

Analysis of Integrate Coupling System of Nonlinear Energy Sink Vibration Reduction and Electromagnetic Energy Harvesting

Zhengxu Pan, Taiyou Hou, Wei Li

College of Aerospace Engineering, Shenyang Aerospace University, Shenyang Liaoning
Email: pzxmlgj@163.com

Received: Feb. 12th, 2019; accepted: Feb. 26th, 2019; published: Mar. 6th, 2019

Abstract

In order to analyze the dynamic characteristics and energy harvesting of the integrated coupling system under the basic harmonic excitation, the harmonic balance method, Newton iteration method and arc length extension method are used to analyze the ordinary differential equation of the coupling system of nonlinear energy sink (NES) and electromagnetic energy harvesting approximately and the analytical results are verified by numerical solutions and the results are consistent. By comparing and analyzing the system amplitude-frequency response, the vibration suppression of coupling system is better than that of the single NES system. At the same time, by analyzing the influence of system parameters on frequency domain, time domain, power and voltage, the results show that more power can be output at a specific frequency. Further analysis of the relationship between system energy absorption and acquisition shows that the coupling system can perform energy output.

Keywords

Nonlinear Energy Sink, Arc Length Extension Method, Simple Harmonic Excitation, Vibration Suppression, Energy Harvesting

非线性能量阱减振与电磁能量采集一体化耦合系统分析

潘政旭, 侯太友, 李 威

沈阳航空航天大学, 航空宇航学院, 辽宁 沈阳
Email: pzxmlgj@163.com

摘要

为分析基础简谐激励下一体化耦合系统的动力学特性和能量采集，利用谐波平衡法、牛顿迭代法和弧长延拓法对非线性能量阱(NES)与电磁能量采集耦合系统的常微分方程近似解析，并用数值验证解析结果，解析数值一致重合。通过对比系统的幅频响应，证明耦合系统比NES系统具有更好的振动抑制性能。同时研究系统参数对频域、时域、功率和电压的影响，结果表明在特定频率下系统可以输出更多功率。进一步分析系统能量吸收和采集的关系，结果表明耦合系统可以进行能量输出。

关键词

非线性能量阱，弧长延拓法，简谐激励，振动抑制，能量采集

Copyright © 2019 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

近年来研究人员发现非线性能量阱(NES)具有质量轻、振动抑制频带宽、可以实现靶能传递[1]等优点，对其进行了大量研究。Wierschem 等人[2]研究了不同 NES 质量对主系统能量传递的影响，得到 NES 质量与主系统质量比远远小于 1 的结论。张也弛和孙斌等人[3] [4]分析了 NES 系统在宽频激励下主系统结构的幅频响应，结果表明 NES 系统具有优良的宽频减振效果。在此基础上张也弛等人[5]进一步研究了两自由度非线性耦合振子间的靶能量传递现象，并通过数值仿真验证了 NES 系统最优靶能量传递所需的初始能量。此外，NES 的耦合系统相关性能也成为研究热点。Fang 和 Zhang 等人[6] [7]将 NES 与超磁致伸缩材料相耦合实现了系统的振动控制和能量采集。Xiong 等人[8]将 NES 与压电振动能量采集器(PVEH)相耦合，实现了系统宽频能量采集。Pennisi 等人[9] 将 NES 与磁电能量转换器相耦合，通过实验证明了耦合系统具有优良的振动抑制和能量转移特性。由于 NES 系统复杂的动力学特性，常需要运用一些近似解析的方法对系统进行数值仿真。Sun 等人[10]结合复化平均法研究了 NES 系统对飞轮的微振动影响。Gendelman 等人[11]运用平均 - 多尺度法研究了 NES 系统在简谐激励下的振动抑制特性。Zang 和国忠金等人[12] [13]运用谐波平衡法研究了 NES 系统的动力学特性。这些研究方法都很好地反映了 NES 在系统减振方面的优良性能，为以后的科学实验提供理论基础。

2. 系统模型

如图 1 给出了 NES-电磁能量采集耦合系统连接在一个线性主系统上的力学模型，以及电磁能量采集的电学示意图，由牛顿第二定律列出如下非线性控制方程：

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + k_1(x_1 - u) + c_1(\dot{x}_1 - \dot{u}) + k_2(x_1 - x_2)^3 + c_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + f_e &= 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1)^3 + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - f_e &= 0 \\ f_e &= \frac{k_t k_e (\dot{x}_1 - \dot{x}_2)}{R_H} \end{aligned} \quad (1)$$

