Interdisciplinary Science Letters 交叉科学快报, 2023, 7(1), 10-16
Published Online March 2023 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/isl
https://doi.org/10.12677/isl.2023.71003

关于牛顿著作《广义算术》形成及其内容与影响的研究

杨欣童

清华大学科学史系，北京

收稿日期：2023年2月11日；录用日期：2023年3月6日；发布日期：2023年3月14日

摘 要

牛顿于1707年出版的代数学著作《广义算术》在随后的三个多世纪里，影响了一大批欧洲的数学家和科学家学习数学。近年来，随着对牛顿数学和科学研究的不断开展，越多越多的人对牛顿的这本代数学著作进行讨论。本文运用文献分析法，结合牛顿的原著和当时的数学工作，对以往此类相关研究进行归纳和梳理，发现已有的研究主要集中在出版、内容来源、具体内容分析、其中的数学思想方法及其影响这五个方面；但这五个方面多数都研究得不是很全面，也不深入；现在研究比较深入的仅是其中牛顿给出的圆锥曲线构造理论和确定方程虚根和范围的方法两个具体方面，这是当前研究的热点之一。建议后续的研究更多关注此著作中内容的来源和其中反映出来的牛顿的数学思想方法。

关键词

牛顿，广义算术，方程，代数

Research on Formation of Newton's Work *Universal Arithmetic* and Its Content and Influence

Xintong Yang

Department of History of Science, Tsinghua University, Beijing

Received: Feb. 11th, 2023; accepted: Mar. 6th, 2023; published: Mar. 14th, 2023

Abstract

Newton's algebraic work *Universal Arithmetic* published in 1707 influenced a large number of Eu-

文章引用: 杨欣童. 关于牛顿著作《广义算术》形成及其内容与影响的研究[J]. 交叉科学快报, 2023, 7(1): 10-16.
DOI: 10.12677/isl.2023.71003

ropean mathematicians and scientists to learn mathematics in the following three centuries. Recently, with the continuous development of research on Newton's mathematics and science, more and more scholars have discussed this book. This paper combined Newton's original works and the mathematical work at that time and sorted out the previous relevant research by means of literature analysis, and found that the existing research mainly focuses on five aspects, that is the publication, content sources, specific content analysis, mathematical thoughts and methods and their influence. However, most of these five aspects are not comprehensive or in-depth except for two specific aspects which are the conic construction theory, which is one of the current research hotspots, given by Newton and the method of determining the imaginary root and range of the equation. It is suggested that the follow-up research should pay more attention to the source of the content in this book and Newton's mathematical thinking method reflected in it.

Keywords

Newton, *Universal Arithmetic*, Equation, Algebra

1. 引言

牛顿于 1707 年出版的著作《广义算术》是当时学者公认的典型的代数学作品[1]，是牛顿的重要著作[2]。其自问世之后，多次被翻译成英文、法文和俄文等文字在多个国家和地区出版和发行[3]，成为 18 世纪英国和欧洲大陆最受欢迎的数学著作之一[4]。因此，这本书也成了后来众多数学家和科学史家在研究牛顿时重点研究的著作之一[3]。在过去的几百年里，关于这本书及其内容的研究已有很多，有些还很深入，已经取得了非常丰富的研究成果。不过，迄今还没有比较完整和全面的关于这些研究的回顾和梳理。而对这些研究的回顾和整理，不仅可以对过去的研究进行总结，提炼出其中有价值的研究结果，找到其中优秀的可借鉴的研究方法，而且还可以找出其中的不足或空白，从而为后续相关研究奠定基础，促进对于牛顿数学以及牛顿科学的进一步研究。

2. 资料搜集

以“广义算术”、“牛顿”、“数学”为关键词在 Google 学术、百度学术、中国知网和 Web of Science 进行搜索，共收集到包括研究文章、书籍、会议报告、学位论文、网页文章等相关文献 700 余篇。后经过分析，剔除掉与牛顿《广义算术》关联度不大的和一般介绍性文献，最后剩余比较有分析价值的研究性文献 19 篇。本文的研究主要基于对这些文献的分析。

