到达特洛伊小行星群周围 $(0.1826, -0.3175, -0.0004012)$ 的一条转移轨道, 如图 17 所示, 二维轨道如图 18。

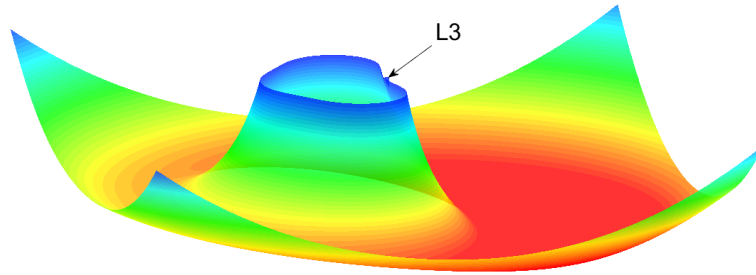


Figure 15. The zero velocity curve of the spacecraft $C \in [2.49505, 5.633]$

图 15. 航天器的零速度曲线 $C \in [2.49505, 5.633]$

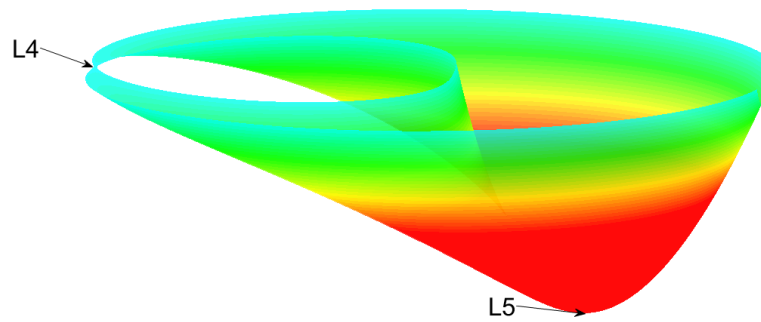


Figure 16. The zero velocity curve of the spacecraft $C \in [2.49505, 3.5022]$

图 16. 航天器的零速度曲线 $C \in [2.49505, 3.5022]$

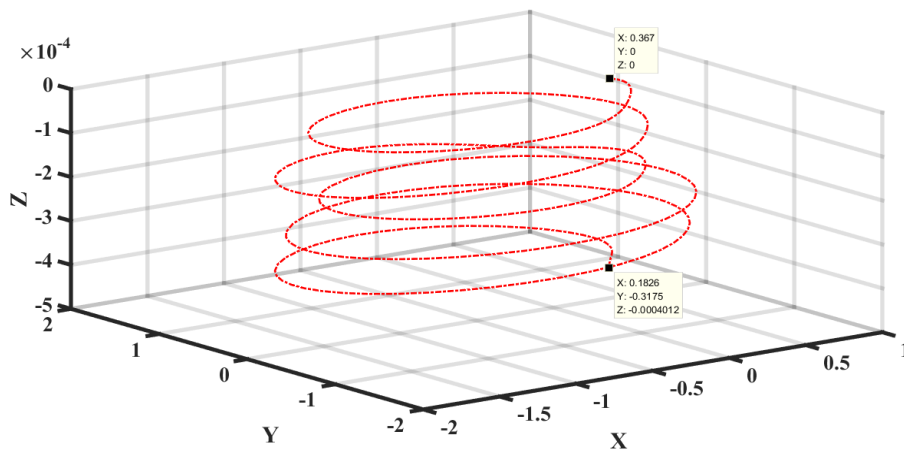


Figure 17. The Three-dimensional orbit from Jupiter toTrojans

图 17. 木星到特洛伊小行星群的三维轨道图

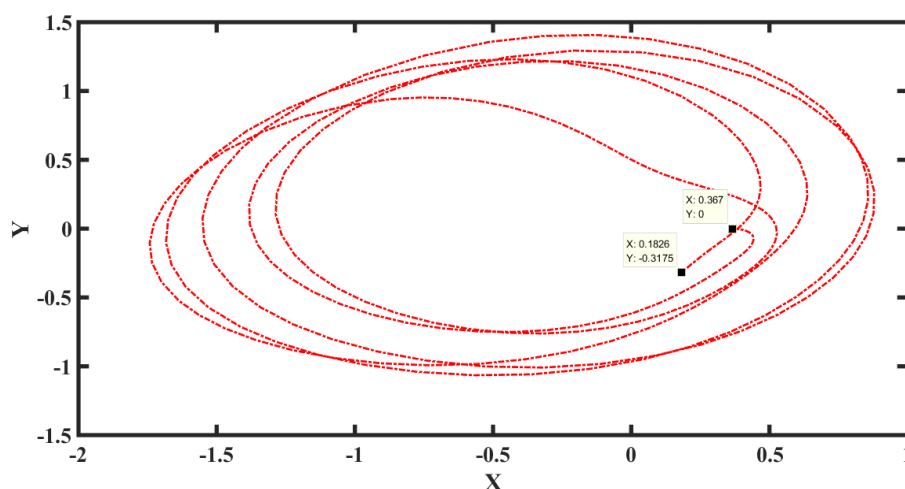


Figure 18. The Two-dimensional orbit from Jupiter to Trojans
 图 18. 木星到特洛伊小行星群的二维轨道图

5. 结论

本文讨论了一类由太阳，木星，特洛伊小行星群，希腊小行星群，航天器构成的限制性三体问题的零速度曲线与曲面，分析了航天器在三体系统中的禁飞区域与 Jacobi 常数 C 的关系，结果表明，当 C 很大时，系统的能量很小，航天器根本无法挣脱天体的引力束缚飞向另一个天体。而 C 逐渐减小时，航天器具有的能量增大，能飞行的区域越来越大，最终可以通过两个“要塞”在除太阳外的其他三个天体间自由穿梭飞行。随着 C 继续减小，系统消耗的能量增大，航天器可以绕太阳飞行，但不能在四个天体之间自由穿梭。当 C 减小到一定的值时航天器便可在四个天体间自由穿梭。而由于 C 的值很小时航天器需要的能量也多，这样所需燃料变多，运载技术也要更发达，所以我们在考虑到缩小航天器禁飞区域的基础上，还要考虑到发射航天器所需要的成本问题。为此我们主要考虑图 11，此时航天器既可以在四个天体之间来回穿梭，又可以通过小的“要塞”让航天器飞向太空进行探索，还可以避免浪费更多的燃料。

