International Journal of Mechanics Research 力学研究, 2020, 9(2), 25-31
Published Online June 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/ijm
https://doi.org/10.12677/ijm.2020.92004

Hans汉斯

Study on the Motion Law of Particles in Non-Inertial System

Min Liu, Lixia Cheng*, Zifang Zeng, Weidong Xie, Guangdong Sun, Shuo Feng

Guangdong Provincial Key Laboratory of Electronic Functional Materials and Devices, Huizhou College, Huizhou Guangdong

Email: *lixia02741@163.com

Received: May 8th, 2020; accepted: May 22nd, 2020; published: May 29th, 2020

Abstract

In mechanics textbook, according to Newton's law motion, only the mathematical expression of particle motion theorem and its corresponding conservation law in inertial system and "special Non-Inertial system" (center of mass system) are deduced. In order to study the motion law of particle in "general Non-Inertial system", based on Newton's law of motion, this paper deduces the momentum theorem, kinetic energy theorem, angular momentum theorem of particles in "general Non-Inertial system" and their corresponding conservation laws.

Keywords

General Non-Inertial System, Momentum Theorem, Kinetic Energy Theorem, Angular Momentum Theorem

非惯性系下质点的运动规律研究

刘　敏，程利霞*，曾子芳，谢卫东，孙光东，冯　硕

惠州学院，广东省电子功能材料与器件重点实验室，广东　惠州

Email: *lixia02741@163.com

收稿日期：2020年5月8日；录用日期：2020年5月22日；发布日期：2020年5月29日

摘　要

力学教科书中，依据牛顿运动定律仅推导出了在惯性系和“特殊非惯性系”(质心系)下质点运动定理及其相应守恒定律的数学表达形式。为了便于在“一般非惯性系”下研究质点的运动规律，本文基于牛顿

*通讯作者。

文章引用: 刘敏, 程利霞, 曾子芳, 谢卫东, 孙光东, 冯硕. 非惯性系下质点的运动规律研究[J]. 力学研究, 2020, 9(2): 25-31. DOI: 10.12677/ijm.2020.92004

运动定律，推导出了“一般非惯性系”下质点的动量定理、动能定理、角动量定理及其相应守恒定律的数学表达形式。

关键词

一般非惯性系，动量定理，动能定理，角动量定理

1. 引言

目前，很多研究者推导出了非惯性系下某一个定理或相应的守恒定律。李等人[1]解析惯性系与非惯性系之间的关系；周等人[2]研究了质点在非惯性中的功能关系；韦和白等人[3]研究了非惯性系中的机械能定理和机械能守恒；王和郑等人[4] [5]分别采用不同的方法，推导出了非惯性系中的质点的动力学方程；王春燕等人[6]推导了非惯性系中的动量矩定理及守恒定律；李等人[7]推导出了非惯性系中的动量定理与动量守恒；尹等人[8] [9]推导出了非惯性系中的质点的动能定理及机械能守恒条件。尚未见到过在“一般非惯性系”下推导出的质点动量定理、动能定理、角动量定理及其相应守恒定律的数学表达形式。本文依据牛顿运动定律，推导出了“一般非惯性系”下质点的动量定理、动能定理、角动量定理及其相应守恒定律的数学表达形式。本文推导出的定理及其相应守恒定律为在“一般非惯性系”下研究物体的运动规律提供了方便。

2. 惯性系和非惯性系下质点的受力关系

设有一个惯性系(k 系)，原点坐标为 o，基矢分别为 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$。一个非惯性系($k'$ 系)，原点坐标为 o'，基矢分别为 $\boldsymbol{i}',\boldsymbol{j}',\boldsymbol{k}'$。$k'$ 系相对于 k 系以加速度 $\boldsymbol{a}_0$ 和角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 运动。质点 P 相对于 k' 系做曲线运动，质点 P 相对 k' 系的运动学方程为 $\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}'(t)$，质点 P 相对 k 系的运动学方程为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$，$k'$ 系相对于 k 系的位置矢量为 $\boldsymbol{r}_0$。其中 $\boldsymbol{r}=r_x\boldsymbol{i}+r_y\boldsymbol{j}+r_z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{r}'=r_x'\boldsymbol{i}'+r_y'\boldsymbol{j}'+r_z'\boldsymbol{k}'$，$\boldsymbol{r}_0=r_{0x}\boldsymbol{i}+r_{0y}\boldsymbol{j}+r_{0z}\boldsymbol{k}$。

