

# 基于MAP的结合局部和全局统计正则的活动轮廓模型

徐雅雅, 唐利明\*, 王 选

湖北民族大学数学与统计学院, 湖北 恩施

收稿日期: 2023年8月25日; 录用日期: 2023年9月16日; 发布日期: 2023年9月27日

## 摘 要

为分割灰度不均匀或者噪声污染的复杂图像, 本文提出了一个基于最大后验概率准则(MAP)的结合局部和全局统计正则的活动轮廓模型。首先假设被灰度不均和噪声污染的观测图像服从局部高斯分布; 而局部均值图像和局部方差图像在目标和背景区域分别服从全局高斯分布和均匀分布。然后利用3个假设分别构建局部和全局统计正则项, 基于MAP准则建立变分活动轮廓模型, 并在模型中引入水平集函数的弧长项和 $H^{-1}$ 正则项, 使得水平集函数在演化过程中保持稳定和平滑。最后采用变分法和梯度下降算法对所提的多目标优化模型进行数值求解。数值实验以合成图像和自然图像为实验对象, 验证了本文模型对灰度不均和复杂边界的图像具有良好的分割效果, 此外还对初始轮廓和噪声鲁棒。并且和几个经典的变分活动轮廓模型进行了对比实验, 本文模型展示了最优的实验效果。

## 关键词

活动轮廓, 图像分割, 灰度不均, 最大后验概率

# Active Contour Model Based on MAP Combining Local and Global Statistical Regularization

Yaya Xu, Liming Tang\*, Xuan Wang

School of Mathematics and Statistics, Hubei Minzu University, Enshi Hubei

Received: Aug. 25<sup>th</sup>, 2023; accepted: Sep. 16<sup>th</sup>, 2023; published: Sep. 27<sup>th</sup>, 2023

\*通讯作者。

文章引用: 徐雅雅, 唐利明, 王选. 基于 MAP 的结合局部和全局统计正则的活动轮廓模型[J]. 图像与信号处理, 2023, 12(4): 335-351. DOI: 10.12677/jisp.2023.124033

## Abstract

To segment complex images with intensity inhomogeneity or noise pollution, an active contour model based on maximum a posteriori probability (MAP) criterion combining local and global statistical regularity is proposed in this paper. First, it is assumed that the real image obeys a global Gaussian distribution in the background and the object region respectively, while the observed image polluted by intensity inhomogeneity and noise obeys a local Gaussian distribution. Then, the local and global statistical regularization term is constructed using three assumptions, and the variational active contour model is established based on the MAP criterion. The length term and  $H^{-1}$  regularization term of the level set function are introduced into the model, so that the level set function is stable and smooth in the evolution process. Finally, variational method and gradient descent algorithm are used to solve the proposed multi-objective optimization model. Numerical experiments on synthetic and natural images show that the proposed model has good segmentation effect on images with intensity inhomogeneity and complex boundaries, and is robust to initial contour and noise. Compared with several classical variational active contour models, the proposed model has the optimal experimental results.

## Keywords

Active Contour, Image Segmentation, Intensity Inhomogeneity, Maximum A Posteriori Probability

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

图像分割是计算机视觉领域的重要内容,已经广泛用于医学图像处理、卫星图像处理、人工智能、目标跟踪与识别等[1] [2]。在实际生活中,每一幅图像上都带有一个或多个目标,如何确定目标在图像中的位置,将目标与背景分割开,是人们所研究的问题之一。图像分割就是根据图像的灰度、空间纹理、几何特征等一些属性将图像分为几个子区域,分割的程度取决于要解决的问题。目前,图像分割的方法主要分为两大类:基于传统的分割方法和基于深度学习的分割方法。

基于深度学习的图像分割[3] [4],其基本思想是通过构建多层网络,对目标进行多层表示,以期通过多层的高层次特征来表示数据的抽象语义信息,获得更好的特征鲁棒性。在大量数据集上训练之后,深度学习模型可以分割复杂的图像。但是深度学习在很大程度上仍然是未知领域,没有足够的理论支持,而基于传统的图像分割有着坚实的理论基础,可以用数学的相关知识解释。所以,传统的分割方法仍然受到广大学者的研究。

在传统的分割方法中,基于变分水平集方法的活动轮廓模型已成为当前的研究热点[5] [6]。其本质上是用高一维曲面的零等高线作为目标边界去分割低一维的目标,能够很好地处理拓扑结构变换。按照能量函数构造方式的不同,可以将活动轮廓模型分为两大类:基于边缘的模型[7] [8] [9]和基于区域的模型[10]-[21]。基于边缘的模型依赖于图像的梯度信息,在边界处,图像的梯度较大,所以能够有效地分割具有强边界的图像,但针对弱边界、灰度不均匀的图像分割效果较差。为解决这个问题,一些学者提出了

