

变截面柔性杆与流体的耦合运动特性研究

席小峰, 韩明君

兰州理工大学, 理学院, 甘肃 兰州
Email: 878635831@qq.com

收稿日期: 2021年1月31日; 录用日期: 2021年3月5日; 发布日期: 2021年3月16日

摘要

为了研究变截面柔性杆与流体的耦合运动特性,建立了在轴向风力作用下两端夹紧的变截面柔性杆模型。先通过理想流体假设和Euler-Bernoulli梁假设,给出变截面柔性杆与风场之间的流固耦合方程,再通过线性稳定性分析得到该柔性杆的扰动时间增长率和特征函数的表达式,由此研究柔性杆的长波不稳定性失稳机制,并讨论了频率与扰动时间增长率的变化规律。结果表明:柔性杆的截面变化系数与位置函数对频率和扰动时间增长率的影响较为显著;弹性模量对扰动时间增长率影响较大,对频率的影响可忽略不计。推导得出了耦合运动最不稳定时的波数和频率的表达式,并得到最不稳定时的频率与风速成线性关系。

关键词

柔性体, 流固耦合, 变截面, 运动特性

Study on Interaction between Moving Fluid and Flexible Rod with Variable Cross-Section

Xiaofeng Xi, Mingjun Han

School of Science, Lanzhou University of Technology, Lanzhou Gansu
Email: 878635831@qq.com

Received: Jan. 31st, 2021; accepted: Mar. 5th, 2021; published: Mar. 16th, 2021

Abstract

In order to study the interaction between moving fluid and flexible rod with variable cross-section, a model of flexible rod with variable cross-section clamped at both ends under the action of axial wind is established. Based on the ideal fluid assumption and the Euler Bernoulli beam assumption, it establishes the basic equation of the interaction between flexible rod with variable cross-section

and the wind field. Then through the linear stability analysis, the expression of the temporal growth rate of the perturbation and the characteristic function of the flexible rod is obtained. From this, the long-wave instability and instability mechanism of the flexible rod are studied, and the change law of the growth rate of the frequency and the temporal growth rate of the perturbation is discussed. The results show that the section variation coefficient and position function of flexible rod have a significant influence on the value of the frequency and the temporal growth rate of the perturbation; the modulus of elasticity has a greater influence on the temporal growth rate of the perturbation, and the influence on the frequency is negligible. It derives the expressions of the wave number and frequency when the coupled motion is the most unstable, and the frequency at the most unstable time is linearly related to the wind velocity.

Keywords

Flexible Sheet, Fluid-Structure Interaction, Variable Cross-Section, Motion Characteristics

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

柔性体与流体的耦合运动(Fluid-Flexible-Structure-Interaction)现象广泛的存在于各学科领域和工程实际中。如在仿生学中,通过对飞行和游动生物的深入观测研究,研制出的微型飞行器和水下航行器等高精器械大量的用于航天航空和国防事业之中[1] [2] [3] [4] [5],其中生物的飞行和游动本质上是柔性体(翅膀、尾鳍)和流体(气流、水流)的耦合运动。在生物医学上,血液的流动、人工心脏瓣膜的开合以及打鼾等现象亦都涉及到柔性体(血管、心脏瓣膜和软腭)与流体(血液和气流)的耦合运动[6] [7] [8] [9]。另外,在纸张、丝绸以及塑料薄膜等物品与材料的生产制造过程中,应充分考虑这些柔性材料与气流相互作用产生的耦合运动,避免因气流引起的大幅度摆动而造成的破坏[10]。在高压输电线路和海底电缆、管道等工程项目的设计和实施的,亦应充分考虑柔性体(输电线、电缆、管道)与流体(风载、水流)之间相互作用产生的耦合运动所带来的影响[11]。因在现实生活中,材料的均匀性是抽象化、理想化的。故在上述学科领域和工程实际中所描述的柔性体,相较于均匀柔性体,非均匀柔性体更贴合实际以及更具有代表性。因此,变截面柔性体与流体的耦合运动特性研究在国防安全、医疗健康和基础建设等方面具有重要的应用价值且亟待开展。

柔性体与流体的耦合运动属于流固耦合(Fluid-Structure-Interaction)范畴。由于流固耦合问题涉及多领域,且具有多场耦合、多重非线性等复杂特征,难以给出精确的解答,所以对该问题的研究以实验和数值模拟的方法为主。在最初该问题的研究中通常采用一个位于轴向流中前边缘固定后边缘自由的悬臂柔性板的经典模型[12],如 Taneda 的第一次试验在一个垂直风洞中利用该模型对不同材质(丝绸、帆布、薄纱)和形状(矩形、三角形)的旗帜进行了详细的实验[13]。Datta 和 Gottenberg 进行了类似的实验,并研究了临界流速与柔性体长度和厚度之间的关系[14];紧接着 Lemaitre、Yamaguchi 等人对不同高宽比的柔性材料做了详细的实验研究[15] [16]。在这些实验结果中系统地发现临界速度高于理论预测值[17],这种差异的根源与一直以来的平面假设有关[18]。在最近的柔性体与流体的耦合运动研究中,孙传宝和王思莹等人分别做了一个和两个柔性旗帜在均匀流中的摆动实验[19] [20],Kim 等人做了一个前边缘自由后边缘固定的反向悬臂柔性体的实验,研究了自由边缘涡旋的形成与柔性体的弹性应变能之间的关系[21]。Jia 等