其中, m_1 、 k_1 和 c_1 分别为单自由度系统的质量、刚度和阻尼; m_2 、 k_2 和 c_2 分别为 NES 的质量、非线性刚度和阻尼, x_1 为单自由度系统质量的位移, x_2 为 NES 质量的位移, f_e 表示电磁能量采集器提供的力(电磁能量采集器的反电动势), k_t 、 k_e 和 R_H 分别表示电机常数、电动势系数和内阻, 位移激励 u 作用在基座上, 可以表示为:

$$u = A_u \sin(2\pi ft) \tag{2}$$

其中 A_u 是基础位移幅值, f 是激励频率。

根据文献[14][15][16]可以将磁能量采集器的系统参数等效为一个电磁阻尼 c_e , 由相对位移关系和电磁能量采集的工作原理可以求得耦合系统平均电功率 p , 分别表示为:

$$c_e = \frac{k_t k_e}{R_H} \tag{3}$$

$$p = \frac{2k_t k_e \pi^2 f^2}{R_H} (A_1 - A_2)^2 = 2c_e \pi^2 f^2 (A_1 - A_2)^2 \tag{4}$$

其中 A_1 是主系统质量 m_1 位移幅值, A_2 是 NES 系统质量 m_2 位移幅值。

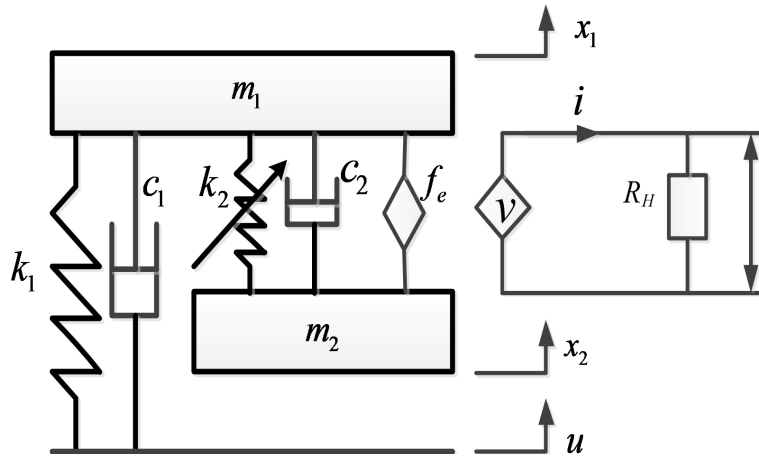


Figure 1. System model
图 1. 系统模型

3. 分析方法

由于系统是强非线性激励系统, 通过谐波平衡法对方程(1)进行近似求解, 假设方程(1)的谐波解是满足如下形式:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= a_{11} \cos(\omega t) + b_{11} \sin(\omega t) + a_{31} \cos(3\omega t) + b_{31} \sin(3\omega t) \\ x_2(t) &= a_{12} \cos(\omega t) + b_{12} \sin(\omega t) + a_{32} \cos(3\omega t) + b_{32} \sin(3\omega t) \end{aligned} \tag{5}$$

其中 $(a_{11}, b_{11}, a_{31}, b_{31})$ 和 $(a_{12}, b_{12}, a_{32}, b_{32})$ 表示用谐波平衡法时解的傅里叶系数, 将方程(5)代入方程(1)然后对代数方程组进行推导和简化得到 $\cos(\omega t)$ 、 $\sin(\omega t)$ 、 $\cos(3\omega t)$ 和 $\sin(3\omega t)$ 系数分别相等的 8 个代数方程式。

$$F_i(a_{11}, b_{11}, a_{31}, b_{31}, a_{12}, b_{12}, a_{32}, b_{32}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, 8 \tag{6}$$

在给定的激励频率下, 通过牛顿迭代法和弧长延拓法进一步求解方程(6), 最终可以求得控制方程的解。其中方程(6)的 Jacobi 矩阵如下:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial a_{11}} & \frac{\partial F_1}{\partial b_{11}} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial b_{32}} \\ \frac{\partial F_2}{\partial a_{11}} & \frac{\partial F_2}{\partial b_{11}} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial b_{32}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_8}{\partial a_{11}} & \frac{\partial F_8}{\partial b_{11}} & \dots & \frac{\partial F_8}{\partial b_{32}} \end{bmatrix}_{8 \times 8} \quad (7)$$

根据文献[7] [14] [15]选取如表 1 所示的系统参数，将 $f = 30 \text{ Hz}$ 代入控制方程研究一体化耦合系统在振动抑制和能量采集方面的性能。

Table 1. System parameters

表 1. 系统参数

参数	数值
m_1	60 kg
m_2	7 kg
c_1	10 Ns/m
c_2	100 Ns/m
c_e	200 Ns/m
k_1	$2.1346 \times 10^6 \text{ N/m}$
k_2	$5 \times 10^7 \text{ N/m}^3$
A	0.0002 m