3. 结果

3.1. 《广义算术》的出版

关于出版原因，Pycior，Westfall 和 Devons，Rickey，Whitrow 认为，牛顿原本并没有出版《广义算术》的计划，但为了在 1705 年的议会选举中获得剑桥同事的支持才被迫同意出版[1] [2] [5] [6]。Boyer 甚至认为惠斯顿是在未经牛顿允许的情况下，擅自出版的《广义算术》[4]。Whitrow 以牛顿与 Dacid Gregory 的书信作为根据推测牛顿出版《广义算术》的压力也许来自于三一学院的院长 Richard Bentley [6]。

关于《广义算术》首次出版的过程，Westfall 和 Devons，Whiteside 认为是这样的[2] [3]：1683 年到 1684 年的冬天，牛顿将其作为前十年教授代数学的文稿保存在在了剑桥大学图书馆里，1705 年到 1707 年，威廉·惠斯顿(牛顿之后的下一任卢卡斯教授)整理和编辑了这些材料，1707 年，这些文稿以《广义算术；或关于算术计算或算术解题的论文集》为书名进行了匿名出版。Pycior 则强调牛顿并没有参与裁决和准备出版的阶段，这些工作都是由惠斯顿来完成的[1]。

关于出版之后的修订，Pycior，Whiteside 指出，1707 年出版的《广义算术》的拉丁语版本受到了牛顿的批判，于是 1722 年出版了第二版。在这一版中，牛顿更正了一些明显的印刷错误，在书的每一页上面添加了页眉标题，更换了第四部分几何问题的顺序，并于 1724 年出版了第一版英文版[1] [3]。

关于《广义算术》的书名，Whiteside 认为，初始时题目是由惠斯顿确定，全称是 Arithmetica Universalis sive Algebra Elementa，其中的副标题的意思是“代数基础”，但是后来牛顿对其不满意，改成了 Arithmetica Universalis, sive De Compositione et Resolutione Arithmetica Liber，副标题的意思是“关于算术组合和求解之书”[3]。Pycior 认为，书名《广义算术》的由来依据了韦达(François Viète, 1540~1603)的说法。韦达认为，算术计算使用的是数字，代数运算使用的是未知数，算术运算最后的结果是确定的，而代数运算的结果是不确定的和广义的。牛顿书中的内容很多是使用代数方法求解算术问题，所以该书命为了《广义算术》[1]。

3.2. 《广义算术》的内容来源

Guicciardini 认为，牛顿在他的卢卡斯讲义中使用了其在 1670 年为柯林斯(John Collins, 1625~1683)准备的金克修斯(Kinckhuysen Gerard, 1625~1666)的代数学教科书做的注释，而这些讲义被编写成了《广义算术》。只是，牛顿在编辑《广义算术》的时候，增加了两个新的部分：“如何将几何问题简化为一个方程”和“方程的线性构造”[7]。

Pycior 认为，牛顿的代数学讲义在某些方面是他对金克修斯的《代数》注释的修订版，该讲义后来形成了《广义算术》的核心内容。原因是，《广义算术》的第三部分——方程的建立，包含了金克修斯《代数》的注释中的词语和两个例题[1]。

Boyer 认为，牛顿对金克修斯《代数》的注释是《广义算术》的原型[4]。

不过，Whiteside 认为，牛顿的《广义算术》内容来源也许更广一些。他认为，在牛顿的代数学讲义的“如何将任何问题化为方程”部分 17 道题目中，部分摘自金克修斯和舒顿(Frans Van Schooten, 1615~1660)的著作，“如何将给定的问题简化为方程”部的问题使用了韦达(问题 37~41)和笛卡尔(问题 55~57)的求解技巧[3]。

Scriba 也持类似的观点，他认为，牛顿《广义算术》第 13 章“将几何问题转化为方程”中的很多例子都是牛顿自己编的。另外，他还认为，牛顿《广义算术》中的不少例题来自弗格森(Johan Jacob Ferguson, 1630~1706)的 Labyrinthus Algebra [8]。

3.3. 《广义算术》的具体内容分析

关于《广义算术》中的圆锥曲线内容，Bloye 和 Huggett，Shkolenok 通过分析牛顿在《广义算术》的定理和问题，发现其中给出的多个关于圆锥曲线的命题和数学问题与他在《自然哲学的数学原理》和《三次曲线的枚举》(Enumeratio Linearum Tertii Ordinis)中有关问题一致[9] [10]。