人采用线性梁模型解析的给出了柔性体的频率和波数与风速之间的尺度律[12]。Cisonni 等人研究了二维粘性流中柔性体的非均匀部分对整体运动的影响[22]。在上述的研究中,由于柔性体抗弯刚度较小的特性,其在与流体相互作用时一般会发生较大变形,因此对于这类流固耦合问题给出解析解是比较困难的。本文将在均匀柔性体的基础上,解析地给出非均匀柔性体与气流的耦合运动特性。

柔性体与流体的耦合运动特性研究不仅可以使我们了解“鹰击长空,鱼翔浅底”等美丽场景背后的奥妙,更能使我们精确的掌握流固耦合现象的内在机理。这对于涉及风载、水流等流体的构件或机械的设计和制造有着指导性作用。本文通过 *Euler-Bernoulli* 梁假设和理想流体假设对气流中两端夹紧变截面柔性杆的运动做了深入研究,给出了该变截面柔性杆与流体耦合运动时的波扰动时间增长率和特征函数的表达式,并讨论了角频率与扰动时间增长率的变化规律,为非均匀柔性杆与流体耦合运动的相关实验研究和数值模拟提供了理论依据。

2. 控制方程

将一个无限长的变截面柔性杆置于轴向气流流速为 V 的风场中,如图 1 所示。

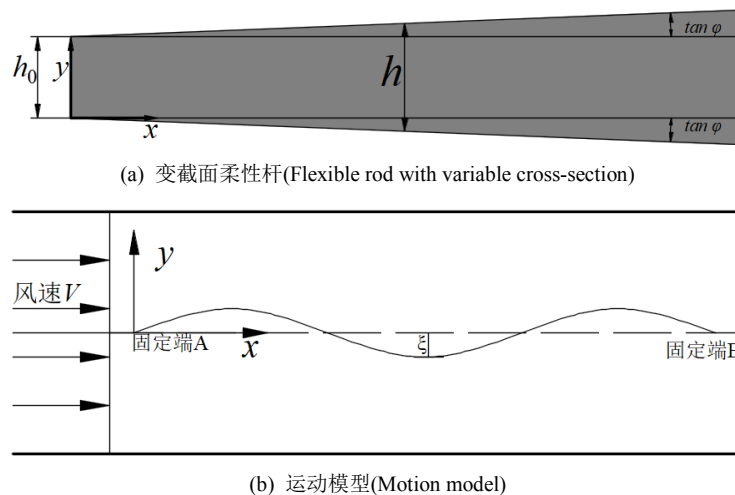


Figure 1. Model of interaction between airflow and flexible rod with variable cross-section

图 1. 变截面柔性杆与气流耦合运动模型

其中 x, y 分别为横纵坐标且均以固定端 A 为起点, A、B 分别为柔性杆两端在风场中的固定位置; $\xi(x, t)$ 和 E 分别为柔性杆的挠度和弹性模量。柔性杆某一横向位置处的直径为 $D = D(x) = d_0 + 2\alpha x$ (令 $\alpha = \tan \varphi$), 其中 d_0 和 α 分别为该柔性杆的初始直径和截面变化系数。假设柔性杆两个固定端(A、B)之间的部分足够长(忽略固定端对柔性杆运动的影响), 风速恒定且在柔性杆两侧均匀流动。对于固定端之间的柔性杆本文将其看作经典梁(*Euler-Bernoulli beam*)来处理, 则由经典梁的动力学平衡方程[23]可得该变截面柔性杆与气流耦合运动时的平衡方程:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right] + \rho' A(x) \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \delta p \cdot D(x) = 0 \quad (1)$$

其中, $I(x) = \frac{\pi D(x)^4}{64}$, $A(x) = \frac{\pi D(x)^2}{4}$, $D(x) = 2r(x)$, ρ' 是柔性体的密度, δp 是柔性体两侧的压强差。

忽略气流粘性并假设其不可压缩(气流流速较小, 马赫数小于 0.3 时, 可以将气流视作不可压缩流体 [24]), 则此时流场的连续方程和动量方程为:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad (3)$$

其中 ρ 为气流密度, \mathbf{u} 和 p 分别为流速和压强。

由于柔性杆的不可渗透性, 故当柔性杆与气流发生耦合运动时, 柔性杆的速度应等于柔性杆上气流流速, 则有:

$$\mathbf{u}(y = \xi) \cdot \mathbf{n} = \frac{d\xi}{dt} \quad (4)$$

其中 \mathbf{n} 是柔性杆的法向量。

3. 线性稳定性分析

因方程(1)是根据线性梁理论得出的平衡方程, 又方程(2)~(4)和方程(1)因耦合关系共同构成闭合方程组, 所以对方程(1)~(4)应进行一致的线性化处理才能对其求解。本文假设变截面柔性杆两固定端之间的部分足够长, 可以忽略固定端边界条件对耦合运动的影响, 并假设变截面柔性杆在气流作用下, 两固定端之间部分的运动模态是以 $\Omega = \omega + i\sigma$ 为频率的正弦形式(ω 为柔性杆运动时的频率, σ 为波扰动时间增长率)。则有:

