International Journal of Mechanics Research 力学研究, 2020, 9(3), 95-102
Published Online September 2020 in Hans. http://www.hanspub.org/journal/ijm
https://doi.org/10.12677/ijm.2020.93011

复合材料平面应力问题的弹性力学解法

贾普荣

西北工业大学力学与土木建筑学院，陕西 西安
Email: prjia@nwpu.edu.cn

收稿日期：2020年8月17日；录用日期：2020年9月2日；发布日期：2020年9月9日

摘 要

复合材料具有各向异性的力学特性，弹性方程较为复杂，其应力边值问题的求解引起广泛关注。考虑正交异性材料平面应力边值问题并按弹性力学方法建立基本方程。基于复变函数理论和坐标变换法对控制方程进行求解，并推导出正交异性材料平面问题的应力场。

关键词

复合材料，平面应力，弹性力学，复变函数，坐标变换

Elastic Mechanical Solution of Plane Stress Problem for Composite Materials

Purong Jia

School of Mechanics and Civil Engineering & Architecture, Northwestern Polytechnical University, Xi'an Shaanxi
Email: prjia@nwpu.edu.cn

Received: Aug. 17th, 2020; accepted: Sep. 2nd, 2020; published: Sep. 9th, 2020

Abstract

Composite materials are of anisotropic behaviours in the mechanic property. The elastic equations are relatively complex. The solutions of stress boundary problems have given wide attention. Typical plane stress boundary problem for the orthotropic materials is considered and the basic equations are determined by the method of elastic mechanics. Based on the theory of complex variable function and the coordinate transformation, the governing equation is solved and stress fields of the plane problem are derived for the orthotropic materials.

文章引用: 贾普荣. 复合材料平面应力问题的弹性力学解法[J]. 力学研究, 2020, 9(3): 95-102.
DOI: 10.12677/ijm.2020.93011

Keywords

Composite Material, Plane Stress, Elastic Mechanics, Complex Variable Function, Coordinate Transformation

Copyright © 2020 by author(s) and Hans Publishers Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access

1. 引言

弹性力学作为工程力学的基础学科已形成完整的经典理论，并被广泛应用到土木建筑工程、机械工程、船舶工程、航空航天工程等领域。近百年来，弹性理论不断扩展，出现了许多新的研究领域，例如断裂力学、结构力学、计算力学和复合材料力学等学科[1] [2] [3]。尤其是先进复合材料的工程应用日益扩张，复合材料弹性力学的理论发展显得更加突出。前苏联科学家运用复变函数法求解力学中的偏微分方程做出了巨大贡献，克洛索夫－穆斯赫利什维利(Колосов-Мусхелищвили)将复变函数理论用于解决弹性力学问题所取得的卓越成就，开创了数学弹性力学的经典理论，并求解了许多著名的平面应力边值问题。随着复合材料工程兴盛，列赫尼茨基(Лехницкий)推广复变函数法解决各向异性材料弹性力学问题，其求解方法和理论具有开创性，撰写的《各向异性板》等著作对拓展弹性力学奠定了理论基础[4] [5] [6]。毋容置疑，利用复变函数求解弹性力学典型问题已建立完美理论，并在解决复合材料弹性力学问题中显示出独特效果，且理论和应用研究热潮方兴未艾[7] [8] [9]。因此，为推动各向异性材料力学的深入研究，有必要对复变函数方法继续进行探索，使其弹性理论更加完善，争取在求解复合材料边值问题方面获得新的结果。

2. 复合材料力学的基本理论

复合材料层合板的铺层可认为是正交异性材料，其板内的弹性力学分析可按照平面应力状态处理。正交铺设层合板的工艺比较简单且实用，也是复合材料力学分析的典型结构。为了叙述简单，现将参考坐标轴(x, y)沿着材料主轴方向$(1, 2)$放置，则在平面应力状态下的正交异性材料本构关系为：

$$\varepsilon_x = S_{11}\sigma_x + S_{12}\sigma_y,\ \varepsilon_y = S_{12}\sigma_x + S_{22}\sigma_y,\ \gamma_{xy} = S_{66}\tau_{xy} \tag{1}$$