此外，本文还数值模拟出一条由木星飞向特洛伊小行星群的转移轨道，由于美国已有成功将探测器送到木星的成功经历，这样只要通过转移轨道便可探索特洛伊小行星群，大大提高了探索效率，节约资源。

基金项目

国家自然科学基金项目(Nos.: 11672259, 11302187); 扬州大学大学生科技创新基金项目(No.: x20160248); 江苏高校品牌专业建设工程资助项目(No.: PPZY2015B109)。

参考文献 (References)

- [1] Gao, F.B. and Zhang, W. (2014) A Study on Periodic Solutions for the Circular Restricted Three-Body Problem. *The Astronomical Journal*, **148**, 116. <https://doi.org/10.1088/0004-6256/148/6/116>
- [2] Marchal, C. (1990) *The Three-Body Problem: The Restricted Problem of Three Bodies*. Elsevier Publishing Company, Amsterdam.
- [3] 张翔龄, 周正峰. 平面限制性四体问题的数值研究[J]. 北京师范大学学报, 1993(3): 352-356.
- [4] 唐桂琴, 高发宝. 木星-火星-航天器系统的零速度曲面和转移轨道的数值研究[J]. 唐山学院学报, 2015, 28(3): 8-11.
- [5] Jewitt, D.C., Trujillo, C.A. and Luu, J.X. (2000) Population and Size Distribution of Small Jovian Trojan Asteroids. *The Astronomical Journal*, **120**, 1140-1147. <https://doi.org/10.1086/301453>

期刊投稿者将享受如下服务：

1. 投稿前咨询服务 (QQ、微信、邮箱皆可)
2. 为您匹配最合适的期刊
3. 24 小时以内解答您的所有疑问
4. 友好的在线投稿界面
5. 专业的同行评审
6. 知网检索
7. 全网络覆盖式推广您的研究

投稿请点击：<http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱：ijm@hanspub.org