$$\xi = A e^{ikx - i\Omega t} \quad (5)$$

$$u_x = V + UVkA e^{-i\Omega t + ikx - \kappa y} \quad (6)$$

$$u_y = WVkA e^{-i\Omega t + ikx - \kappa y} \quad (7)$$

$$p = p_0 + P' \rho V^2 kA e^{-i\Omega t + ikx - \kappa y} \quad (8)$$

其中 ξ 为柔性杆的挠曲线方程, A 和 k 分别为柔性杆挠曲线的振幅和波数; V 为风场中气流的平均流速, κ 为扰动波沿着 y 方向的空间衰减率; u_x 和 u_y 分别为柔性杆运动时气流在 x 和 y 方向上的流速, p 为柔性杆运动时流场内的压强; U 、 W 、 P' 分别是定义的无量纲未知量。上述四个量 ξ 、 u_x 、 u_y 和 p 的线性化处理均是将其写作零阶项和一阶项的和, 其中每个量的零阶项对应于柔性杆未发生运动(扰动)时该量的初始值, 一阶项对应于柔性杆发生运动(扰动)后, 柔性杆的运动对该量的“影响值”。例如在 u_x 的线性化处理, 零阶项是初始气流流速 V , 一阶项是由柔性杆运动(扰动)引起的横向速度的变化量; 类似的, 可得到另外三个量 u_x 、 u_y 和 p 的表达式。在柔性杆与流体耦合运动的实验中, 表达式(5)~(8)中的未知量仅为 U 、 W 、 P' 和 κ , 其他量均可由实验测得[12], 这里本文仅做理论推导。

将(5)~(8)带入到(1)~(4)中, 求解未知量得:

$$k^2 = \kappa^2 \quad (9)$$

$$U = \pm \frac{kV - \Omega}{kV} \quad (10)$$

$$W = i \frac{kV - \Omega}{kV} \quad (11)$$

$$P' = \mp \frac{(kV - \Omega)^2}{(kV)^2} \quad (12)$$

在表达式(9)中, 因柔性杆的运动对流场的影响在远离柔性杆的方向上愈来愈弱, 故本文设定: 在 $y \geq 0$ 的区域有 $k = \kappa$, 反之则为 $k = -\kappa$, 其中 \pm 符号对应着 y 的正负区域。由表达式(12)可得柔性杆两侧压强差 δp 为:

$$\delta p = p(y \rightarrow 0^+) - p(y \rightarrow 0^-) = -2\rho \frac{(kV - \Omega)^2}{k} \xi \quad (13)$$

将表达式(5)和(13)带入方程(1), 则有:

$$\frac{\pi E}{64} \left[-k^2 \frac{\partial^2 D(x)^4}{\partial x^2} - 2ik^3 \frac{\partial D(x)^4}{\partial x} + k^4 D(x)^4 \right] - \Omega^2 \rho' D(x)^2 - \frac{2\rho(kV - \Omega)^2}{k} D(x) = 0 \quad (14)$$

4. 色散关系

将柔性杆直径 $D(x) = d_0 + 2\alpha x$ 带入方程(14)中, 并引入如下无量纲变量将其无量纲化:

$$\bar{\Omega} = \frac{d_0}{V} \Omega, \quad \bar{k} = d_0 k, \quad \bar{x} = \frac{x}{d_0}, \quad \bar{E} = \frac{E}{\rho V^2}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho'}{\rho}.$$

得到关于 $\bar{\Omega}$ 的无量纲方程:

$$\frac{\pi \bar{E}}{4} \left[\bar{k}^2 \alpha^2 (1 + 2\alpha \bar{x}) + i\bar{k}^3 \alpha (1 + 2\alpha \bar{x})^2 - \frac{1}{16} \bar{k}^4 (1 + 2\alpha \bar{x})^3 \right] + \frac{\pi}{4} \bar{\rho} (1 + \alpha \bar{x}) \bar{\Omega}^2 + \frac{2}{\bar{k}} (\bar{k} - \bar{\Omega})^2 = 0 \quad (15)$$

由于对柔性体研究一般所选取的研究对象为薄片状或细长杆状柔性材料[25] [26], 又为了符合柔性体波动的实际情况, 故本文所取的变截面柔性杆的截面变化系数 α 是一个非常小的值 ($\alpha = 0.001, 0.003, 0.005$)。在方程(15)的第一项中, 因 $-\bar{k}^4 (1 + 2\alpha \bar{x})^3 / 16$ 项不包含截面变化系数 α , 其值远远大于另外两项, 所以可以略去 $\bar{k}^2 \alpha^2 (1 + 2\alpha \bar{x})$ 项和 $i\bar{k}^3 \alpha (1 + 2\alpha \bar{x})^2$ 项, 有:

$$-\frac{\pi \bar{E}}{64} \bar{k}^4 (1 + 2\alpha \bar{x})^3 + \frac{\pi}{4} \bar{\rho} \bar{\Omega}^2 (1 + 2\alpha \bar{x}) \bar{\Omega}^2 + \frac{2}{\bar{k}} (\bar{k} - \bar{\Omega})^2 = 0 \quad (16)$$

显然, (16)式是一个关于 $\bar{\Omega}$ 的二次方程, 解该方程得:

$$\bar{\Omega} = \frac{8\bar{k}}{8 + \pi \bar{\rho} \bar{k} (1 + 2\alpha \bar{x})} \pm \frac{\bar{k} \sqrt{\frac{\pi \bar{E}}{4} \bar{k}^4 (1 + 2\alpha \bar{x})^3 \left[\frac{2}{\bar{k}} + \frac{\pi}{4} \bar{\rho} (1 + 2\alpha \bar{x}) \right] - 8\pi \bar{\rho} \bar{k} (1 + 2\alpha \bar{x})}}{8 + \pi \bar{\rho} \bar{k} (1 + 2\alpha \bar{x})} \quad (17)$$