基于区域的活动轮廓模型, 该类模型通过区域统计特征来划分图像域, 通过区域描述符来定位物体边界。

基于区域的模型通过图像的全局或局部区域信息来构建能量泛函。Chan 和 Vese [10] (CV) 在 2001 年提出的无边缘活动轮廓模型是经典的基于全局信息的活动轮廓模型之一。该模型能够准确地分割图像中的目标和背景, 特别是在简单背景和对比度较高的情况下具有良好效果。并且由于使用水平集函数表示活动轮廓, CV 模型可以适应不同形状和大小的目标, 并且对初轮廓的选择相对不敏感。但是由于其假设图像的灰度在目标区域和背景区域是均匀的, 所以 CV 模型不能有效地分割灰度不均的图像。为解决此问题, Li 等人[11]在 2008 年提出了基于局部二值拟合(Local Binary Fitting, LBF)活动轮廓模型。该模型可以很好地分割灰度不均匀的图像, 但是 LBF 模型对高斯核大小的选取具有依赖性, 使得模型很难达到最优效果, 且 LBF 模型对初始轮廓敏感。Wang 等人[12]在 2009 年提出了基于局部高斯分布拟合(Local Gaussian Distribution Fitting, LGDF)能量的活动轮廓模型, 该模型将具有空间变化的局部均值和方差作为变量, 使得 LGDF 模型能够分割灰度相似但方差不同的区域, 但是仍然对初始轮廓比较敏感, 加上方差的计算, 导致分割速度较慢。上述模型虽然在一定程度上都能够分割灰度不均的图像, 但是存在对初始轮廓或噪声敏感等问题。

事实上, 除了上述简单地利用图像的全局或局部信息构建的模型之外, 一些正则项的加入更符合原始图像的实际信息[22] [23] [24] [25]。基于此, Niu 等人[22]在 2017 年通过引入一个局部相似因子, 使得该模型在保证一定噪声鲁棒性的同时, 能够准确提取物体边界。Yan 等人[23]在 2020 年提出了一个基于有符号距离函数的凸性形状先验的简单线性不等式约束, 使得该模型很容易从背景复杂的图像中分割出凸形目标。Yang 等人[24]在 2021 年引入先验约束项, 并结合区域可伸缩拟合能量模型, 使得该模型具有较高的精度、鲁棒性和有效性。Pang 等人[25]在 2023 年提出了基于梯度空间和先验约束的图像分割模型, 该模型是在合适的梯度空间下, 假设图像是一个分段常数函数和一个平滑函数的乘积。这些正则项的提出在一定程度上提高了模型的分割精度, 但是分割边界复杂、严重灰度不均匀的图像仍然是一项巨大的挑战。

为解决此问题, 本文提出了一个基于最大后验概率(Maximum A Posteriori Probability, MAP)的结合局部和全局统计正则的活动轮廓模型, 实现了对灰度不均匀图像或受噪声污染的复杂图像的理想分割。在该模型中, 首先假设灰度不均和被噪声污染的观测图像服从局部高斯分布; 而局部均值图像和局部方差图像在目标和背景区域分别服从全局高斯分布和均匀分布。然后基于 MAP 准则和这 3 个假设, 构建了结合局部和全局统计正则的变分极小化模型。最后结合水平集函数的弧长项和  $H^{-1}$  正则项, 建立图像分割活动轮廓模型。我们使用交替迭代算法结合变分法和梯度下降法对所提的多目标优化模型进行数值求解。通过对合成图像和真实图像进行仿真实验, 验证了本文模型对灰度不均和噪声图像的有效性。

## 2. 相关背景

### 2.1. CV 模型

Chan 和 Vese [10]提出了一个基于区域的模型, 考虑了图像的全局信息。设  $I: \Omega \rightarrow R$  是一个给定的图像, 轮廓  $C$  是一个闭合曲线, 将图像分为两个区域: 目标区域  $\Omega_1$  和背景区域  $\Omega_2$ , 该模型的能量泛函定义为:

$$E^{CV}(\phi, c_1, c_2) = \lambda_1 \int_{\Omega} |I(x) - c_1|^2 H_{\varepsilon}(\phi(x)) dx + \lambda_2 \int_{\Omega} |I(x) - c_2|^2 (1 - H_{\varepsilon}(\phi(x))) dx + \mu \int_{\Omega} \delta(\phi(x)) |\nabla \phi(x)| dx + \nu \int_{\Omega} H_{\varepsilon}(\phi(x)) dx \quad (1)$$

其中,  $\lambda_1$ 、 $\lambda_2$ 、 $\nu$  和  $\mu$  是正常数,  $\phi(x)$  是水平集函数,  $H(x)$  是 Heaviside 函数,  $\delta(x)$  是 Dirac 函数, 分别定义如下:

$$\begin{cases} H_\varepsilon(x) = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right) \\ \delta_\varepsilon(x) = H'_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2 + x^2} \end{cases} \quad (2)$$

$c_1$  和  $c_2$  分别表示轮廓内部和外部区域的灰度平均值, 根据变分理论和交替迭代法求得变量  $c_1$  和  $c_2$  的表达式定义为:

$$c_1 = \frac{\int_{\Omega} I(x)H(\phi(x))dx}{\int_{\Omega} H(\phi(x))dx}, c_2 = \frac{\int_{\Omega} I(x)(1-H(\phi(x)))dx}{\int_{\Omega} (1-H(\phi(x)))dx} \quad (3)$$