图 2 为通过谐波平衡 - 弧长延拓法与 4 阶龙格库塔法分别求解系统幅频响应得到的结果对比图，分析结果表明解析解和数值解一致重合，证明了研究方法的正确性。

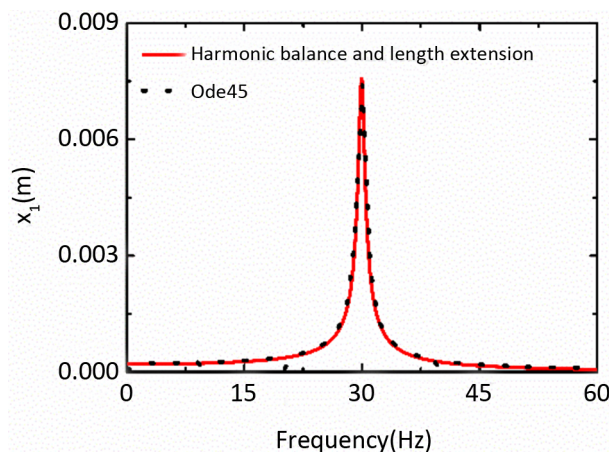


Figure 2. The first set of parameters

图 2. 第一组参数

图 3 给出了当系统参数 $A = 0.0005 \text{ m}$ ， $k_2 = 500 \text{ N/m}^3$ 时，结合谐波平衡 - 弧长延拓法和 4 阶龙格库塔法分析系统幅频响应的结果对比图，其解析解和数值解仍然重合，再次证明了研究方法的正确性。

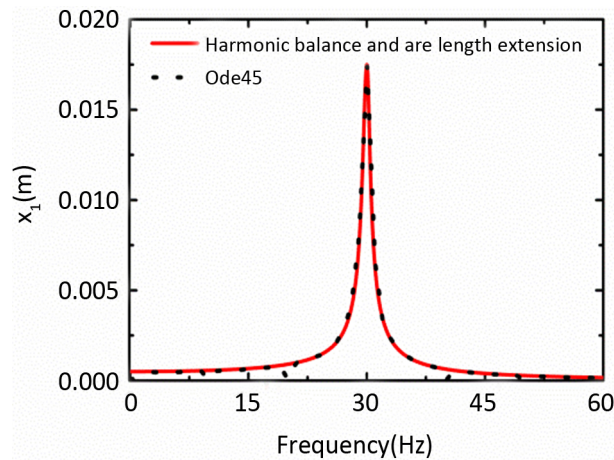


Figure 3. The second set of parameters
图 3. 第二组参数

4. 对比分析

4.1. 电磁能量采集器

图 4 给出了电磁能量采集器对主系统稳态位移幅频响应的影响结果对比图, 通过对比 NES-电磁能量采集耦合系统和单一 NES 系统的最大值, 结果表明耦合系统的位移幅值远小于 NES 系统的位移幅值。证明一体化耦合系统比 NES 具有更优良的减振性能。

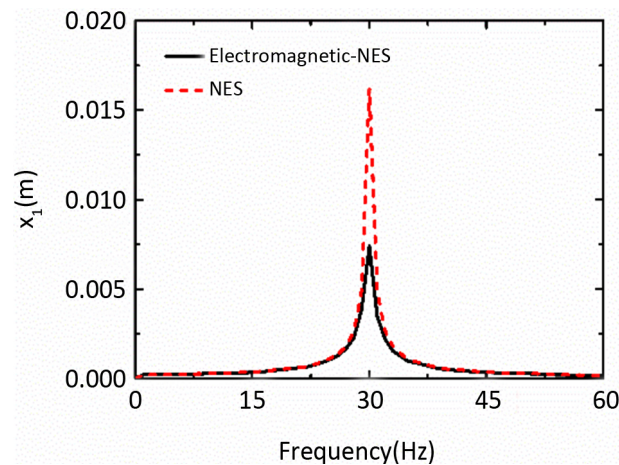


Figure 4. Comparative analysis of the presence or absence of an electromagnetic energy harvester
图 4. 有无电磁能量采集器的对比分析

4.2. 系统参数分析

图 5 至图 8 给出了各参数对系统位移幅频响应的影响结果对比图。图 5 NES 阻尼 c_2 和图 6 等效电磁阻尼 c_e 的参数变化对系统位移幅频响应的影响较大, 而图 7 非线性刚度 k_2 和图 8 NES 质量 m_2 参数的改变对系统位移幅频响应无明显影响。结果表明阻尼的改变是影响系统位移幅值的主要原因, 因此通过调节电磁能量采集器的电阻 R_H 可以改变等效电磁阻尼的大小, 进而影响系统的振动, 以达到所需要的振动效果。