在式(17)的平方根表达式中可以定义一个截至波数 \bar{k}_c , 为:

$$\frac{\pi \bar{E}}{4} \bar{k}^4 (1 + 2\alpha \bar{x})^3 \left[\frac{2}{\bar{k}} + \frac{\pi}{4} \bar{\rho} (1 + 2\alpha \bar{x}) \right] - 8\pi \bar{\rho} \bar{k} (1 + 2\alpha \bar{x}) = 0 \quad (18)$$

其中 \bar{k}_c 是变截面柔性杆与气流耦合运动时, 波动趋于稳定的临界波数。根据式(18)可求得 \bar{k}_c , 其中 \bar{k}_c 为 \bar{E} , $\bar{\rho}$, α 和 \bar{x} 的函数。当波数大于 \bar{k}_c 时(求解出具体的 \bar{k}_c 后, 可判断波数大于或小于 \bar{k}_c 时扰动时间增长率 $\bar{\sigma}$ 是否存在, 具体见图 3), 由频率 $\bar{\Omega}$ 的表达式可知, $\bar{\sigma} = 0$, 此时的频率是一个实数; 即此时柔性杆的运动趋于稳定—波形既不增长也不扩散。当波数小于 \bar{k}_c 时, $\bar{\sigma} \neq 0$, 此时频率为复数, 由复频率 $\bar{\Omega} = \bar{\omega} + i\bar{\sigma}$ 可得此时角频率和扰动时间增长率的表达式为:

$$\bar{\omega} = \frac{8\bar{k}}{8 + \pi \bar{\rho} \bar{k} (1 + 2\alpha \bar{x})} \quad (19)$$

$$\bar{\sigma} = \pm \frac{\bar{k} \sqrt{8\pi\bar{\rho}\bar{k}(1+2\alpha\bar{x}) - \frac{\pi\bar{E}}{4}\bar{k}^4(1+2\alpha\bar{x})^3} \left[\frac{2}{\bar{k}} + \frac{\pi}{4}\bar{\rho}(1+2\alpha\bar{x}) \right]}{8 + \pi\bar{\rho}\bar{k}(1+2\alpha\bar{x})} \quad (20)$$

由式(19)可得无量纲角频率 $\bar{\omega}$ 与无量纲波数 \bar{k} 的关系曲线图(对于具体的单个柔性体, 材料密度为定值, 本文给定其值为 $\bar{\rho} = 1000$), 如图 2 所示:

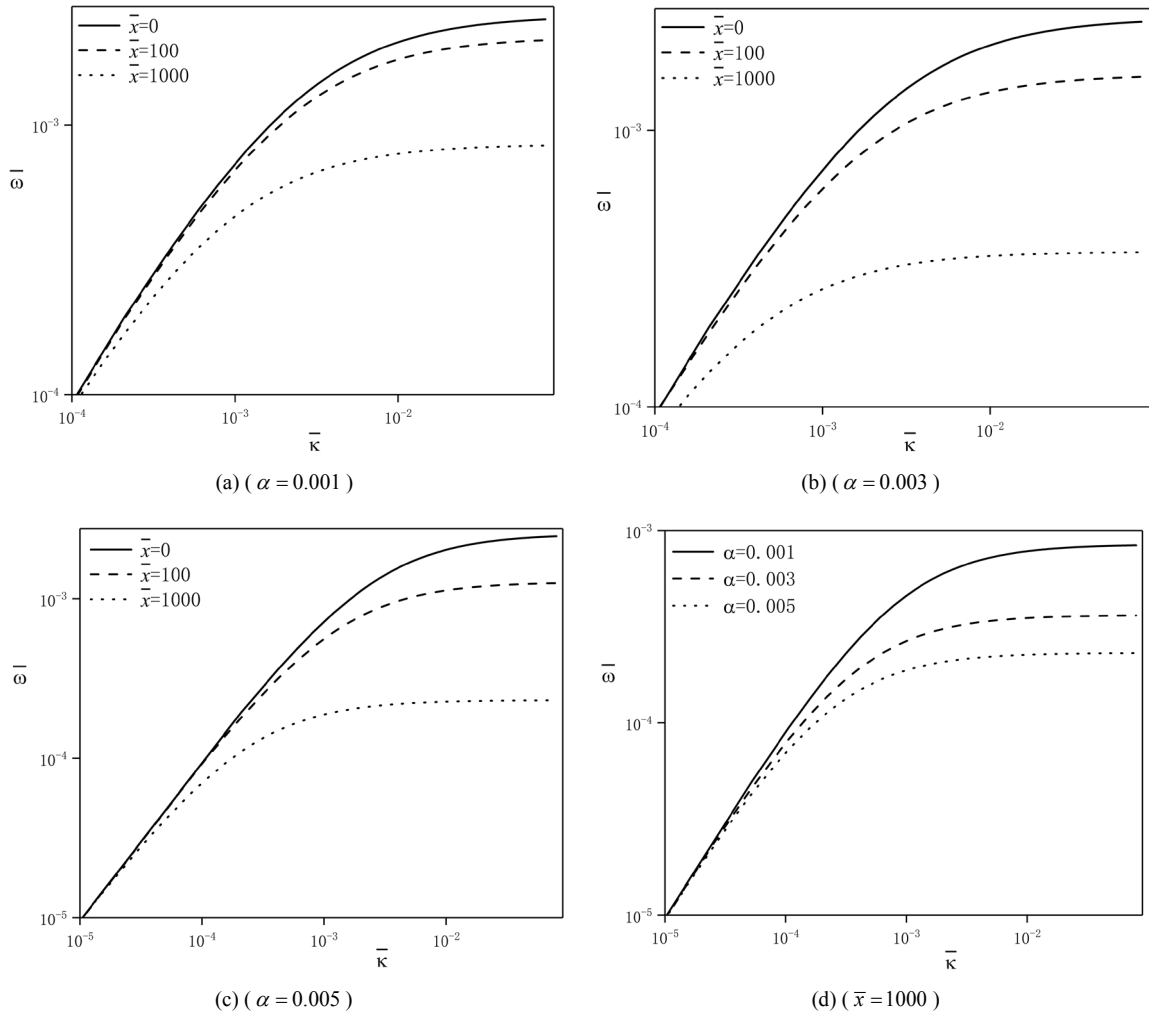


Figure 2. The effect of dimensionless wave number on dimensionless angular frequency with respectively different the cross-section change coefficient and the transverse position

图 2. 截面变化系数和横向位置分别不同时, 无量纲波数对无量纲角频率的影响

由图 2 中, a~c 图可知, 当波数在不稳定范围内($\bar{k} < \bar{k}_c$)且横向位置 \bar{x} 和截面变化系数 α 确定时, 变截面柔性杆的无量纲角频率 $\bar{\omega}$ 的值随着无量纲波数 \bar{k} 的增大而趋于一个定值; 在截面变化系数 α 确定时, 柔性杆无量纲角频率 $\bar{\omega}$ 的值随着横向位置 \bar{x} 的增大减小。由图 2 中, d 图可知, 在同一横向位置 \bar{x} 处, 柔性体无量纲角频率 $\bar{\omega}$ 的值随着截面变化系数 α 的增大而减小。另外, 由式(19)可知, 当波数在不稳定范围内时($\bar{k} < \bar{k}_c$), 柔性体角频率 $\bar{\omega}$ 与 \bar{E} 无关。

由式(20)可知变截面柔性杆在 $\bar{x} = 0$ 处的扰动时间增长率与截面变化系数 α 无关, 故图 3 中 a 图为 $\bar{x} = 0$ 处, 截面变化系数 $\alpha = 0.001$, 弹性模量 \bar{E} 不同时扰动时间增长率 $\bar{\sigma}$ 与波数 \bar{k} 的关系曲线图; 图 3

中的 b 图为 $\bar{x} = 0$ 处, 截面变化系数 α 不同且 $\bar{E} = 10^3$ 时扰动时间增长率 $\bar{\sigma}$ 与波数 \bar{k} 的关系曲线图。

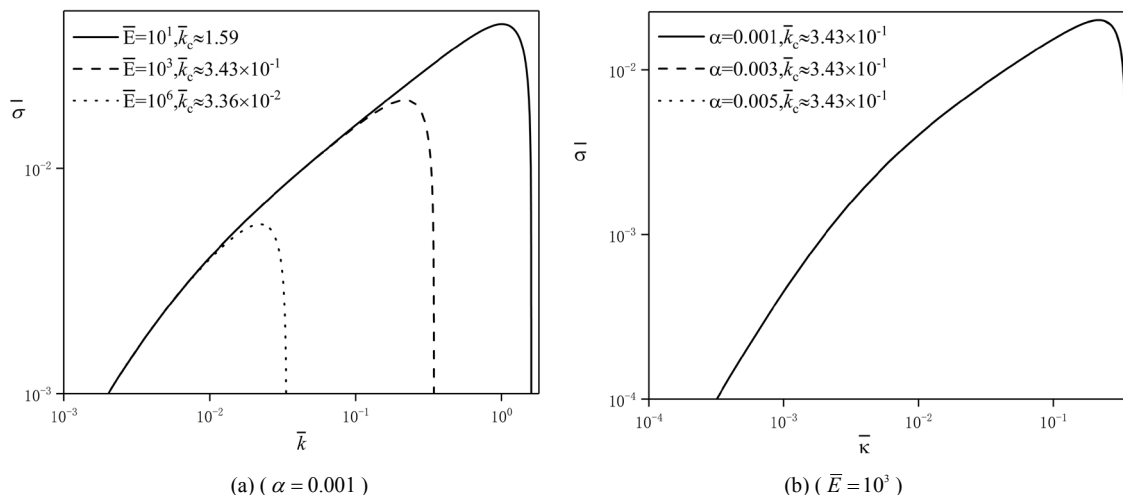


Figure 3. The effect of dimensionless wave number on dimensionless the temporal growth rate on $\bar{x} = 0$
图 3. 在 $\bar{x} = 0$ 处无量纲波数对无量纲扰动时间增长率的影响

由图 3 中, a 图可知, 在 $\bar{x} = 0$ 处, 截面变化系数 α 相同时, 扰动时间增长率 $\bar{\sigma}$ 的值随着弹性模量 \bar{E} 的增大而减小。由图 3 中的 b 图可知, 当波数在不稳定范围内 ($\bar{k} < \bar{k}_c$) 且取 $\bar{E} = 10^3$ 时, 在 $\bar{x} = 0$ 处, 对于不同的截面变化系数 α , 扰动时间增长率 $\bar{\sigma}$ 与波数 \bar{k} 关系图重合且 $\bar{\sigma}$ 的值亦为先增大后减小且最终趋向于零。

由式(20)亦可得变截面柔性杆在 $\bar{x} = 1000$ 处的扰动时间增长率与波数的关系曲线图, 在图 4 中, a-c 图为 $\bar{x} = 1000$ 处, 截面变化系数 α 不同时扰动时间增长率 $\bar{\sigma}$ 与波数 \bar{k} 的关系曲线图; 图 4 中的 d 图为 $\bar{x} = 1000$ 处, 截面变化系数 α 不同且 $\bar{E} = 10^3$ 时扰动时间增长率 $\bar{\sigma}$ 与波数 \bar{k} 的关系曲线图。