对变量  $\phi(x)$ , 使用梯度下降方法求解。固定  $c_1$  和  $c_2$ ,  $E^{CV}(\phi, c_1, c_2)$  关于  $\phi(x)$  的极小值为以下演化方程的稳态解:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \delta_\varepsilon(\phi) \left[ -\lambda_1 (I(x) - c_1)^2 + \lambda_2 (I(x) - c_2)^2 + \mu \operatorname{div} \left( \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) - \nu \right] \quad (4)$$

CV 模型考虑了整个图像的全局信息, 能够对整体目标进行较好地分割。并且它不依赖于任何先验知识或特定领域的信息。但是当图像存在灰度不均匀情况时, CV 模型可能会受到较亮或较暗区域的影响, 导致轮廓收缩或扩张过程中无法运动到正确的目标边界, 这可能会导致分割结果出现断裂、漏分割或误分割等问题。

## 2.2. LBF 模型

为了克服 CV 模型的缺点, Li 等人[11]提出了基于局部区域信息的 LBF 模型, 该模型利用高斯核函数的局部特性提取图像的局部信息, 能够有效地分割灰度不均的图像。能量泛函定义如下:

$$\begin{aligned} E^{LBF}(\phi, f_1(x), f_2(x)) = & \lambda_1 \iint K_\sigma(x-y) |I(y) - f_1(x)|^2 H(\phi(y)) dx dy \\ & + \lambda_2 \iint K_\sigma(x-y) |I(y) - f_2(x)|^2 (1 - H(\phi(y))) dx dy \end{aligned} \quad (5)$$

其中,  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  是正常数,  $f_1(x)$  和  $f_2(x)$  是两个空间变化的拟合函数, 分别近似于活动轮廓内外区域的局部灰度均值,  $K_\sigma(u)$  是高斯核函数, 定义如下:

$$K_\sigma(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sigma} e^{-|x|^2/2\sigma^2} \quad (6)$$

为了使活动轮廓在演化过程中保持平滑性与稳定性, 该模型又加入了长度正则项和符号距离函数约束正则项, 分别定义如下:

$$L(\phi) = \int_{\Omega} \delta(\phi(x)) |\nabla \phi(x)| dx \quad (7)$$

$$D(\phi) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} (|\nabla \phi(x)| - 1)^2 dx \quad (8)$$

其中长度正则项  $L(\phi)$  是为了使水平集轮廓在演化过程中保持光滑, 使得分割结果尽可能少地出现面积小的孤立分割区域。距离正则项  $D(\phi)$  是为了使活动轮廓在演化过程中保持稳定, 避免重新初始化。

最后, 模型的总能量泛函定义为:

$$E_{all}^{LBF}(\phi, f_1(x), f_2(x)) = E^{LBF}(\phi, f_1(x), f_2(x)) + \mu L(\phi) + \nu D(\phi) \quad (9)$$

固定水平集函数  $\phi$ , 关于式(5)使用变分法求得  $f_1(x)$  和  $f_2(x)$  定义如下:

$$\begin{cases} f_1(x) = \frac{K_\sigma * [H(\phi)I(x)]}{K_\sigma * H(\phi)} \\ f_2(x) = \frac{K_\sigma * [(1-H(\phi))I(x)]}{K_\sigma * (1-H(\phi))} \end{cases}$$

固定  $f_1(x)$  和  $f_2(x)$ , 利用变分法和梯度下降法, 求式(9)关于水平集函数  $\phi$  的梯度下降流为:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\delta(\phi)(\lambda_1 e_1 - \lambda_2 e_2) + \mu \delta(\phi) \operatorname{div} \left( \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) + \nu \left( \nabla^2 \phi - \operatorname{div} \left( \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) \right) \quad (10)$$

其中  $e_1(x)$  和  $e_2(x)$  表示为:

$$\begin{cases} e_1(x) = \int_{\Omega} K_\sigma(y-x) |I(x) - f_1(y)|^2 dy \\ e_2(x) = \int_{\Omega} K_\sigma(y-x) |I(x) - f_2(y)|^2 dy \end{cases}$$

LBF 模型考虑了图像的局部信息, 能够有效地分割灰度不均图像。但该模型在一定程度上对初始轮廓和噪声敏感, 而且对于高斯核函数的尺度参数的选择并没有统一标准, 所以较难达到最优效果。

### 3. 本文方法

#### 3.1. 模型假设

设  $I(x): \Omega \rightarrow R$  是一幅给定的观测图像,  $\Omega_1$  和  $\Omega_2$  满足  $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ ,  $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$ , 分别代表图像的目标和背景区域。下面我们针对观测图像  $I(x)$  给定以下 3 个假设, 分别表述如下。这 3 个假设将在后续的建模中起关键作用。