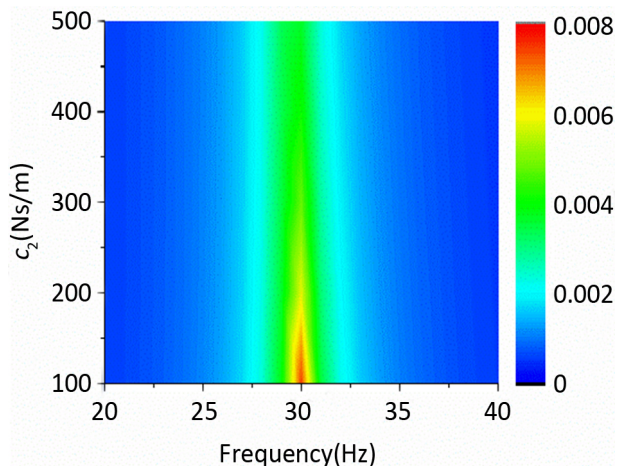


Figure 5. NES damping effects on the frequency domain
图 5. NES 阻尼对频域影响

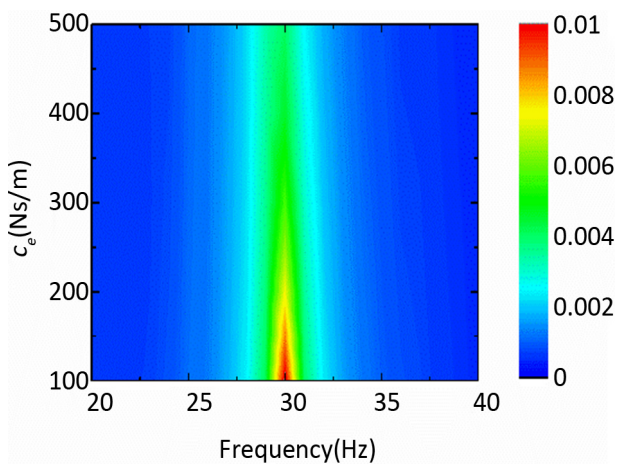


Figure 6. Effect of electromagnetic damping on the frequency domain
图 6. 电磁阻尼对频域影响

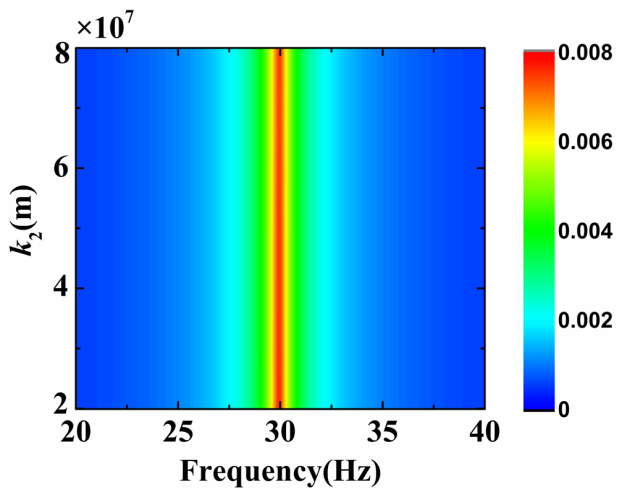


Figure 7. Effect of nonlinear stiffness on the frequency domain
图 7. 非线性刚度对频域影响

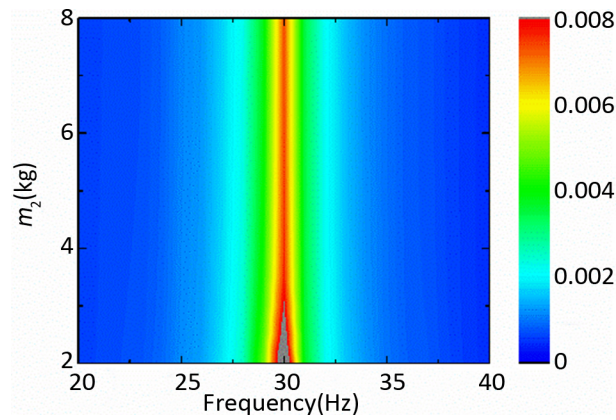


Figure 8. NES quality impact on the frequency domain
图 8. NES 质量对频域影响

4.3. 时域分析

图 9 对比了主系统质量 m_1 和 NES 质量 m_2 的位移关系，但这些位移关系与系统参数的选取有关，因此图 10 对比了电磁阻尼 c_e 分别为 50、200、350 Ns/m 时对主系统位移的影响，结果表明电磁阻尼参数越增对主系统振动抑制效果越好，因此通过增大电磁阻尼参数可以更好地抑制主系统的振动。