类似地, 在图 4 中, 由 a~c 图可知, 在 $\bar{x} = 1000$ 处, 当波数在不稳定范围内 ($\bar{k} < \bar{k}_c$) 且截面变化系数 α 确定时, 扰动时间增长率 $\bar{\sigma}$ 的值随着波数 \bar{k} 的增大先增大后减小且最终趋向于零; 另外, 在 $\bar{x} = 1000$ 处, 当截面变化系数 α 相同时, 扰动时间增长率 $\bar{\sigma}$ 的值随着弹性模量 \bar{E} 的增大而减小。由图 4 中的 d 图可知, 当波数在不稳定范围内 ($\bar{k} < \bar{k}_c$) 且 $\bar{E} = 10^3$ 时, 在 $\bar{x} = 1000$ 处, 扰动时间增长率 $\bar{\sigma}$ 的值随着截面变化系数 α 的增大而减小。它表明了在该横向位置处扰动时间增长率随着截面变化系数的增大而减小, 即柔性杆的直径增加时其扰动强度减弱。

5. 结果和讨论

5.1. 最不稳定波数

本文在上一部分的讨论中, 得到波数在 $\bar{k} < \bar{k}_c$ 范围内的扰动时间增长率图像, 如图 3 图 4 所示。根据图 3 和图 4 中的扰动时间增长率图像可定义一个最不稳定波数 \bar{k}_m , 即柔性体发生耦合运动时, 波动最剧烈(扰动时间增长率 $\bar{\sigma}$ 最大)时的波数。即 \bar{k}_m 为 $d\bar{\sigma}/d\bar{k} = 0$ 时的波数, 则由式(20)得:

$$\left[8 + \pi k_m \bar{\rho} (1 + 2\alpha \bar{x}) \right] \left\{ 24\pi k_m^2 \bar{\rho} (1 + 2\alpha \bar{x}) - \frac{3}{2} \pi \bar{E} k_m^5 (1 + 2\alpha \bar{x})^3 \left[\frac{2}{k_m} + \frac{1}{4} \pi \bar{\rho} (1 + 2\alpha \bar{x}) \right] + \frac{1}{2} \pi \bar{E} k_m^4 (1 + 2\alpha \bar{x})^3 \right\} \quad (21)$$

$$- 2\pi \bar{\rho} (1 + 2\alpha \bar{x}) \left\{ 8\pi k_m^3 \bar{\rho} (1 + 2\alpha \bar{x}) - \frac{1}{4} \pi \bar{E} k_m^6 \bar{\rho} (1 + 2\alpha \bar{x})^3 \left[\frac{2}{k_m} + \frac{1}{4} \pi \bar{\rho} (1 + 2\alpha \bar{x}) \right] \right\} = 0$$