(1) 由于观测图像  $I(x)$  受到灰度不均和噪声的影响, 在目标  $\Omega_1$  和背景  $\Omega_2$  区域中不满足全局高斯分布, 但是我们假设其满足局部高斯分布, 即对  $y \in \Omega_i \cap O_x$ , 其中  $O_x$  表示以  $x$  为中心的局部邻域, 定义为  $O_x \triangleq \{y: |x-y| \leq \delta\}$ , 满足

$$I(y) \sim N(u_i(x), \sigma_i^2(x))$$

其中  $N(u_i(x), \sigma_i^2(x))$  表示以  $u_i(x)$  为均值,  $\sigma_i^2(x)$  为方差的高斯分布。

(2) 假设局部均值图像  $u_i(x)$  在目标  $\Omega_1$  和背景  $\Omega_2$  区域中分别服从全局高斯分布, 即对  $x \in \Omega_i$ , 满足

$$u_i(x) \sim N(c_i, \sigma_i^2)$$

其中  $N(c_i, \sigma_i^2)$  表示以  $c_i$  为均值,  $\sigma_i^2$  为方差的高斯分布。

(3) 假设局部方差  $\sigma_i^2(x)$  在目标  $\Omega_1$  和背景  $\Omega_2$  区域中服从的均匀分布, 即

$$p(\sigma_i^2(x)) = C_i$$

#### 3.2. 模型构建

在本节中, 我们根据贝叶斯公式并利用 MAP 准则, 通过观测图像  $I(x)$  对两个高斯分布的数字特征  $\theta_1(x) = (u_i(x), \sigma_i^2(x))$  和  $\theta_2 = (c_i, \sigma_i^2)$  进行估计:

$$p(\theta_1(x), \theta_2 | I(x)) = \frac{p(I(x) | \theta_1(x), \theta_2) p(\theta_1(x) | \theta_2) p(\theta_2)}{p(I(x))} \quad (11)$$

其中,  $p(I(x) | \theta_1(x), \theta_2)$  是似然函数, 表示特征图像和观测图像  $I(x)$  的关联程度,  $p(\theta_1(x) | \theta_2)$  是局部特

征的概率密度,  $p(\theta_2)$  和  $p(I(x))$  分别表示灰度值  $I(x)$  和  $\theta_2$  的先验概率, 在 MAP 准则下, 我们将其忽略。式(11)可以重写为:

$$p(\theta_1(x), \theta_2 | I(x)) \propto p(I(x) | \theta_1(x), \theta_2) p(\theta_1(x) | \theta_2) \quad (12)$$

接下来, 我们将根据上述 3 条假设分别对  $p(I(x) | \theta_1(x), \theta_2)$  和  $p(\theta_1(x) | \theta_2)$  进行计算。

(1) 计算似然函数  $p(I(x) | \theta_1(x), \theta_2)$

根据假设 1, 在图像域中, 对每个点  $x \in \Omega_i$ , 考虑一个半径为  $\delta$  的圆形邻域, 定义为  $O_x \triangleq \{y: |x-y| \leq \delta\}$ , 对  $\forall y \in \Omega_i \cap O_x$ ,  $p(I(y) | \theta_1(x), \theta_2)$  是观测图像  $I(y)$  的一个似然概率。由于观测图像服从局部高斯分布, 所以由贝叶斯公式得到:

$$p(I(y) | \theta_1(x), \theta_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i(x)} \exp\left(-\frac{(I(y)-u_i(x))^2}{2\sigma_i^2(x)}\right) \quad (13)$$

其中,  $u_i(x)$  和  $\sigma_i(x)$  是局部灰度均值和方差。

接下来, 我们计算在整个图像域中的  $p(I(x) | \theta_1(x), \theta_2)$ , 对  $\forall y \in \Omega_i \cap O_x, i=1,2$  和  $x \in \Omega$ ,

$$\begin{aligned} p(I(x) | \theta_1(x), \theta_2) &= \prod_{x \in \Omega} \prod_{i=1}^2 \prod_{y \in \Omega_i \cap O_x} p(I(y) | \theta_1(x), \theta_2) \\ &= \prod_{x \in \Omega} \prod_{i=1}^2 \prod_{y \in \Omega_i \cap O_x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i(x)} \exp\left(-\frac{(I(y)-u_i(x))^2}{2\sigma_i^2(x)}\right) \end{aligned} \quad (14)$$

为了提高模型效率, 减少计算时间, 我们只对图像的灰度值特征进行建模, 将含  $1/\sigma_i(x)$  和  $\sigma_i^2(x)$  的一部分看作一个常值, 因此式(14)可以重写为:

$$p(I(x) | \theta_1(x), \theta_2) = \prod_{x \in \Omega} \prod_{i=1}^2 \prod_{y \in \Omega_i \cap O_x} \frac{1}{Z_{1i}} \exp\left(-\frac{(I(y)-u_i(x))^2}{Z_{2i}}\right) \quad (15)$$