两参考系下质点的位矢满足：

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{r}' \tag{1}$$

两参考系下质点的速度满足：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_0}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}r_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}r_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}r_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{v}_0=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_0}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}r_{0x}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}r_{0y}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}r_{0z}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$$

依据泊松公式 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}'}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{i}',\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{j}'}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{j}',\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}'}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{k}'$，代入下式

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}'=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t}&=\frac{\mathrm{d}r_x'}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}'+\frac{\mathrm{d}r_y'}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}'+\frac{\mathrm{d}r_z'}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}'+r_x'\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}'}{\mathrm{d}t}+r_y'\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{j}'}{\mathrm{d}t}+r_z'\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}'}{\mathrm{d}t}\\&=\frac{\mathrm{d}^*\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{v}_r+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'\end{aligned}$$

则有：

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_0+\boldsymbol{v}_r+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}' \tag{3}$$

(3)式左右两边求导，得：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_0}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_r}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\left(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'\right)}{\mathrm{d}t} \tag{4}$$

其中，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2 r_x}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}^2 r_y}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}^2 r_z}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k}\\ \boldsymbol{a}_0&=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_0}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2 r_{0x}}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}^2 r_{0y}}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}^2 r_{0z}}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{k}\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}'&=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}'}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_r}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t}\\ &=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}}\left(\frac{\mathrm{d}r'_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}r'_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}r'_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}\right)+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{\omega}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t}\\ &=\boldsymbol{a}_r+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r+\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{\omega}\times\left(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'\right)+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r\\ &=\boldsymbol{a}_r+\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{\omega}\times\left(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'\right)+2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r\end{aligned} \tag{6}$$

将(5)式和(6)式代入(4)式，再根据泊松公式，可得：

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_r+\boldsymbol{a}_0+\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{\omega}\times\left(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'\right)+2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r \tag{7}$$

可简化为：

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_r+\boldsymbol{a}_0+\boldsymbol{a}_c \tag{8}$$

其中，

$$\boldsymbol{a}_c=\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{\omega}\times\left(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'\right)+2\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r$$

其中 $\boldsymbol{a}$ 称为绝对加速度，$\boldsymbol{a}_r$ 称为相对加速度，$\boldsymbol{a}_0$ 称为牵连加速度，$\boldsymbol{a}_c$ 称为科里奥利加速度。

惯性系和非惯性系中，质点 P 的受力之间的关系为：

$$m\boldsymbol{a}=m\boldsymbol{a}_r+m\boldsymbol{a}_0+m\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}'+m\boldsymbol{\omega}\times\left(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'\right)+2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r \tag{9}$$

可简化为：

$$m\boldsymbol{a}=m\boldsymbol{a}_r+m\boldsymbol{a}_0+m\boldsymbol{a}_c \tag{10}$$

亦可表述为：

$$\boldsymbol{F}^*=\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}_t+\boldsymbol{F}_c \tag{11}$$

其中 $\boldsymbol{F}=m\boldsymbol{a}$，称为惯性系下物体的受力；$\boldsymbol{F}^*=m\boldsymbol{a}_r$，称为非惯性系下物体的受力；$\boldsymbol{F}_t$ 和 $\boldsymbol{F}_c$ 统称为惯性力，其中，$\boldsymbol{F}_t=-m\boldsymbol{a}_0-m\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}'-m\boldsymbol{\omega}\times\left(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'\right)$，称为牵连惯性力，$\boldsymbol{F}_c=-2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r$，称为科里奥利力。

3. 非惯性系下质点运动定理的数学表达式

设在一般非惯性参考系下观察质点的运动，质点 m 受到真实力 $\boldsymbol{F}$ 和惯性力 $\boldsymbol{F}_t$、$\boldsymbol{F}_c$ 共同的作用。在同一时间微元 $\mathrm{d}t$ 内，$\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{F}_t$ 和 $\boldsymbol{F}_c$ 表示在该时间里的某个瞬间值，用(11)式乘上 $\mathrm{d}t$，可得：

$$\boldsymbol{F}^{*}\mathrm{d}t=\boldsymbol{F}\mathrm{d}t+\boldsymbol{F}_{t}\mathrm{d}t+\boldsymbol{F}_{c}\mathrm{d}t \tag{12}$$

在上等式左边有：

$$\boldsymbol{F}^{*}\mathrm{d}t=m\frac{\mathrm{d}^{*}\boldsymbol{v}_{r}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=\mathrm{d}\left(m\boldsymbol{v}_{r}\right)$$

若对(11)式左右两边积分，则可得

$$\int_{\boldsymbol{v}_{1r}}^{\boldsymbol{v}_{2r}}\mathrm{d}\left(m\boldsymbol{v}_{r}\right)=\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}\mathrm{d}t+\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}_{t}\mathrm{d}t+\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}_{c}\mathrm{d}t \tag{13}$$