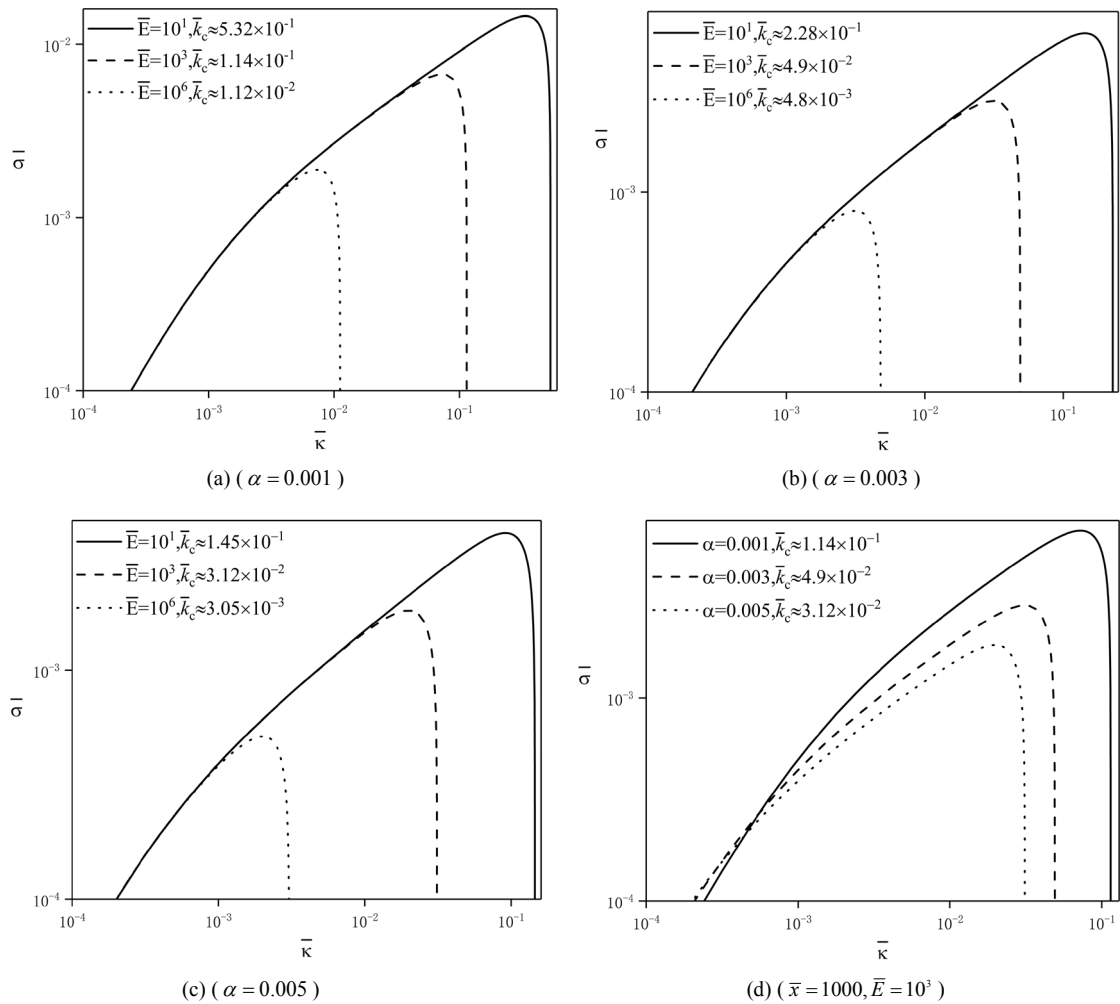


Figure 4. The effect of dimensionless wave number on dimensionless the temporal growth rate of the perturbation with respectively different the cross-section change coefficient and the elastic modulus on $\bar{x} = 1000$

图 4. 在 $\bar{x} = 1000$ 处, 截面变化系数和弹性模量分别不同时, 无量纲波数对无量纲扰动时间增长率的影响

式(21)为最不稳定波数 \bar{k}_m 的隐式表达式, 为了得到 \bar{k}_m 与各参数之间更为直观的关系, 本文得到了 $\bar{E} \rightarrow 0$ 时, 最不稳定波数 \bar{k}_m 的近似表达式。同种材料在相同的几何特征下, 其弹性模量的值反映了其刚度的值。由于本文中所研究的材料为柔性体即刚度较小的材料, 根据(21)我们可以求得 $\bar{E} \rightarrow 0$ 时的最不稳定波数 \bar{k}_m 的近似值:

$$k_m \approx \left(\frac{32}{\pi \bar{E}} \right)^{\frac{1}{3}} (1 + 2\alpha \bar{x})^{-1} \tag{22}$$

将式(22)分别带入到(19)和(20)中, 得到 $\bar{E} \rightarrow 0$ 时最不稳定波数所对应的角频率和扰动时间增长率分别为:

$$\bar{\omega}_m \approx \frac{8}{\pi \bar{\rho} (1 + 2\alpha \bar{x})} \tag{23}$$

$$\bar{\sigma}_m \approx \left(\frac{6912}{\bar{E}} \right)^{\frac{1}{6}} (\pi)^{\frac{2}{3}} (\bar{\rho})^{\frac{1}{2}} (1 + 2\alpha \bar{x})^{-1} \tag{24}$$

式(22)~(24)为变截面柔性体与流体耦合运动中, 其扰动最剧烈时, 最不稳定波数、角频率和最大扰动时间增长率的表达式。

5.2. 角频率和波数与风速的关系

本文在 5.1 的讨论中, 得到了 $\bar{E} \rightarrow 0$ 时的 \bar{k}_m , $\bar{\omega}_m$ 和 $\bar{\sigma}_m$ 的近似表达式。现在将 \bar{k}_m 和 $\bar{\omega}_m$ 引入物理量纲, 得:

$$\omega_m \approx \frac{8\rho}{\pi\rho'(d_0 + 2\alpha x)}V \quad (25)$$

$$k_m \approx \left(\frac{32\rho}{\pi E(d_0 + 2\alpha x)^3} \right)^{\frac{1}{3}} V^{\frac{2}{3}} \quad (26)$$

式(25)及(26)给出了变截面柔性杆与流体耦合运动中, 扰动最剧烈时的最不稳定波数及角频率与风速的关系式。根据式(25)及(26)可知, 角频率是由动压强和惯性的比值所决定的, 其值应与风速 V 成线性关系; 波数是由动压强和刚度的比值所决定的, 其值应与风速 $V^{2/3}$ 成线性关系。另外可得到柔性杆耦合运动时的相速度 ω_m/k_m 的值与风速 $V^{1/3}$ 亦成线性关系。在本文前面的讨论中, 没有考虑柔性体本身自重的影响, 但本质上, 由于自身重力的存在会使柔性杆发生微小的变形。

6. 结论

本文得到变截面柔性杆与气流耦合运动时的方程(气流流速为 V), 求解后给出了该变截面柔性杆与流体耦合运动时的波扰动时间增长率和特征函数的表达式, 并讨论了柔性杆波数小于截至波数(耦合运动不稳定)时, 角频率与扰动时间增长率的变化规律。有如下结论:

- 1) 变截面柔性杆角频率的值随着波数的增长逐渐趋于一个定值; 在相同横向位置处其值随着截面变化系数的增大而逐渐减小; 在截面变化系数相同时, 其值随着横向位置的增大而减小。
- 2) 变截面柔性杆扰动时间增长率的值随着弹性模量值的增大而减小; 在相同横向位置处, 其值随着截面变化系数的增大而减小。