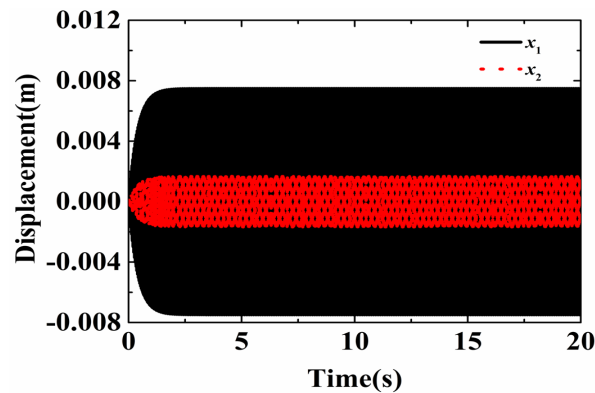


Figure 9. Displacement of the main system and the NES system
图 9. 主系统和 NES 系统的位移

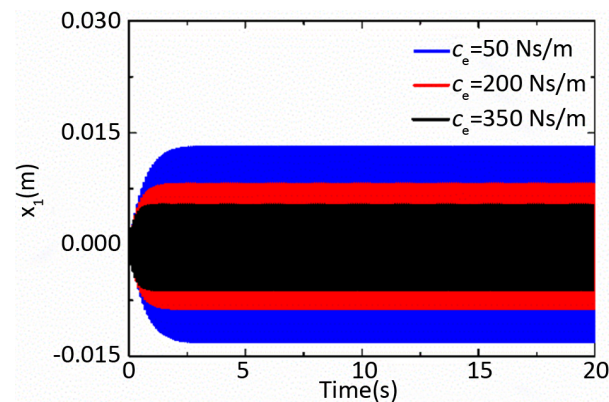


Figure 10. Effect of equivalent electromagnetic damping on the time domain
图 10. 等效电磁阻尼对时域影响

4.4. 平均电磁功率和电压

图 11 为电磁阻尼 c_e 分别为 50、200、350 Ns/m 时，不同频率下平均电功率的输出关系对比图，结果表明当频率增大到 20 Hz 开始有功率的输出，30 Hz 附近上升到最大功率，随后迅速下降；局部放大图表明功率随着电磁阻尼增大的变化，会呈现出先增大后减小的变化趋势，因此通过设定电磁阻尼参数可以在特定频率下输出更多功率。

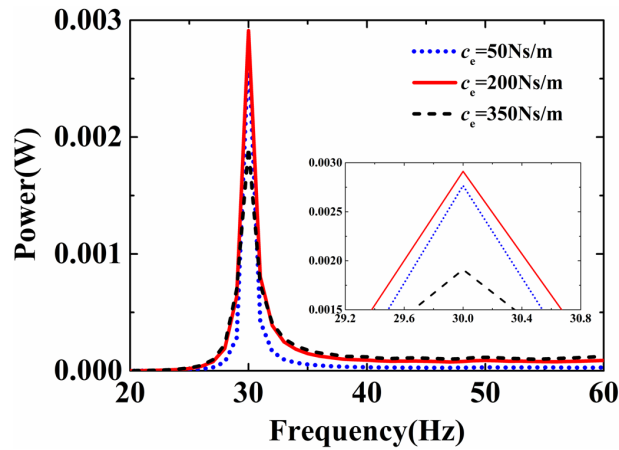


Figure 11. Average electric power
图 11. 平均电功率

由功率和耦合系统电阻的关系可以进一步分析系统的输出电压 U ，表示为：

$$U = \sqrt{PR_H} \tag{8}$$

图 12 给出了一体化耦合系统电磁阻尼 $R_H = 100 \Omega$ 时输出电压和频率的对比关系，在 15 Hz 时有电压产生，在 30 Hz 处电压达到最大值然后快速下降并趋于稳定。局部放大图表明输出电压随着电磁阻尼的增大，会呈现出先增大后减小的变化趋势，因此通过设定电磁阻尼参数可以在特定频率下输出更高的电压。进一步研究表明在较大频率范围内，随着电磁阻尼的增大可以输出更高的电压，因此在较高频率下可以实现系统电压的稳定输出。