Guicciardini 经过分析认为，牛顿在其《论分析》《论方法》中也大量重复了《广义算术》的圆锥曲线内容[11]。

Whiteside 认为，1707 年出版的《广义算术》的第 55 题涉及通过五个点做一个椭圆的问题的解法源

自帕普斯(Pappus of Alexandria, 290~350)的 Collection 的第八卷第 13 题[12]。

Pycior 认为，牛顿在《广义算术》中对虚数是不是方程的根持有怀疑态度，因此，牛顿提出了较弱的代数基本定理。并且，还由此得到了三次方程使用卡单公式是不可解的这样一个结论[1]。Pycior 认为，《广义算术》中关于虚数概念有进步的地方，也有保守的地方。进步之处在于，牛顿将虚根考虑在了方程的所有解之中，并且分析了出现虚根的情况。但是，他很少提及虚数或虚量，而只提及虚根，即牛顿所谓的“不可能求得的根”[1]。

Whitrow 认为，《广义算术》这本书最大的贡献是推广了笛卡尔的符号规则来确定非实数根的上界，从而确定了方程的虚根个数和范围[6]。Sylvester 梳理了牛顿的《广义算术》中“方程的求解”部分中发现虚根和估计虚根下界的方法，赞扬了牛顿方法的简洁和一般性，并给出了二次和三次方程方法的证明[13]。Acosta 梳理了牛顿在《广义算术》中求解方程虚根的个数和范围的符号规则，将其中确定虚根范围的规则称为牛顿不完全规则，确定虚根个数的规则称为牛顿完全规则[14]。

关于牛顿的不完全规则和完全规则，Campbell 于 1728 年给出了一个证明，证明牛顿的方法是对的[15]。著名数学家 Maclaurin 于 1730 年在给 Martin Folkes 的信中也确定了这个证明[16]。不过，在 1782 年，当时的卢卡斯教授 Edward Warin 却指出坎贝尔的证明是错误的[14]。

牛顿不完全规则的第一个正确的证明是 1865 年 Sylvester 给出的。西尔维斯特将他的论文命名为“关于伊萨克·牛顿爵士迄今尚未证明的虚根发现规则的基本证明和推广”。Sylvester 提到，以前所有的工作都只是表明：一旦产生一个变化，方程就只存在一对复根，而在牛顿的完全规则的证明没有任何进展[17]。

3.4. 《广义算术》中的数学方法

Garrison 认为，牛顿在《广义算术》中运用了综合和分析的几何方法，这是由牛顿研究和预测自然哲学中的方法推广而来的[18]。

Guicciardini 认为，牛顿的《广义算术》致力于研究和应用笛卡尔(René Descartes, 1596~1650)的代数，准确来说，《广义算术》可以被视为一个牛顿对笛卡尔的《几何学》的程序的实现，因为它教给读者如何将问题，尤其是几何问题(也算术和机械)转化成代数的语言，代数在这里被视为问题的分析工具；另一方面，《广义算术》包含了两个针对笛卡尔的两种批评：首先，在一个致力于将几何问题简化为一个方程的部分中，牛顿与笛卡尔意见不同。牛顿坚持认为，至少在某些情况下，阿波罗几何在分析不确定问题时要比笛卡尔代数更好。第二，最后一节致力于构建方程，牛顿认为可接受和不可接受的方法之间的划分确定的问题，以及笛卡尔提出的相对简单的方法，太依赖于代数标准了(即定义这些手段的多项式方程的存在，和方程的次数)。由此，在思想上牛顿支持纯粹的几何，反对失去几何“优雅”的“现代”数学[7]。

Pycior 通过分析附录部分得到，牛顿并没有在这本书中将代数和几何分离，并且牛顿貌似喜欢经典几何多于分析几何，因为牛顿认为算术和代数是乏味的，而经典几何是简洁的、高雅的[1]。

Pycior 认为，与同时代的数学家 Kersey、Wallis 的代数相比，牛顿的《广义算术》中的代数是非历史的和非哲学的，其更关注于代数的概念解释、简单的规则、各种例题和详细的解法[1]。