基金项目

国家自然科学基金项目(11472123), 国家自然科学基金项目(11862012)。

参考文献

- [1] Liao, J.C., Beal, D.N., Lauder, G.V., *et al.* (2003) Fish Exploiting Vortices Decrease Muscle Activity. *Science*, **302**, 1566-1569. <https://doi.org/10.1126/science.1088295>
- [2] Muller, U.K. (2003) Physiology. Fish 'n Flag. *Science*, **302**, 1511-1512. <https://doi.org/10.1126/science.1092367>
- [3] Lighthill, M.J. (2006) Note on the Swimming of Slender Fish. *Journal of Fluid Mechanics*, **9**, 305-317. <https://doi.org/10.1017/S0022112060001110>
- [4] 陆夕云, 杨基明, 尹协振, 等. 飞行和游动的生物运动学和仿生技术研究[J]. 中国科学技术大学学报, 2007, 37(10): 1159-1163.
- [5] 董帝渤. 仿生柔性结构与流固耦合系统的数值方法及运动机理研究[D]: [博士学位论文]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2016.
- [6] Huang, L. (1995) Flutter of Cantilevered Plates in Axial Flow. *Journal of Fluids and Structures*, **9**, 127-147. <https://doi.org/10.1006/jfls.1995.1007>
- [7] Balint, T.S. and Lucey, A.D. (2005) Instability of a Cantilevered Flexible Plate in Viscous Channel Flow. *Journal of Fluids and Structures*, **20**, 893-912. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2005.05.005>

- [8] Lim, W.L., Chew, Y.T., Low, H.T., *et al.* (2003) Cavitation Phenomena in Mechanical Heart Valves: The Role of Squeeze Flow Velocity and Contact Area on Cavitation Initiation between Two Impinging Rods. *Journal of Biomechanics*, **36**, 1269-1280. [https://doi.org/10.1016/S0021-9290\(03\)00161-1](https://doi.org/10.1016/S0021-9290(03)00161-1)
- [9] Gerbeau, J.F., Vidrascu, M. and Frey, P. (2005) Fluid-Structure Interaction in Blood Flows on Geometries Based on Medical Imaging. *Computers & Structures*, **83**, 155-165. <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2004.03.083>
- [10] Watanabe, Y., Isogai, K., Suzuki, S., *et al.* (2002) A Theoretical Study of Paper Flutter. *Journal of Fluids and Structures*, **16**, 543-560. <https://doi.org/10.1006/jfls.2001.0436>
- [11] 张成瑶. 单个或多个柔性体自主推进的流固耦合数值研究[D]: [博士学位论文]. 合肥: 中国科学技术大学, 2020.
- [12] Jia, P., Andreotti, B. and Claudin, P. (2015) Paper Waves in the Wind. *Physics of Fluids*, **27**, Article ID: 104101. <https://doi.org/10.1063/1.4931777>
- [13] Taneda, S. (1968) Waving Motions of Flags. *Journal of the Physical Society of Japan*, **24**, 392-401. <https://doi.org/10.1143/JPSJ.24.392>
- [14] Datta, S.K. and Gottenberg, W.G. (1975) Instability of an Elastic Strip Hanging in an Airstream. *Journal of Applied Mechanics*, **42**, 195-198. <https://doi.org/10.1115/1.3423515>
- [15] Lemaitre, C., Hemon, P. and de Langre, E. (2005) Instability of a Long Ribbon Hanging in Axial Air Flow. *Journal of Fluids and Structures*, **20**, 913-925. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2005.04.009>
- [16] Yamaguchi, N., Sekiguchi, T., Yokota, K., *et al.* (2000) Flutter Limits and Behavior of a Flexible Thin Sheet in High-Speed Flow II: Experimental Results and Predicted Behaviors for Low Mass Ratios. *Journal of Fluids Engineering*, **122**, 74-83. <https://doi.org/10.1115/1.483228>
- [17] Argentina, M. and Mahadevan, L. (2005) Fluid-Flow-Induced Flutter of a Flag. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, **102**, 1829-1834. <https://doi.org/10.1073/pnas.0408383102>
- [18] Eloy, C., Kofman, N. and Schouveiler, L. (2011) The Origin of Hysteresis in the Flag Instability. *Journal of Fluid Mechanics*, **691**, 583-593. <https://doi.org/10.1017/jfm.2011.494>
- [19] 孙传宝, 贾来兵, 李发尧, 等. 单个柔性旗帜在均匀流中摆动的测力实验[J]. 实验力学, 2011, 25(2): 1-6.
- [20] 王思莹, 孙传宝, 尹协振. 均匀来流条件下并行排列旗帜耦合运动模式的实验[J]. 实验力学, 2010, 25(4): 401-407.
- [21] Kim, D., Cossé, J., Huertas, C.C., *et al.* (2013) Flapping Dynamics of an Inverted Flag. *Journal of Fluid Mechanics*, **736**, R1-R7. <https://doi.org/10.1017/jfm.2013.555>
- [22] Cisonni, J., Lucey, A.D. and Elliott, N.S.J. (2019) Flutter of Structurally Inhomogeneous Cantilevers in Laminar Channel Flow. *Journal of Fluids and Structures*, **90**, 177-189. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2019.06.006>
- [23] 郭日修. 弹性力学与张量分析[M]. 北京: 高等教育出版社, 2003: 177-179.
- [24] 原渭兰. 气体动力学[M]. 北京: 科学出版社, 2013: 55-56.
- [25] Yang, T. and Mason, M.S. (2019) Aerodynamic Characteristics of Rectangular Cylinders in Steady and Accelerating Wind Flow. *Journal of Fluids and Structures*, **90**, 246-262. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2019.07.004>
- [26] 高云, 邹丽, 宗智. 两端铰接的细长柔性体圆柱体涡激振动响应特征数值研究[J]. 力学学报, 2018, 50(1): 9-20.