(2) 计算局部特征图像概率  $p(\theta_1(x) | \theta_2)$

在本文中, 由于  $\theta_1(x) = (u_i(x), \sigma_i^2(x))$ , 我们可得

$$p(\theta_1(x) | \theta_2) = p(u(x) | \theta_2) p(\sigma(x) | \theta_2)$$

由假设 3, 局部方差  $\sigma_i^2(x)$  在目标  $\Omega_1$  和背景  $\Omega_2$  区域中服从的均匀分布, 则可得

$$p(\theta_1(x) | \theta_2) \propto p(u(x) | \theta_2) \quad (16)$$

下面计算  $p(u(x) | \theta_2)$ , 针对局部均值图像  $u(x)$ , 我们考虑了图像的全局统计信息, 由假设 2, 局部均值图像  $u(x)$  在目标  $\Omega_1$  和背景  $\Omega_2$  区域中分别服从全局高斯分布, 所以对  $x \in \Omega_i, i=1,2$ ,  $p(u_i(x) | \theta_2)$  定义如下:

$$p(u_i(x) | \theta_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp\left(-\frac{(u_i(x)-c_i)^2}{2\sigma_i^2}\right)$$

其中  $c_i$  定义如上式(3)。因为方差是衡量数据离散程度的一个指标, 其大小变化影响图像的灰度值分布。在本文模型中, 为简化计算, 我们将含  $1/\sigma_i$  和  $\sigma_i^2$  的一部分看作一个常值。则在整个图像域中  $p(u(x) | \theta_2)$  定义为:

$$p(u(x)|\theta_2) = \prod_{i=1}^2 \prod_{x \in \Omega_i} \frac{1}{T_{2i}} \exp\left(-\frac{(u_i(x) - c_i)^2}{T_{2i}}\right) \quad (17)$$

概率分布  $p(u(x)|\theta_2)$  为局部均值图像  $u(x)$  提供了全局灰度分布的先验信息, 使得模型更为精细, 更好的建模了灰度不均和噪声污染图像。接下来, 结合式(12)、式(15)和式(17), 我们得到:

$$\begin{aligned} p(\theta_1(x), \theta_2 | I(x)) &\propto \prod_{x \in \Omega} \prod_{i=1}^2 \prod_{y \in \Omega_i \cap O_x} p(I(y) | \theta_1(x), \theta_2) \prod_{i=1}^2 \prod_{x \in \Omega_i} p(\theta_1(x) | \theta_2) \\ &= \prod_{x \in \Omega} \prod_{i=1}^2 \prod_{y \in \Omega_i \cap O_x} \frac{1}{Z_{2i}} \exp\left(-\frac{(I(y) - u_i(x))^2}{Z_{2i}}\right) \\ &\quad \times \prod_{i=1}^2 \prod_{x \in \Omega_i} \frac{1}{T_{2i}} \exp\left(-\frac{(u_i(x) - c_i)^2}{T_{2i}}\right) \end{aligned} \quad (18)$$

利用 MAP 准则, 并且对上式取对数, 可将最大值转换为以下能量的最小值, 表示为:

$$\begin{aligned} \min_{\Omega_i, u(x), c} E &= E^L + E^G \\ &= \sum_{i=1}^2 \int_{x \in \Omega} \int_{y \in \Omega_i \cap O_x} -\log p(I(y) | \theta_1(x), \theta_2) dx dy + \sum_{i=1}^2 \int_{x \in \Omega_i} -\log p(\theta_1(x) | \theta_2) dx dy \\ &= \sum_{i=1}^2 \lambda_i \int_{x \in \Omega} \int_{y \in \Omega_i \cap O_x} (I(y) - u_i(x))^2 dx dy + \sum_{i=1}^2 \alpha_i \int_{x \in \Omega_i} (u_i(x) - c_i)^2 dx dy \end{aligned} \quad (19)$$

其中,  $\lambda_i = \frac{\log Z_{2i}}{Z_{2i}}$ ,  $\alpha_i = \frac{\log T_{2i}}{T_{2i}}$ ,  $i = 1, 2$ 。

### 3.3. 水平集函数

下面利用水平集技术, 结合 Heaviside 函数和高斯核函数, 将式(19)的积分区域扩充到整个图像区域  $\Omega$ , 则(19)可以改写为:

$$\begin{aligned} \min_{\phi, u(x), c} E &= E^L + E^G \\ &= \sum_{i=1}^2 \lambda_i \iint_{\Omega} K_{\sigma}(x-y) (I(y) - u_i(x))^2 M_i(\phi) dx dy \\ &\quad + \sum_{i=1}^2 \alpha_i \int_{\Omega} (u_i(x) - c_i)^2 M_i(\phi) dx dy \end{aligned} \quad (20)$$

其中,  $K_{\sigma}(x-y)$  是高斯核函数, 等价于局部区域  $O_x$  的指示函数, 定义如(6)式所示;  $M_1 = H(\phi)$  和  $M_2 = 1 - H(\phi)$  分别表示  $\Omega_1$  和  $\Omega_2$  的指示函数。