式中柔度系数S_{ij}可用工程弹性常数表示为：

$$S_{11} = \frac{1}{E_1},\ S_{22} = \frac{1}{E_2},\ S_{12} = -\frac{\mu_{12}}{E_1} = -\frac{\mu_{21}}{E_2},\ S_{66} = \frac{1}{G_{12}} \tag{2}$$

材料在主平面内包含四个独立的工程弹性常数：E_1，E_2，μ_{12}，G_{12}。

在弹性力学书籍中，平面应力问题的求解是最基本的内容，也是十分经典的解题方法。由于复合材料力学中的弹性常数多，基本方程包含较多弹性常数而使得寻找一般解答较为困难。然而，利用复变函数方法仍可以解决一些典型的复合材料平面问题，以下举例说明。考虑一块正交异性材料的平板，在部分边界受到压缩的分布载荷作用，如图 1 所示(q 表示单位面积力，量纲与应力相同)。按照弹性力学求解方法，可根据复合材料平面应力边值问题的基本方程求解。本例求解主要满足直边界的面力条件，即考虑的应力边界条件为：

$$\left.\begin{aligned} &\sigma_y = -q,\ \tau_{xy} = 0\ \ (x > 0, y = 0) \\ &\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0\ \ (x < 0, y = 0) \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

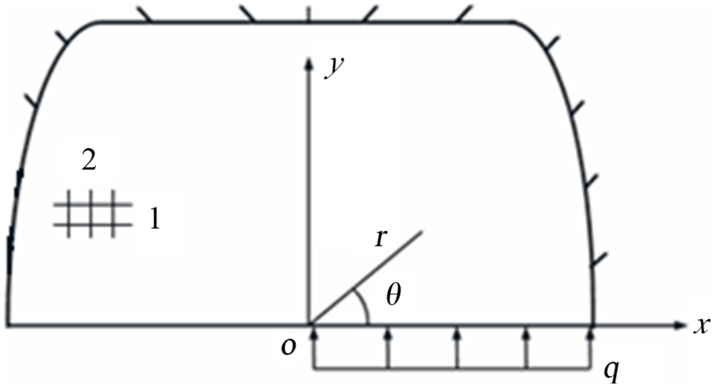

Figure.1. Orthotropic material plate subjected to distributed pressure
图 1. 正交异性材料平板边界受到分布压力作用

众所周知，解决弹性力学问题基本方法主要从三个方面考虑：静力学、几何学和物理学。通常都用应力分量作为基本变量求解平面应力边值问题，忽略体力时的静力平衡微分方程为：

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}=0,\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}=0 \tag{4}$$

这组线性齐次微分方程式的通解可用实变函数 $F(x,y)$ 表示，即：

$$\sigma_x=\frac{\partial^2 F}{\partial y^2},\ \sigma_y=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2},\ \tau_{xy}=-\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \tag{5}$$

物体内各点的相对位移导致应变，平面问题中一点的三个应变分量由两个位移分量确定。由此推出三个应变必须满足相容条件，也就是应变协调方程：

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \tag{6}$$

将应力表达式(5)代入物理方程后，再将所得应变分量代入协调方程，由此可得到求解正交异性复合材料平面应力问题的基本方程为：

$$\frac{\partial^4 F}{\partial y^4}+2B\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2}+C\frac{\partial^4 F}{\partial x^4}=0 \tag{7}$$

式中，

$$B=\frac{S_{66}+2S_{12}}{2S_{11}}=\frac{E_1}{2G_{12}}-\mu_{12},\ C=\frac{S_{22}}{S_{11}}=\frac{E_1}{E_2} \tag{8}$$

式(7)是一个常系数齐次线性偏微分方程，应力函数 F 为实函数，可根据给定边值问题选择合适的函数类型，以便求得具体问题的解答。由式(5)可知，若应力函数为一次多项式，就表示无应力状态，则不必考虑。因此可选择与应力相关的多项式并满足方程(7)作为简单解答 $F^*(x,y)$，表示为：

$$F^*=A_1x^2+A_2xy+A_3y^2+A_4x^3+A_5x^2y+A_6xy^2+A_7y^3+A_8x^3y+A_9xy^3 \tag{9}$$

按式(5)可求得应力分量为：

$$\begin{cases}\sigma_x=2A_3+2A_6x+6A_7y+6A_9xy\\ \sigma_y=2A_1+6A_4x+2A_5y+6A_8xy\\ \tau_{xy}=-A_2-2A_5x-2A_6y-3A_8x^2-3A_9y^2\end{cases} \tag{10}$$