Leibniz 在评价《广义算术》的时候，认为这个作品具有《论分析》不同的特点，充分体现了牛顿的数学天赋[19]。

3.5. 《广义算术》的影响

Whiteside 认为，牛顿的第一版《广义算术》(1707 年)并没有引起人们多大兴趣，是拉弗森(Joseph

Raphson, 1648~1715)的英译本《算术》(1720 年)和牛顿《广义算术》的第二拉丁文版(1722 年)才引起了人们对牛顿代数的兴趣[3]。

Pycior 研究认为，在 1730 年之后，《广义算术》被众多大学教师选为代数学教材，从而深刻影响到了英国和欧洲大陆的代数教学与代数教材的编纂。不仅如此，牛顿《广义算术》中将几何和代数相结合的做法，还给予后来包括麦克劳林、莱昂哈德 • 欧拉和爱德华 • 韦林在内的许多数学家很大的影响，甚至大数学家莱布尼兹都受到了其影响[1]。

Westfall 和 Devons 认为，它不仅总结而且也推动了当时代数学的发展——例如，在对虚根的分析方面。因此，在 18 世纪，《广义算术》是牛顿最受欢迎的数学著作，它在欧洲大陆和英国非常受欢迎，它是牛顿最重要的著作[2]。

Boyer 认为，在 18 世纪的“牛顿时代”，科学家们的科研活动严重依赖牛顿的已经出版著作，包括《广义算术》等著作[4]。

4. 讨论

《广义算术》是牛顿最重要的著作之一，前期已有不少相关研究。通过回顾和梳理这些研究发现：当前的研究主要涉及《广义算术》的出版、其内容来源、其中的具体内容分析、其数学方法和其影响五个方面。由此可以看出，当前对于《广义算术》的研究已经比较全面了。历史学家 Gray 曾指出，数学史的研究工作有两大类：档案整理(archival)与内容阐释(interpretation) [20]。曲安京曾指出，数学史研究主要包含：重构历史事件发生的过程以及研究该事件在历史中发挥的作用[21] [22]。然而，相比于牛顿的其他著作的研究，例如《自然哲学之数学原理》《流数简论》的研究，关于《广义算术》的研究也不是没有空白点。比如当前的研究还没有涉及其牛背后的数学思想，其与牛顿自然哲学观念的关系等方面。另外，关于《广义算术》某些方面的研究非常深入，而有的方面仅仅被提及，研究并不深入。

关于《广义算术》出版情况的研究，由前面的研究可知目前已经比较详细和全面了，其包含了对其出版原因、首次出版过程，出版之后的修订以及书名的多方面的研究。当前的研究者普遍认为，牛顿起初并不想出版《广义算术》，只是为了在议会选举中得到剑桥大学同事们的支持才同意出版的。于是，威廉 • 惠斯顿将牛顿的代数学讲义进行了整理和编辑，而后在 1707 年以《广义算术；或关于算术计算或算术解题的论文集》为书名进行了匿名出版。然而，牛顿对出版后的《广义算术》并不满意，对其进行了很多修改[1]-[6]。由此可见，当前研究也比较深入了。

关于《广义算术》的内容分析，由前面的内容可知：1、当前研究的人比较多，这个方面应该是关于《广义算术》研究的最大热点；2、其中，关于圆锥曲线构造理论和确定方程虚根和范围的理论的研究比较深入。已有研究发现，《广义算术》的通过五点构造一个圆锥曲线的方法被牛顿广泛应用，这种方法来源于帕普斯的作品[9] [10] [11] [12]。另外，《广义算术》中确定方程虚根和范围的方法被一致认为是十分简单和有效的，为此，得到了众得到多数学家的关注。许多数学家热衷于对此方法进行证明和推广，这种热潮一致持续到 19 世纪还没有停止[6] [13] [14] [15] [16] [17]。然而，目前鲜有对《广义算术》其他内容的深入研究，例如其因式分解方法、求解高次方程的方法、消去方程未知量的方法等与同时代的其他方法相比是否更简单，有何特点？而弄清楚这些问题对于进一步研究牛顿的数学思想具有重要意义。