与典型的水平集方法一样, 为了使水平集轮廓在演化过程中保持光滑, 使分割结果尽可能少地出现面积小的孤立区域, 我们通过惩罚其弧长来使演化曲线保持正则化, 长度项的定义如上式(7)。此外, 为了防止水平集函数在演化过程中变得过于陡峭或出现震荡等不稳定情况, 我们又加入了  $H^1$  正则项, 用来对水平集函数进行平滑处理, 具体定义如下:

$$R(\phi) = \int_{\Omega} |\nabla \phi(x)|^2 dx \quad (21)$$

最后, 结合数据项(20)和水平集函数的正则项, 得到如下的能量泛函:

$$\begin{aligned}
E_{all} &= E^L + E^G + \mu L(\phi) + R(\phi) \\
&= \sum_{i=1}^2 \lambda_i \iint_{\Omega} K_{\sigma}(x-y) (I(y) - u_i(x))^2 M_i(\phi) dx dy \\
&\quad + \sum_{i=1}^2 \alpha_i \int_{\Omega} (u_i(x) - c_i)^2 M_i(\phi) dx dy \\
&\quad + \mu \int_{\Omega} \delta(\phi(x)) |\nabla \phi(x)| dx + \int_{\Omega} |\nabla \phi(x)|^2 dx
\end{aligned} \tag{22}$$

当水平集函数偏离目标边界时, 局部灰度均值  $u_i(x)$  和全局灰度均值  $c_i$  之间存在较大的差距; 当水平集函数接近目标边界时,  $u_i(x)$  和  $c_i$  之间的差距较小; 当水平集函数正好位于目标边界时,  $u_i(x)$  和  $c_i$  相等, 此时, 能量泛函中  $E^L$  项能量达到最小。

### 3.4. 模型求解

本文采用交替迭代算法对模型进行求解。对于一个固定的水平集函数, 我们关于  $u_1(x)$  和  $u_2(x)$  最小化能量泛函  $E_{all}$ 。通过变分法, 函数  $u_1(x)$  和  $u_2(x)$  分别满足以下两个 Euler-Lagrange 方程:

$$\lambda_1 \int K_{\sigma}(x-y) |I(y) - u_1(x)|^2 H(\phi) dy + \alpha_1 (u_1(x) - c_1)^2 H(\phi) = 0 \tag{23}$$

$$\lambda_2 \int K_{\sigma}(x-y) |I(y) - u_2(x)|^2 (1-H(\phi)) dy + \alpha_2 (u_2(x) - c_2)^2 (1-H(\phi)) = 0 \tag{24}$$

从式(23)和式(24)分别求解出函数  $u_1(x)$  和  $u_2(x)$ , 可以得到:

$$\begin{cases} u_1(x) = \frac{\alpha_1 c_1 H(\phi) + \lambda_1 \int K_{\sigma}(x-y) I(y) H(\phi) dy}{\alpha_1 H(\phi) + \lambda_1 \int K_{\sigma}(x-y) H(\phi) dy} \\ u_2(x) = \frac{\alpha_2 c_2 (1-H(\phi)) + \lambda_2 \int K_{\sigma}(x-y) I(y) (1-H(\phi)) dy}{\alpha_2 (1-H(\phi)) + \lambda_2 \int K_{\sigma}(x-y) (1-H(\phi)) dy} \end{cases} \tag{25}$$

保持  $u_1(x)$  和  $u_2(x)$  固定, 并使能量泛函  $E_{all}$  关于  $\phi$  最小化, 采用变分法和梯度下降法, 我们推导出梯度下降流方程:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi}{\partial t} &= -\delta(\phi) \left[ \lambda_1 \int_{\Omega} K_{\sigma}(x-y) |I(y) - u_1(x)|^2 dx \right] \\
&\quad + \delta(\phi) \left[ \lambda_2 \int_{\Omega} K_{\sigma}(x-y) |I(y) - u_2(x)|^2 dx \right] \\
&\quad + \delta(\phi) \left( \alpha_1 (u_1(x) - c_1)^2 - \alpha_2 (u_2(x) - c_2)^2 \right) \\
&\quad + \mu \delta(\phi) \operatorname{div} \left( \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) + \Delta \phi
\end{aligned} \tag{26}$$

本文采用有限差分法对(26)式进行数值求解。综上, 交替迭代算法求解本文模型的具体算法步骤如下:

#### 算法步骤:

- Step1: 输入图像并设置初始参数;
- Step2: 给定初始轮廓, 并设置  $n = 0$  和最大迭代次数  $N$ ;
- Step3: 通过式(3)更新  $c_i, i = 1, 2$ ;
- Step4: 通过式(25)更新  $u_i, i = 1, 2$ ;
- Step5: 通过式(26)更新水平集函数;
- Step6: 当  $n < N$  时设置  $n = n + 1$ , 同时返回 Step3, 否则输出结果。



#### 4. 数值实验

本文提出的模型是在 MATLAB 2020b 中实现，运行在 Intel(R) Core(TM) i5-8265U CPU @ 3.2GHz 的系统上。实验首先验证本文模型的有效性，其次验证本文模型对初始轮廓的鲁棒性和对噪声的鲁棒性，最后与 CV [10]、LBF [11]、LIC [18]、GLFIF [19]模型进行对比实验。



**Figure 1.** The segmentation experiment of the model in this paper. (a) Segmentation of synthetic images or medical images; (b) Segmentation of natural images