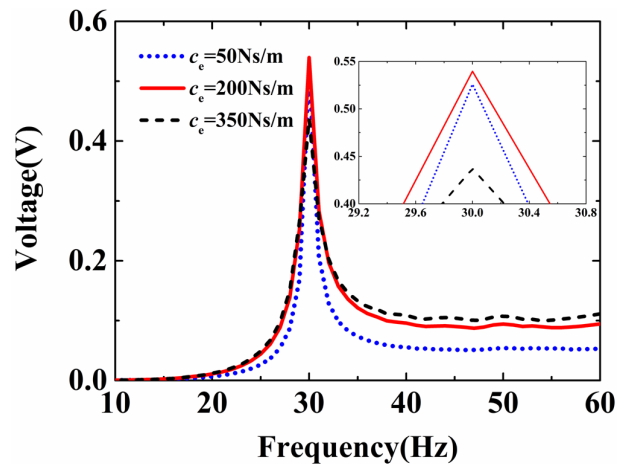


Figure 12. Output voltage
图 12. 输出电压

5. 能量关系

在系统受基础简谐位移激励时，采用 4 阶龙格库塔法对系统的能量吸收情况进行相关计算。耦合系统吸收的能量占输入总能量的百分比 $\eta_{\text{NES+E}}$ 表示如下[7]:

$$\eta_{\text{NES+E}} = \frac{T_{\text{NES}}(t) + V_{\text{NES}}(t) + W_{\text{NES}}(t) + W_{\text{E}}(t)}{E_{\text{in}}(t)} \times 100\% \quad (9)$$

NES 系统吸收的能量占输入总能量的百分比 η_{NES} 表示为:

$$\eta_{\text{NES}} = \frac{T_{\text{NES}}(t) + V_{\text{NES}}(t) + W_{\text{NES}}(t)}{E_{\text{in}}(t)} \times 100\% \quad (10)$$

基础系统吸收的能量占系统总能量的百分比 η_{PS} 可以表示为:

$$\eta_{\text{PS}} = \frac{T_{\text{PS}}(t) + V_{\text{PS}}(t) + W_{\text{PS}}(t)}{E_{\text{in}}(t)} \times 100\% \quad (11)$$

一体化耦合系统的能量采集率 η_{E} 可以表示为:

$$\eta_{\text{E}} = \frac{W_{\text{H}}(t)}{E_{\text{in}}(t)} \times 100\% \quad (12)$$

其中 $T_{\text{NES}}(t)$ 和 $V_{\text{NES}}(t)$ 分别为 NES-电磁能量采集系统的动能和势能， $W_{\text{NES}}(t)$ 为 NES 阻尼的能量耗散， $W_{\text{E}}(t)$ 为电磁能量采集器从系统中吸收的能量， $W_{\text{H}}(t)$ 为电磁能量采集器从系统中采集到的能量， $E_{\text{in}}(t)$ 为系统输入的总能量。根据能量守恒原理系统的总能量 $E_{\text{in}}(t)$ 表示为:

$$E_{\text{in}}(t) = T_{\text{PS}}(t) + V_{\text{PS}}(t) + W_{\text{PS}}(t) + T_{\text{NES}}(t) + V_{\text{NES}}(t) + W_{\text{NES}}(t) + W_{\text{E}}(t) \quad (13)$$

其中 $T_{\text{PS}}(t)$ 和 $V_{\text{PS}}(t)$ 分别为基础结构响应的动能和势能， $W_{\text{PS}}(t)$ 为基础阻尼的耗散能。各能量计算如下[7]:

$$T_{\text{NES}}(t) = \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2(t) \quad (14)$$

$$V_{\text{NES}}(t) = \frac{1}{4} k_2 [x_1(t) - x_2(t)]^4 \quad (15)$$

$$W_{\text{NES}}(t) = \int_0^t c_2 [\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)]^2 dt \quad (16)$$

$$W_{\text{H}}(t) = \int_0^t p(t) dt \quad (17)$$

$$W_{\text{E}}(t) = \int_0^t f_{\text{e}}(t) (\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)) dt \quad (18)$$

$$V_{\text{PS}}(t) = \frac{1}{2} k_1 [x_1(t) - u(t)]^2 \quad (19)$$

$$T_{\text{PS}}(t) = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2(t) \quad (20)$$

$$W_{\text{PS}} = \int_0^t c_1 [\dot{x}_1(t) - \dot{u}(t)]^2 dt \quad (21)$$

对比分析图 13 和图 14 可知在激励开始时，基础系统中吸收的能量百分比急剧上升，而耦合系统中吸收的能量百分比急剧下降；随后主系统的能量吸收减少，而耦合系统的能量吸收增加。在 30 s 的时间内 96.1% 的能量分布在耦合系统，3.9% 的能量分布在基础系统中，结果表明受到外激励时输入的能量大部分被耦合系统稳定吸收。通过基础系统的能量快速转移到耦合系统，可以更好地实现耦合系统的能量采集。