若用 $\boldsymbol{p}'=m\boldsymbol{v}_{r}$ 表示质点在非惯性系的相对动量，同时用冲量的形式表示作用于质点的各个力在同个时间段的元冲量的矢量和，则分别可得：

$$\int_{\boldsymbol{v}_{1r}}^{\boldsymbol{v}_{2r}}\mathrm{d}\left(m\boldsymbol{v}_{r}\right)=\boldsymbol{p}_2'-\boldsymbol{p}_1'\text{，}\quad \boldsymbol{I}=\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}\mathrm{d}t\text{，}\quad \boldsymbol{I}_{t}=\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}_{t}\mathrm{d}t\text{，}\quad \boldsymbol{I}_{c}=\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{F}_{c}\mathrm{d}t$$

则(13)式可表示为：

$$\boldsymbol{p}_2'-\boldsymbol{p}_1'=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{I}_{t}+\boldsymbol{I}_{c} \tag{14}$$

(14)式表明：质点在“一般非惯性系”下的相对动量增量等于作用于质点上的真实力 $\boldsymbol{F}$ 和惯性力 $\boldsymbol{F}_{t}$、$\boldsymbol{F}_{c}$ 在相同时间段内的冲量和，称为“一般非惯性系”下质点的动量定理。

用(11)式点乘 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}'$，得：

$$\boldsymbol{F}^{*}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{F}_{t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{F}_{c}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}' \tag{15}$$

由于 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{v}_{r}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'$，则在(15)式左边得

$$\boldsymbol{F}^{*}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}'=m\frac{\mathrm{d}^{*}\boldsymbol{v}_{r}}{\mathrm{d}t}\cdot\left[\left(\boldsymbol{v}_{r}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'\right)\mathrm{d}t\right]=\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}mv_{r}^{2}\right)+m\left(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'\right)\cdot\mathrm{d}^{*}\boldsymbol{v}_{r}$$

质点 m 在非惯性运动时，$\boldsymbol{v}_{r}$ 和 $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'$ 合成了质点 m 在一般非惯性系的速度 $\boldsymbol{v}'$，质点 m 除了相对于 k' 运行的相对速度 $\boldsymbol{v}_{r}$ 外，还有因为 k' 系转动时和质点 m 固定在 k' 系的位矢 $\boldsymbol{r}'$ 处所形成的速度 $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'$。在题设中一说明，质点 m 相对 k' 系的位矢 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}'$ 运动，则质点相对 k' 系的位矢 $\boldsymbol{r}'$ 是变量，而在 $\left(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{r}$ 项中的 $\boldsymbol{r}'$ 是定值和题设相矛盾，则该项为零。

这时有 $\boldsymbol{F}^{*}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}'=\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}mv_{r}^{2}\right)$。

在(15)式等式右边分别为：

$$\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}'=m\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}'$$

$$\boldsymbol{F}_{t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}'=-\left[m\boldsymbol{a}_{0}+m\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}'+m\boldsymbol{\omega}\times\left(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'\right)\right]\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}'$$

由于科里奥利力的方向始终和质点相对于 k' 系的位矢 $\boldsymbol{r}'$ 垂直，$\boldsymbol{F}_{c}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}'=-2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}'=0$。

根据以上所得，则有

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}mv_{r}^{2}\right)=m\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}'-\left[m\boldsymbol{a}_{0}+m\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}'+m\boldsymbol{\omega}\times\left(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'\right)\right]\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{F}_{t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}' \tag{16}$$

表明：质点在一般非惯性系的相对动能的微分等于作用于质点的真实力和牵连惯性力在质点相对与非惯性系中的相对位矢的运动中的元功之和。

对(16)式两边积分，可得：

$$\frac{1}{2}mv_{r2}^2-\frac{1}{2}mv_{r1}^2=A+A_t \tag{17}$$

其中$\int \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}'=A$，$\int \boldsymbol{F}_t\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}'=A_t$。

(17)式表明：质点在非惯性系的相对动能的变量等于作用于该质点的真实力和牵连惯性力在相对运动上的路程所做功之和。该结论为“一般非惯性系”下质点的动能定理。而在上讨论过科里奥利力的方向总是与质点运动的位矢垂直，所以在讨论质点在非惯性系的相对动能不用考虑科里奥利力所做的功，实际上，科里奥利力会改变质点的运动方向。