下面讨论一般平面问题的应力函数及其求解方法。

3. 平面应力复变函数解法

在解决弹性力学平面边值问题时，利用复变函数及其坐标变换法得到了一些经典的结果，若采用实函数求解就十分困难。为了解决复合材料中的应力边值问题，引入一个复变量 w，并用直角坐标和极坐标表示为：

$$\left.\begin{aligned} w &= x + ihy = r\cos\theta + ihr\sin\theta = r\left(\cos\theta + ih\sin\theta\right) \\ \overline{w} &= x - ihy = r\cos\theta - ihr\sin\theta = r\left(\cos\theta - ih\sin\theta\right) \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

式中，h 为实常数(且令：$h > 0$)。当 $h = 1$ 时，$w = z = x + iy$，就是习以为常的基本复数，即：$z = x + iy$，$\overline{z} = x - iy$ ($i = \sqrt{-1}$)。再用字母 β 表示角度，与 θ 相关联，并设两个角度之间具有以下的转化关系：

$$h\sin\theta = M\sin\beta,\ \cos\theta = M\cos\beta \tag{12}$$

可以导得：

$$\left.\begin{aligned} & h\tan\theta = \tan\beta,\ \ \beta = \arctan\left(h\tan\theta\right) \\ & M = \sqrt{h^2\sin^2\theta + \cos^2\theta} = \sqrt{\frac{h^2}{\sin^2\beta + h^2\cos^2\beta}} \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

复数 w 和共轭复数 $\overline{w}$ 可表示为：

$$\left.\begin{aligned} w &= rM\left(\cos\beta + i\sin\beta\right) = rM\mathrm{e}^{i\beta} \\ \overline{w} &= rM\left(\cos\beta - i\sin\beta\right) = rM\mathrm{e}^{-i\beta} \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

复变量的偏导数为：

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial \overline{w}}{\partial x} = 1,\ \ \frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{\partial \overline{w}}{\partial y} = ih$$

应力函数 $F = F\left(x, y\right) = \tilde{F}\left(w, \overline{w}\right)$ 的偏导数可用复变量表示为：

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial \tilde{F}}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \overline{w}}\frac{\partial \overline{w}}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{F}}{\partial w} + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \overline{w}} \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial \tilde{F}}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \overline{w}}\frac{\partial \overline{w}}{\partial y} = ih\left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial w} - \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \overline{w}}\right) \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

再求高阶偏导数并代入式(7)，可将应力函数表示的基本方程转化为：

$$\left(h^4 - 2Bh^2 + C\right)\left(\frac{\partial^4 \tilde{F}}{\partial w^4} + \frac{\partial^4 \tilde{F}}{\partial \overline{w}^4}\right) + 4\left(C - h^4\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial w^2} + \frac{\partial^2}{\partial \overline{w}^2}\right)\frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial w \partial \overline{w}} + 2\left(3h^4 + 2Bh^2 + 3C\right)\frac{\partial^4 \tilde{F}}{\partial w^2 \partial \overline{w}^2} = 0 \tag{16}$$

情形 1： $h^4 - 2Bh^2 + C = 0$，$C - h^4 = 0$，$\dfrac{\partial^4 \tilde{F}}{\partial w^2 \partial \overline{w}^2} = 0$

在这种情况下，其解答为：$h^4 = B^2 = C$。再根据前面对常数的限定，可得：

$$h = \sqrt{\frac{E_1}{2G_{12}} - \mu_{12}} = \sqrt[4]{\frac{E_1}{E_2}} \tag{17}$$

可确定出应力函数的一般形式为：

$$F = \tilde{F}\left(w, \overline{w}\right) = D_1\overline{w}\Phi + D_2 w\overline{\Phi} + D_3\Psi + D_4\overline{\Psi} \tag{18}$$

这里复变函数记为：$\Phi=\Phi(w)$，$\bar{\Phi}=\bar{\Phi}(\bar{w})$，$\Psi=\Psi(w)$，$\bar{\Psi}=\bar{\Psi}(\bar{w})$。