图 15 为耦合系统的能量采集百分比随时间的变化图。在激励开始时，耦合系统的能量采集百分比快速上升到 0.78%，并且随后稳定在这一数值附近。结果表明电磁能量采集器可以将系统的振动能转化为电能输出，

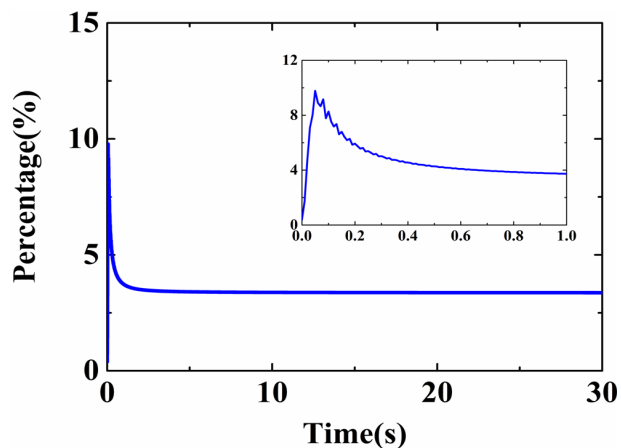


Figure 13. Energy absorption rate of the main system

图 13. 主系统能量吸收率

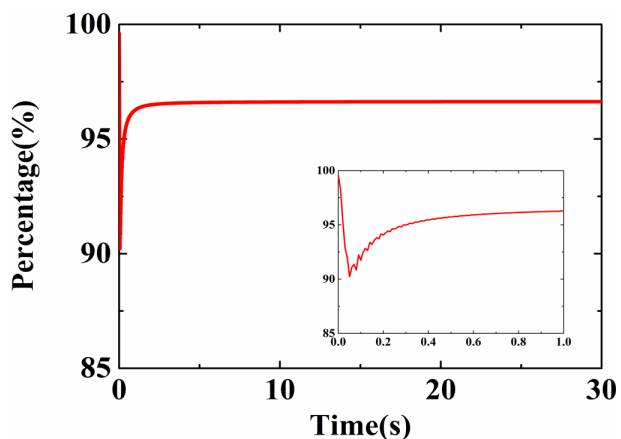


Figure 14. Energy absorption rate of the NES-electromagnetic energy acquisition coupling system

图 14. NES-电磁能量采集耦合系统能量吸收率

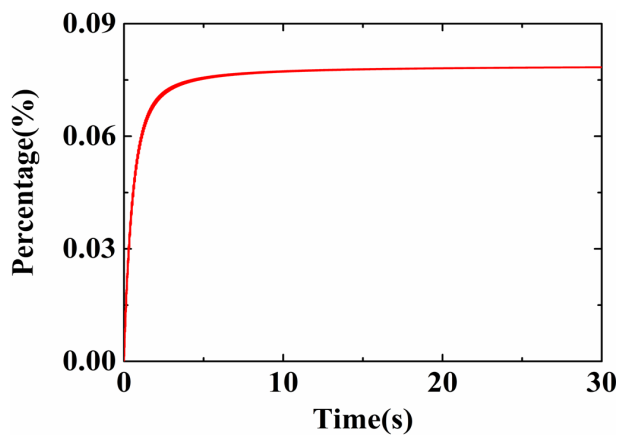


Figure 15. Energy harvesting rate of coupled systems

图 15. 耦合系统能量采集率

因此当耦合系统和主系统有相对运动时可以为外系统某些不易更换电池的小功率元件提供源源不断的电能。

6. 结论

本文研究 NES-电磁能量采集一体化耦合系统的非线性动力学响应和能量采集。通过谐波平衡 - 弧长延拓法和四阶龙格库塔法验证分析结果的准确性。讨论有无电磁能量采集器对主系统位移幅值的影响；并对分析系统参数对频域、时域和功率等的影响；进一步研究耦合系统能量吸收和采集的变化情况。

根据本文的研究，得到了以下结论：

1) 谐波平衡 - 弧长延拓法的近似解与控制方程的数值解高度一致，证明了本文采用的分析方法是正确的。

2) 对比分析主系统的幅频响应，结果表明 NES-电磁能量采集耦合系统比单一 NES 系统，具有更优良的振动抑制性能。

3) 耦合系统平均电功率和电压随电磁阻尼的增大，在特定频率下会呈现先增大后减小的变化趋势，因此通过设定电磁阻尼参数可以输出更高功率和电压。进一步研究表明，耦合系统可以将系统振动的能量转化为电能输出，实现了对系统的能量采集。