用自参考点O'指向质点的位置矢量$\boldsymbol{r}'$对(11)式方程两侧做矢积，可得：

$$\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{F}^*=\boldsymbol{r}'\times\left(\boldsymbol{F}+\boldsymbol{F}_t+\boldsymbol{F}_c\right) \tag{18}$$

在上式中，$\boldsymbol{F}^*=m\boldsymbol{a}_r=m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_r}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}'}{\mathrm{d}t}$，则(18)式中的左边等于$\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{F}^*=\boldsymbol{r}'\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}'}{\mathrm{d}t}$，若令$\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{p}'=\boldsymbol{L}'$，仿照惯性系下的角动量，$\boldsymbol{L}'$可称为质点相对非惯性系的角动量。根据质点在惯性系下对参考点的角动量定理($\boldsymbol{M}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{L}$)，令$\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{F}=\boldsymbol{M}$表示作用于质点的真实力对参考点的力矩；$\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{F}_t=\boldsymbol{M}_t'$表示作用于质点的牵连惯性力对参考点的力矩；$\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{F}_c=\boldsymbol{M}_c'$表示作用于质点的科里奥利力对参考点的力矩。

(18)式左侧可进一步表示为：

$$\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{F}^*=\frac{\mathrm{d}^*\left(\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{p}'\right)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^*\boldsymbol{r}'}{\mathrm{d}t}\times m\boldsymbol{v}_r+\boldsymbol{r}'\times m\frac{\mathrm{d}^*\boldsymbol{v}_r}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{r}'\times\frac{\mathrm{d}^*\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^*}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{L}'$$

(18)式可简写成：

$$\frac{\mathrm{d}^*}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{L}'=\boldsymbol{M}+\boldsymbol{M}_t'+\boldsymbol{M}_c' \tag{19}$$

(19)式表明：在“一般非惯性系”下，质点对参考点的角动量对时间的变化率等于作用于质点的真实力$\boldsymbol{F}$、惯性力$\boldsymbol{F}_t$和科里奥利力$\boldsymbol{F}_c$对该参考点的位矢的力矩，该定理称为“一般非惯性系”下质点的角动量定理。

非惯性系中，质点在非惯性下所受的惯性力做功与路径无关，称为保守惯性力$\boldsymbol{F}_{保}'$；若是质点在非惯性下所受的惯性力做功与路径有关，称为惯性非保守惯性力$\boldsymbol{F}_{非}'$。

在保守力场中的势能表明：一定保守力相对应的势能的增量等于保守力所做功的负值。根据保守力引进势能的概念，可得非惯性系下保守惯性力的惯性势能的概念：一定保守惯性力相对应的惯性势能的增量等于保守惯性力所做功的负值，其用数学表达式可表示为

$$\boldsymbol{F}_{保}'\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}'=-\mathrm{d}U' \tag{20}$$

上式中的U'为保守惯性力的势能。

若质点所受的真实力$\boldsymbol{F}$和惯性力$\boldsymbol{F}_t$、$\boldsymbol{F}_c$都是保守力，(18)式左右两端的各个物理量可分别表示为：

$$\boldsymbol{F}^*\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}'=\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}mv_r^2\right)$$

$$\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}'=-\mathrm{d}U=-m\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}'$$

$$\boldsymbol{F}_t\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}'=-\mathrm{d}U_t'=\left[m\boldsymbol{a}_0+m\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\boldsymbol{r}'+m\boldsymbol{\omega}\times\left(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}'\right)\right]\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}'$$

$$\boldsymbol{F}_c\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}'=-2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_r\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}'=0$$

将上式代入(18)式中，则可得：

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}mv_r^2\right)=-\mathrm{d}U-\mathrm{d}U_t' \tag{21}$$

在上式中，U 为作用于质点的真实力的势能，U_t' 为作用于质点的牵连惯性力的势能。

若令 $\frac{1}{2}mv_r^2=T'$，T' 表示质点相对非惯性系的相对动能。

(21)式可写成：

$$\mathrm{d}\left(T'\right)=-\mathrm{d}U-\mathrm{d}U_t' \tag{22}$$

对上式积分，则可

$$T'+U+U_t'=c \tag{23}$$

(23)式表明：若“一般非惯性系”下的质点所受的真实力 $\boldsymbol{F}$ 和惯性力 $\boldsymbol{F}_t$ 都是保守力的情况下，质点相对一般非惯性的相对动能和保守力 $\boldsymbol{F}$ 对应的势能与保守惯性力 $\boldsymbol{F}_t$ 所对应的惯性势能之和是一个定值。该表达式称为“一般非惯性系”下的机械能守恒定理。