情形 2： $h^4-2Bh^2+C=0$，$\dfrac{\partial^2\tilde{F}}{\partial w\partial\bar{w}}=0$

在这种情况下，其解答为：

$$h^2=B\pm\sqrt{B^2-C}$$

现设 $B^2>C$（已知：$B=\dfrac{E_1}{2G_{12}}-\mu_{12}$，$C=\dfrac{E_1}{E_2}$），再令 $h_1>h_2>0$，则有：

$$h_1=\sqrt{B+\sqrt{B^2-C}},\ h_2=\sqrt{B-\sqrt{B^2-C}} \tag{19}$$

此时可引入两个复变量(w_1,w_2)：

$$\left.\begin{aligned} w_1&=x+ih_1y=r\cos\theta+ih_1r\sin\theta=r\left(\cos\theta+ih_1\sin\theta\right)\\ w_2&=x+ih_2y=r\cos\theta+ih_2r\sin\theta=r\left(\cos\theta+ih_2\sin\theta\right)\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

则有：$\bar{w}_1=x-ih_1y=r\left(\cos\theta-ih_1\sin\theta\right)$，$\bar{w}_2=x-ih_2y=r\left(\cos\theta-ih_2\sin\theta\right)$。

再由 $\dfrac{\partial^2\tilde{F}}{\partial w\partial\bar{w}}=0$ 可确定出应力函数的表达式为：

$$\tilde{F}=D_1\Phi_1+D_2\bar{\Phi}_1+D_3\Phi_2+D_4\bar{\Phi}_2 \tag{21}$$

复变函数为：$\Phi_1=\Phi_1(w_1)$，$\bar{\Phi}_1=\bar{\Phi}_1(\bar{w}_1)$，$\Phi_2=\Phi_2(w_2)$，$\bar{\Phi}_2=\bar{\Phi}_2(\bar{w}_2)$。

4. 平面应力分析

为了解决图 1 所示的正交异性平板在边界受到分布载荷作用，需要选择合适的复变函数针对以上两类情况分别进行应力分析。

4.1. 复函数及应力(情形 1)

对于情形 1，为满足图 1 的应力边界条件并与式(18)的复变函数形式类同，可将应力函数用复变量的不同组合表示为：

$$F=C_1iw\bar{w}\left(\ln w-\ln\bar{w}\right)+C_2w\bar{w}+C_3i\left(w^2-\bar{w}^2\right) \tag{22}$$

利用式(15)可求得偏导数为：

$$\frac{\partial F}{\partial x}=C_1i\left[\left(w+\bar{w}\right)\left(\ln w-\ln\bar{w}\right)+\bar{w}-w\right]+C_2\left(w+\bar{w}\right)+2C_3i\left(w-\bar{w}\right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=hC_1\left[\left(w-\bar{w}\right)\left(\ln w-\ln\bar{w}\right)-\left(w+\bar{w}\right)\right]-hC_2i\left(w-\bar{w}\right)-2hC_3\left(w+\bar{w}\right)$$

再求二阶偏导数，并代入式(5)，可确定出应力分量如下：

$$\sigma_x=\frac{\partial^2F}{\partial y^2}=h^2C_1i\left(2\ln\frac{w}{\bar{w}}+\frac{w}{\bar{w}}-\frac{\bar{w}}{w}\right)+2h^2C_2$$

$$\sigma_y=\frac{\partial^2F}{\partial x^2}=C_1i\left(2\ln\frac{w}{\bar{w}}+\frac{\bar{w}}{w}-\frac{w}{\bar{w}}\right)+2C_2$$

$$\tau_{xy}=-\frac{\partial^2F}{\partial x\partial y}=hC_1\frac{\left(w-\bar{w}\right)^2}{w\bar{w}}+2h\left(C_1+2C_3\right)$$

利用式(14)的复数表示形式，将应力转化为：

$$\sigma_x = -4h^2C_1\left(\beta+\sin\beta\cos\beta\right)+2h^2C_2$$

$$\sigma_y = -4C_1\left(\beta-\sin\beta\cos\beta\right)+2C_2$$

$$\tau_{xy} = -4hC_1\sin^2\beta+2h\left(C_1+2C_3\right)$$

根据应力边界条件式(3)，且注意到：$\theta=0$ 则 $\beta=0$ 及 $\theta=\pi$ 则 $\beta=\pi$，可将常数确定如下：

$$C_1+2C_3=0,\ 2C_2=-q,\ -4\pi C_1=q$$

因此，应力分量为：

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{qh^2}{\pi}\left(\beta+\sin\beta\cos\beta\right)-qh^2\\ \sigma_y &= \frac{q}{\pi}\left(\beta-\sin\beta\cos\beta\right)-q\\ \tau_{xy} &= \frac{qh}{\pi}\sin^2\beta\end{aligned}\right\}\tag{23}$$