**图 1.** 本文模型的分割实验。(a) 分割合成图像或医学图像；(b) 分割自然图像

#### 4.1. 评价指标

为了对模型的分割效果进行定量分析,我们引入了 Dice 相似系数(DSC),其定义如下:

$$DSC = \frac{2(S_T \cap S_E)}{S_T + S_E}$$

其中,  $S_T$  表示真值图,  $S_E$  表示实验获得的分割图。DSC 的值越接近 1, 代表分割精度越高。

#### 4.2. 模型的有效性

为了验证本文模型的有效性,我们对 10 幅不同的图像进行了分割实验。图 1 中(a)是合成图像或医学图像的分割,(b)是自然图像的分割结果。(a)和(b)的第一行是带初始轮廓的原始图像,第二行是分割结果,第三行是分割轮廓。从实验结果可以看出,本文模型可以有效地分割灰度不均、边界模糊、对比度低的图像。

#### 4.3. 模型对初始轮廓和噪声的鲁棒性

本节验证模型对初始轮廓的鲁棒性。选取 3 幅图像进行实验,如图 2,绿色曲线代表初始轮廓,红色曲线代表分割结果。实验结果表明,初始轮廓无论是在分割目标上,还是在背景上,最终都可以准确地定位到目标边界,得到理想的分割结果。因此,本文模型对初始轮廓位置具有鲁棒性。

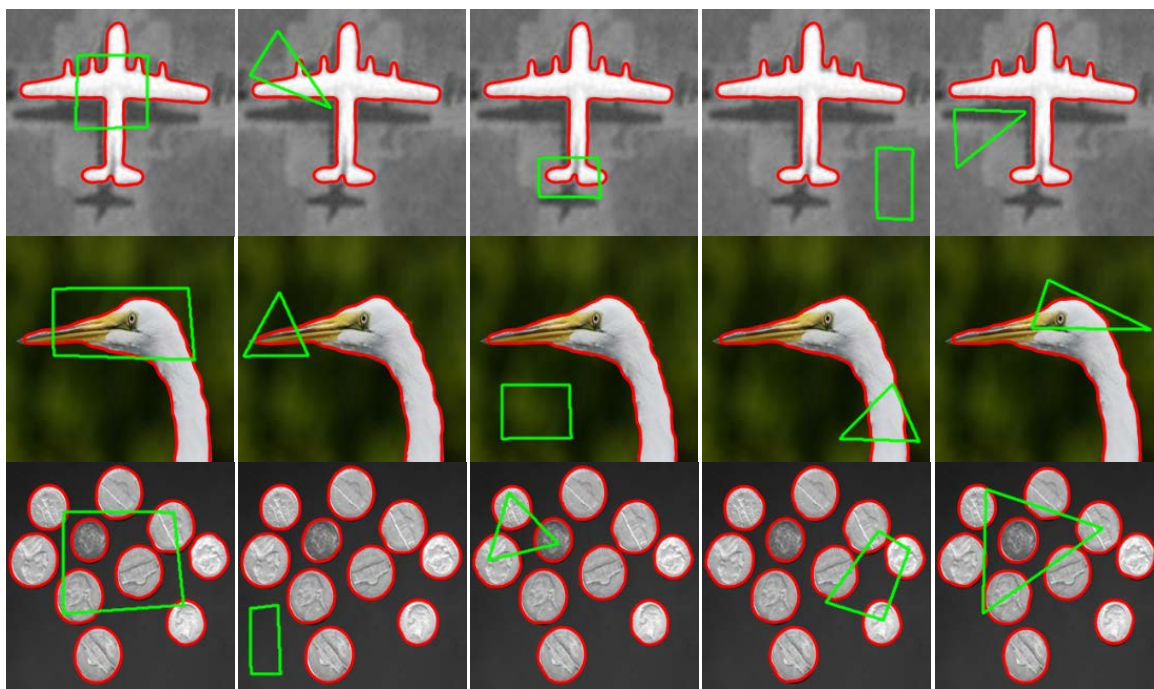


Figure 2. Image segmentation results with different initial contours

图 2. 具有不同初始轮廓的图像分割结果

下面验证模型对噪声的鲁棒性。如图 3,第一行到第三行分别添加均值为 0,不同方差的高斯白噪声;不同密度的椒盐噪声;均值为 0,不同方差的光斑噪声的图像分割结果。第一列是原始图像分割结果,第二列到第六列分别是添加了不同强度的噪声图像的分割结果。从实验结果可以看出,对于单一噪声污染的图像,本文模型能够有效地排除噪声的影响,准确地捕捉到目标物体的轮廓。