4. 应用

在距离地面高 h 的地方让物体 m_1 做自由落体运动，同时同高度的物体 m_2 以速度 $\boldsymbol{v}$ 做平抛运动。求物体 m_2 相对于 m_1 的着地速度。

解：物体 m_1 为非惯性参考系，非惯性参考系以加速度 $\boldsymbol{g}$ 竖直向下运动。由此易知物体 m_2 受到重力 $m_2\boldsymbol{g}$ 和牵连惯性力 $-m_2\boldsymbol{g}$ 的共同作用，质点 m_2 相对于 m_1 沿水平方向直线运动。设物体 m_2 相对于 m_1 的着地速度为 v_1，由“一般非惯性系”下质点的动能定理可知：

$$\frac{1}{2}mv_1^2-\frac{1}{2}mv^2=A+A_t \tag{24}$$

其中 $\int\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}'=\int m\boldsymbol{g}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}'=A=0$，$\int\boldsymbol{F}_t\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}'=\int -m\boldsymbol{g}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}'=A_t=0$，可得 $v_1=v$。物体 m_2 相对于 m_1 的着地速度大小为 v，方向沿水平方向。

5. 结论

基于牛顿运动定律，推导出了“一般非惯性系”下质点的动量定理、动能定理、角动量定理及其相应守恒定律的数学表达形式。质点在“一般非惯性系”下的相对动量增量等于作用于质点上的真实力 $\boldsymbol{F}$ 和惯性力 $\boldsymbol{F}_t$、$\boldsymbol{F}_c$ 在相同时间段内的冲量和，称为“一般非惯性系”下质点的动量定理；质点在“一般非惯性系”下相对动能的变量等于作用于该质点的真实力和牵连惯性力在相对运动上的路程所做功之和。该结论为“一般非惯性系”下质点的动能定理；质点对参考点的角动量对时间的变化率等于作用于质点的真实力 $\boldsymbol{F}$、惯性力 $\boldsymbol{F}_t$ 和科里奥利力 $\boldsymbol{F}_c$ 对该参考点的位矢的力矩，该定理称为“一般非惯性系”下质点的角动量定理；若“一般非惯性系”下的质点所受的真实力 $\boldsymbol{F}$ 和惯性力 $\boldsymbol{F}_t$ 都是保守力的情况下，质点相对一般非惯性的相对动能和保守力 $\boldsymbol{F}$ 对应的势能与保守惯性力 $\boldsymbol{F}_t$ 所对应的惯性势能之和是一个定值。

基金项目

广东省自然科学基金资助项目(2017A030310665)；广东省教学质量工程项目(项目代码：151100198)；惠州学院—惠州市教育局共建国家教师教育创新实验区 2018 年度教师教育研究专项课题(项目代码：SYQJSJYZX2018001，SYQJSJYZX2018002，SYQJSJYZX2018003，SYQJSJYZX2018004)；惠州学院自然科学

基金项目(2015167, hzuxl201626)；惠州学院教学质量与教学改革工程项目人才培养模式创新实验区(项目代码：CXSY2019002)；惠州学院 2019 年基础教学成果培育项目(No.19)；惠州学院 2020 年课程思政教育教学研究项目(No.2)；2019 年度惠州学院百名优秀青年教师工程项目。

参考文献

[1] 李德航，向贰君，胡金毕，张华，陈小滔．解析惯性系与非惯性系之间的关系[J]．无线互联科技, 2014(11): 114.
[2] 周正兴．非惯性参照系中的功能关系[J]．鄂州大学学报, 2005(5): 15-17.
[3] 韦胜东．李作春．非惯性系中的机械能定理和机械能守恒[J]．南宁师范高等专科学校学报, 2000(2): 41-44.
[4] 王振陆．非惯性系中的质点的动力学方程[J]．镇江师专学报(自然科学版), 1987(4): 69-72.
[5] 郑福昌．非惯性系中的动力学问题研究[J]．镇江师专学报(自然科学版), 1987(4): 99-102.
[6] 王春燕．非惯性系中的动量矩定理及守恒定律[J]．呼伦贝尔学院学报, 2012(6): 108-109.
[7] 李铁．非惯性系中的动量定理与动量守恒[J]．电子科技大学学报, 2004(10): 622-624.
[8] 尹析明．非惯性系中的质点的动能定理及机械能守恒条件[J]．成都纺织高等专科学校学报, 1998(1): 5-8.
[9] 白秀英，贺彩霞．非惯性系下的机械能守恒定律[J]．渭南师范学院学报, 2007(3): 44-46.