关于《广义算术》中的数学方法的研究目前还比较浅显。由前面的内容可知，现有的研究主要探讨了书中的方法究竟是代数的还是几何的，普遍认为《广义算术》研究的确实是各种代数方法，但并不是纯粹，有的方法还结合了几何的思想，还有很多几何问题[7] [18]。还有研究者发现，牛顿在《广义算术》中体现出了对经典几何比分析几何更多的喜爱[1]。然而，他们研究主要依据的是书中的引言或说明文字，而没有对《广义算术》中的方法进行逐一地分析，所以得到的结论可能比较浅显。

关于《广义算术》的内容来源的研究，由前面的内容可知：目前既不深入，也不全面。研究者们一致认为，书中的大部分内容来源于牛顿对金克修斯《代数》一书做的注释[1] [4] [7]。也有人发现，书中一些例题来源于舒顿和弗格森的著作[3] [8]。由此可见，当前的研究对《广义算术》内容的追溯大都停留于金克修斯《代数》的注释，而没有进一步探讨书中代数学知识的真正来源。另外，《广义算术》中有的部分可能并不是来源于金克修斯《代数》的注释，例如 Guicciardini 发现牛顿的《广义算术》相比之前的注释多了“如何将几何问题简化为一个方程”和“方程的线性构造”两部分，这两个部分的方法是否是牛顿自己研究得到的，还是他借鉴了其他著作？这些问题具有重要的历史意义，值得进一步研究。

关于《广义算术》的影响，当前的研究者都认为其在世界范围内的数学发展具有积极影响。其不仅影响了后世数学家的代数研究，而且还对欧洲代数学教学产生了深远影响[1] [3] [23]。Westfall 和 Devons 甚至称之为牛顿最重要的著作[2]。然而，关于《广义算术》对数学家的影响，当前的研究主要是列举了哪些数学家，并简要说明了有何影响，并没有进行深入分析和探究。特别值得一提的是，德国著名数学家莱布尼兹曾特地学习了《广义算术》并赞扬了其中的方法[19]。那么，莱布尼兹是否受到牛顿方法的启发，是否将牛顿的代数方法运用到了自己的研究中了呢？目前还没有研究。

5. 结论

《广义算术》是牛顿的一部重要著作，其一问世就得到了很多人的关注，迄今已有很多关于这部书及其内容的研究。通过对此类相关研究的梳理与分析，可以看出，已有的研究主要集中在《广义算术》的出版、其内容来源、其中的具体内容分析、其数学方法和其影响五个方面。对于这五个方面，尽管热点方面——《广义算术》内容的研究的部分内容已经研究得比较深入了，比如对于此书中圆锥曲线构造理论和确定方程虚根和范围的理论的研究，但是，其余方面的研究还不是很全面，也不深入，比如关于此书内容的来源研究和此书中数学思想方法方面的研究。

鉴于此，建议未来的研究继续从多个方面对此书进行研究，特别是对于此书的内容来源和其中反映出来的思想方法进行深入研究。因为，此书的内容有多项，当前的研究仅仅是研究了其中的实际问题部分、方程根的性质和解方程等几部分，还有多项式的尚未有深入探讨，比如《广义算术》中的多项式运算知识是怎么来的？是不是由牛顿创造的？多项式的因式分解方法是否也有来源？其合理性和科学性如何？等等。而这些问题的探讨，无疑可以丰富和弥补前人研究的不足，对于《广义算术》的深入研究具有重要价值。

参考文献

[1] Pycior, H.M. (1997) Symbols, Impossible Numbers, and Geometric Entanglements: British Algebra through the Commentaries on Newton’s Universal Arithmetick. Cambridge University Press, Cambridge. https://doi.org/10.1017/CBO9780511895470

[2] Westfall, R.S. and Devons, S. (1981) Never at Rest: A Biography of Isaac Newton. Cambridge University Press, Cambridge. https://doi.org/10.1017/CBO9781107340664

[3] Whiteside, D.T. (2008) The Mathematical Papers of Isaac Newton. Cambridge University Press, Cambridge.