显然此公式比较简明，当 $h=1$ 时，即可表示各向同性材料的应力分量解答。

4.2. 复函数及应力(情形 2)

对于情形 2，为满足图 1 的应力边界条件并与式(21)的复变函数形式类同，可选择应力函数的复变量表达式为：

$$\begin{aligned}F &= C_1i\left(w_1^2\ln w_1-\bar{w}_1^2\ln\bar{w}_1\right)+C_2\left(w_1^2+\bar{w}_1^2\right)\\ &\quad+C_3i\left(w_2^2\ln w_2-\bar{w}_2^2\ln\bar{w}_2\right)+C_4\left(w_2^2+\bar{w}_2^2\right)\end{aligned}\tag{24}$$

求二阶偏导数后，可得应力分量为：

$$\sigma_y=\frac{\partial^2F}{\partial x^2}=2C_1i\ln\frac{w_1}{\bar{w}_1}+2C_3i\ln\frac{w_2}{\bar{w}_2}+4C_2+4C_4$$

$$\sigma_x=\frac{\partial^2F}{\partial y^2}=-2h_1^2C_1i\ln\frac{w_1}{\bar{w}_1}-2h_2^2C_3i\ln\frac{w_2}{\bar{w}_2}-4h_1^2C_2-4h_2^2C_4$$

$$\tau_{xy}=-\frac{\partial^2F}{\partial x\partial y}=2h_1C_1\left(\ln w_1+\ln\bar{w}_1+3\right)+2h_2C_3\left(\ln w_2+\ln\bar{w}_2+3\right)$$

根据应力边界条件，当 $y=0$ 时，$\tau_{xy}=0$，由此可确定出：$h_2C_3=-h_1C_1$。应力分量转化为：

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x &= -2h_1^2C_1i\left(\ln\frac{w_1}{\bar{w}_1}-\frac{h_2}{h_1}\ln\frac{w_2}{\bar{w}_2}\right)-4h_1^2C_2-4h_2^2C_4\\ \sigma_y &= 2C_1i\left(\ln\frac{w_1}{\bar{w}_1}-\frac{h_1}{h_2}\ln\frac{w_2}{\bar{w}_2}\right)+4C_2+4C_4\\ \tau_{xy} &= 2h_1C_1\ln\frac{w_1\bar{w}_1}{w_2\bar{w}_2}\end{aligned}\right\}\tag{25}$$

为了化简上式，引入关系式：

$$h_1\sin\theta=M_1\sin\beta_1,\ \cos\theta=M_1\cos\beta_1$$

$$h_2\sin\theta = M_2\sin\beta_2,\ \cos\theta = M_2\cos\beta_2$$

可导出：

$$\tan\beta_1 = h_1\tan\theta,\ M_1=\sqrt{h_1^2\sin^2\theta+\cos^2\theta}$$

$$\tan\beta_2 = h_2\tan\theta,\ M_2=\sqrt{h_2^2\sin^2\theta+\cos^2\theta}$$

复变量表达式(20)转化为：

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= r\left(\cos\theta+ih_1\sin\theta\right)=rM_1\left(\cos\beta_1+i\sin\beta_1\right)=rM_1\mathrm{e}^{i\beta_1}\\ w_2 &= r\left(\cos\theta+ih_2\sin\theta\right)=rM_2\left(\cos\beta_2+i\sin\beta_2\right)=rM_2\mathrm{e}^{i\beta_2}\end{aligned}\right\}\tag{26}$$

由此可得：$\dfrac{w_1}{\bar{w}_1}=\mathrm{e}^{2i\beta_1}$，$\dfrac{w_2}{\bar{w}_2}=\mathrm{e}^{2i\beta_2}$，$\dfrac{w_1\bar{w}_1}{w_2\bar{w}_2}=\left(\dfrac{M_1}{M_2}\right)^2$