参考文献

- [1] Kopidakis, G., Aubry, S. and Tsironis, G.P. (2001) Targeted Energy Transfer through Discrete Breathers in Nonlinear Systems. *Physical Review Letters*, **87**, 165501. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.87.165501>
- [2] Wierschem, N.E., Luo, J., Al-Shudeifat, M., *et al.* (2014) Experimental Testing and Numerical Simulation of a Six-Story Structure Incorporating Two-Degree-of-Freedom Nonlinear Energy Sink. *Journal of Structural Engineering*, **140**, 04014027. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)ST.1943-541X.0000978](https://doi.org/10.1061/(ASCE)ST.1943-541X.0000978)
- [3] 张也弛. 基于非线性能量阱的双共振峰振动抑制的力学特性研究[J]. 航天器环境工程, 2015, 32(5): 477-483.
- [4] 孙斌, 吴志强. 基于非线性能量阱的双频激励非线性系统减振[J]. 应用数学和力学, 2017, 38(11): 1240-1250. <https://doi.org/10.21656/1000-0887.370379>
- [5] 张也弛, 孔宪仁, 张红亮. 非线性耦合振子间的靶能量传递研究: 保守系统中的完全能量传递[J]. 振动与冲击, 2012, 31(1): 150-155.
- [6] Fang, Z.W., Zhang, Y.W., Li, X., *et al.* (2017) Complexification-Averaging Analysis on a Giant Magnetostrictive Harvester Integrated with a Nonlinear Energy Sink. *Journal of Vibration and Acoustics*, **140**, 021009-021009-14. <https://doi.org/10.1115/1.4038033>
- [7] Fang, Z.W., Zhang, Y.W., Li, X., *et al.* (2017) Integration of a Nonlinear Energy Sink and a Giant Magnetostrictive Energy Harvester. *Journal of Sound and Vibration*, **391**, 35-49. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2016.12.019>
- [8] Xiong, L., Tang, L., Liu, K., *et al.* (2018) Broadband Piezoelectric Vibration Energy Harvesting Using a Nonlinear Energy Sink. *Journal of Physics D Applied Physics*, **51**, 185502. <https://doi.org/10.1088/1361-6463/aab9e3>
- [9] Pennisi, G. (2016) Preliminary Study of a Nonlinear Energy Sink Coupled with an Electromagnetic Energy Harvester. *Vibrations, Shocks and Noise*, Le Mans France.
- [10] Sun, Y.H., Zhang, Y.W., Ding, H., *et al.* (2018) Nonlinear Energy Sink for a Flywheel System Vibration Reduction. *Journal of Sound and Vibration*, **429**, 305-324. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2018.05.025>
- [11] Gendelman, O.V., Starosvetsky, Y. and Feldman, M. (2007) Attractors of Harmonically Forced Linear Oscillator with Attached Nonlinear Energy Sink I: Description of Response Regimes. *Nonlinear Dynamics*, **51**, 31-46. <https://doi.org/10.1007/s11071-006-9167-0>
- [12] Zang, J., Zhang, Y.W., Ding, H., *et al.* (2018) The Evaluation of a Nonlinear Energy Sink Absorber Based on the Transmissibility. *Mechanical Systems and Signal Processing*, **5**, 1-24. <https://doi.org/10.1016/j.ymsp.2018.05.061>
- [13] 国忠金, 张伟, 夏丽莉. 基于余量谐波平衡法的质点振动系统高阶近似与频率响应分析[J]. 振动与冲击, 2018, 37(20): 324-331.
- [14] Tang, X. and Zuo, L. (2011) Enhanced Vibration Energy Harvesting Using Dual-Mass Systems. *Journal of Sound and*

Vibration, **330**, 5199-5209. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2011.05.019>

- [15] Tai, W. and Zuo, L. (2017) On Optimization of Energy Harvesting from Base-Excited Vibration. *Journal of Sound and Vibration*, **411**, 47-59. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2017.08.032>
- [16] Xie, L., Li, J., Li, X., *et al.* (2018) Damping-Tunable Energy-Harvesting Vehicle Damper with Multiple Controlled Generators: Design, Modeling and Experiments. *Mechanical Systems & Signal Processing*, **99**, 859-872. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2017.07.005>

知网检索的两种方式：

1. 打开知网页面 <http://kns.cnki.net/kns/brief/result.aspx?dbPrefix=WWJD>
下拉列表框选择：[ISSN]，输入期刊 ISSN：2325-498X，即可查询
2. 打开知网首页 <http://cnki.net/>
左侧“国际文献总库”进入，输入文章标题，即可查询

投稿请点击：<http://www.hanspub.org/Submission.aspx>

期刊邮箱：ijm@hanspub.org