[4] Boyer, C.B. (1967) Essay Review: The Making of a Mathematician: The Mathematical Papers of Isaac Newton. *History of Science*, **6**, 97-106. https://doi.org/10.1177/007327536700600107

[5] Rickey, V.F. (1987) Isaac Newton: Man, Myth, and Mathematics. *The College Mathematics Journal*, **18**, 362-389. https://doi.org/10.1080/07468342.1987.11973060

[6] Whitrow, G.J. (1989) Newton’s Role in the History of Mathematics. *Notes and Records of the Royal Society of London*, **43**, 71-92. https://doi.org/10.1098/rsnr.1989.0006

[7] Guicciardini, N. (2009) Isaac Newton on Mathematical Certainty and Method (No. 4). MIT Press, Cambridge. https://doi.org/10.7551/mitpress/9780262013178.001.0001

[8] Scriba, C.J. (1964) Mercator's Kinckhuysen-Translation in the Bodleian Library at Oxford. *The British Journal for the History of Science*, **2**, 45-58. https://doi.org/10.1017/S0007087400001837

[9] Bloye, N. and Huggett, S. (2011) Newton, the Geometer. *Newsletter of the European Mathematical Society*, **82**, 19-27.

[10] Shkolenok, G.A. (1972) Geometrical Constructions Equivalent to Non-Linear Algebraic Transformations of the Plane in Newton's Early Papers. *Archive for History of Exact Sciences*, **9**, 22-44. https://doi.org/10.1007/BF00348538

[11] Guicciardini, N. (2004) Isaac Newton and the Publication of His Mathematical Manuscripts. *Studies in History and Philosophy of Science Part A*, **35**, 455-470. https://doi.org/10.1016/j.shpsa.2004.06.002

[12] Whiteside, D.T. (1970) The Mathematical Principles Underlying Newton's Principia Mathematica. *Journal for the History of Astronomy*, **1**, 116-138. https://doi.org/10.1177/002182867000100203

[13] Sylvester, J.J. (1864) II. An Inquiry into Newton's Rule for the Discovery of Imaginary Roots. *Proceedings of the Royal Society of London*, **13**, 179-183. https://doi.org/10.1098/rspl.1863.0044

[14] Acosta, D.J. (2003) Newton's Rule of Signs for Imaginary Roots. *The American Mathematical Monthly*, **110**, 694-706. https://doi.org/10.1080/00029890.2003.11920009

[15] Campbell, G. (1728) II. A Method for Determining the Number of Impossible Roots in Adfected Æquations. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, **35**, 515-531. https://doi.org/10.1098/rstl.1727.0049

[16] Maclaurin, C. (1729) A Second Letter to Martin Folkes, Esq.; Concerning the Roots of Equations, with Demonstration of Other Rules of Algebra. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A*, **1729**, 59-96. https://doi.org/10.1098/rstl.1729.0011

[17] Sylvester, J.J. (1865) On an Elementary Proof and Generalization of Sir Isaac Newton's Hitherto Undemonstrated Rule for the Discovery of Imaginary Roots. *Proceedings of the London Mathematical Society*, **s1-1**, 11-22. https://doi.org/10.1112/plms/s1-1.1.9-s

[18] Garrison, J.W. (1987) Newton and the Relation of Mathematics to Natural Philosophy. *Journal of the History of Ideas*, **48**, 609-627. https://doi.org/10.2307/2709690

[19] Leibniz, G.W. (1708) Leibniz' Review of the Arithmetica. *Acta Eruditorum*, **1708**, 519-526.

[20] Gray, J. (2016) Histories of Modern Mathematics in English in the 1940s, 50s, and 60s. In: Remmert, V.R., *et al*., Eds., *Historiography of Mathematics in the* 19*th and* 20*th Centuries*, Springer International Publishing, Berlin, 161-183. https://doi.org/10.1007/978-3-319-39649-1_9

[21] Qu, A. (2003) The Third Approach to the History of Mathematics in China.

[22] 曲安京. 近现代数学史研究的一条路径——以拉格朗日与高斯的代数方程理论为例[J]. 科学技术哲学研究, 2018, 35(6): 67-85.

[23] Dunham, W. (1991) Journey through Genius: Great Theorems of Mathematics. John Wiley & Sons, Hoboken, 165-171.