可将式(25)的应力分量简化为：

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= 4h_1^2C_1\left(\beta_1-\frac{h_2}{h_1}\beta_2\right)-4h_1^2C_2-4h_2^2C_4\\ \sigma_y &= -4C_1\left(\beta_1-\frac{h_1}{h_2}\beta_2\right)+4C_2+4C_4\\ \tau_{xy} &= 4h_1C_1\ln\frac{M_1}{M_2}\end{aligned}\right\}\tag{27}$$

注意到：$\theta=0$ 则 $\beta_1=\beta_2=0$ 以及 $\theta=\pi$ 则 $\beta_1=\beta_2=\pi$。再根据应力边界条件可确定出常数为：

$$4C_1=\frac{qh_2}{\pi\left(h_1-h_2\right)},\quad 4C_2=\frac{qh_2}{h_1-h_2},\quad 4C_4=-\frac{qh_1}{h_1-h_2}$$

由此可得应力分量为：

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{qh_1h_2}{\pi\left(h_1-h_2\right)}\left(h_1\beta_1-h_2\beta_2\right)-qh_1h_2\\ \sigma_y &= \frac{q}{\pi\left(h_1-h_2\right)}\left(h_1\beta_2-h_2\beta_1\right)-q\\ \tau_{xy} &= \frac{qh_1h_2}{\pi\left(h_1-h_2\right)}\ln\frac{M_1}{M_2}\end{aligned}\right\}\tag{28}$$

式中，$h_1>h_2>0$，根据正交异性材料工程弹性常数按式(19)确定数值。推导的结果表明，应力分量与径向 r 无关，随着角度 θ 而变化，符合应力边值要求。

值得注意，情形1与情形2有显著差异，适用范围不同。应力表达式(23)可适用于各向同性材料($h=1$)，但常数 h 取值受到限制，必需满足式(17)，因此情形1所得结果是特定解答。情形2适用范围广，由式(28)给出的应力解答可适合一般正交异性材料，但公式中的分母出现两个常数之差(h_1-h_2)，显然对于各向同性材料就不适用了。由此看出，两种情形既有局限性，又有广泛性，相互弥补，使得解答得以完整。可以认为情形1的解答是在各向同性材料与正交异性材料之间构成的纽带，填补了理论上的缺陷。情形1在学术上显示出严谨性和规律性，情形2具有普遍性与工程实用性。本文的结果对基础理论研究和工程应用方面都可借鉴与参考。

5. 结论

简要介绍了复合材料力学平面问题的基本理论，根据复合材料各向异性本构关系，建立求解平面应力问题的基本方程。基于复变函数理论和坐标变换法对控制方程进行求解，选用合理的应力函数推导出正交异性板平面应力场的表达式。

基金项目

国家自然科学基金资助(No. 51475372)。

参考文献

[1] 徐芝纶. 弹性力学简明教程[M]. 第三版. 北京: 高等教育出版社, 2002.

[2] Timoshenko, S.P. and Goodier, J.N. (2004) Theory of Elasticity. 3rd Edition, Tsinghua University Press, Beijing.

[3] 沈观林, 胡更开. 复合材料力学[M]. 北京: 清华大学出版社, 2006.

[4] 杨维阳, 李俊林, 张雪霞. 复合材料断裂复变方法[M]. 北京: 科学出版社, 2005.

[5] 李群, 欧卓成, 陈宜亨. 高等断裂力学[M]. 北京: 科学出版社, 2017.

[6] Friedrich, K. (1989) Application of Fracture Mechanics to Composite Materials. Elsevier Scientific Publication.

[7] Zhang, H. and Qiao, P. (2019) A State-Based Peridynamic Model for Quantitative Elastic and Fracture Analysis of Orthotropic Materials. *Engineering Fracture Mechanics*, **206**, 147-171. https://doi.org/10.1016/j.engfracmech.2018.10.003

[8] Jia, P., Suo, Y., Jia, C. and Wang, Q. (2019) Stress Analysis of Orthotropic Wedge Loaded on the Apex. *IOP Conference Series*: *Materials Science and Engineering*, **585**, 448-453. https://doi.org/10.1088/1757-899X/585/1/012069

[9] 贾普荣. 正交异性板裂纹端部应力及变形通解[J]. 力学研究, 2020, 9(2): 70-76.