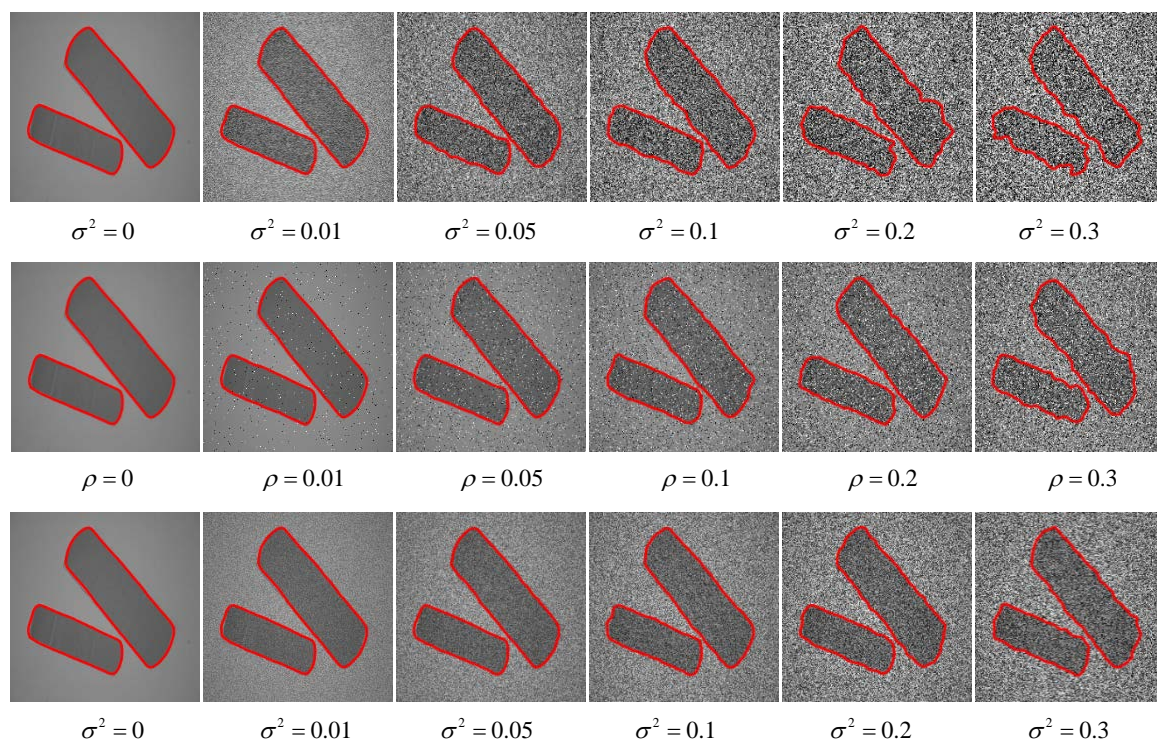


Figure 3. The segmentation results of noisy images

图 3. 噪声图像分割结果

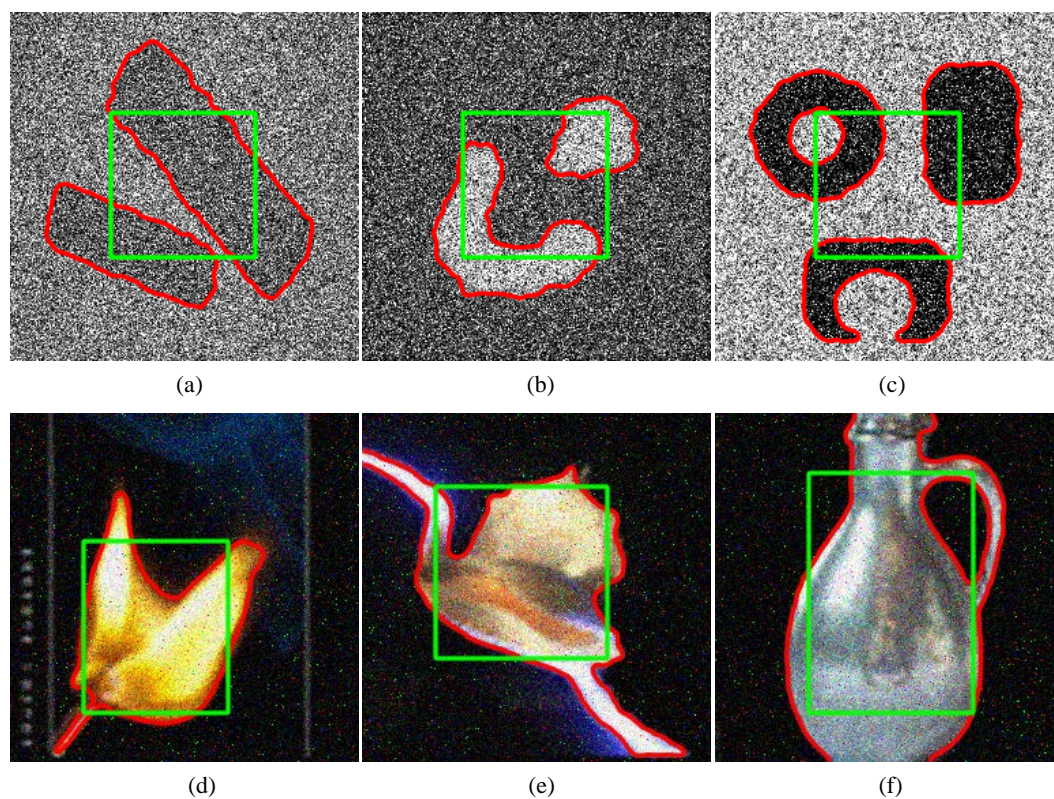
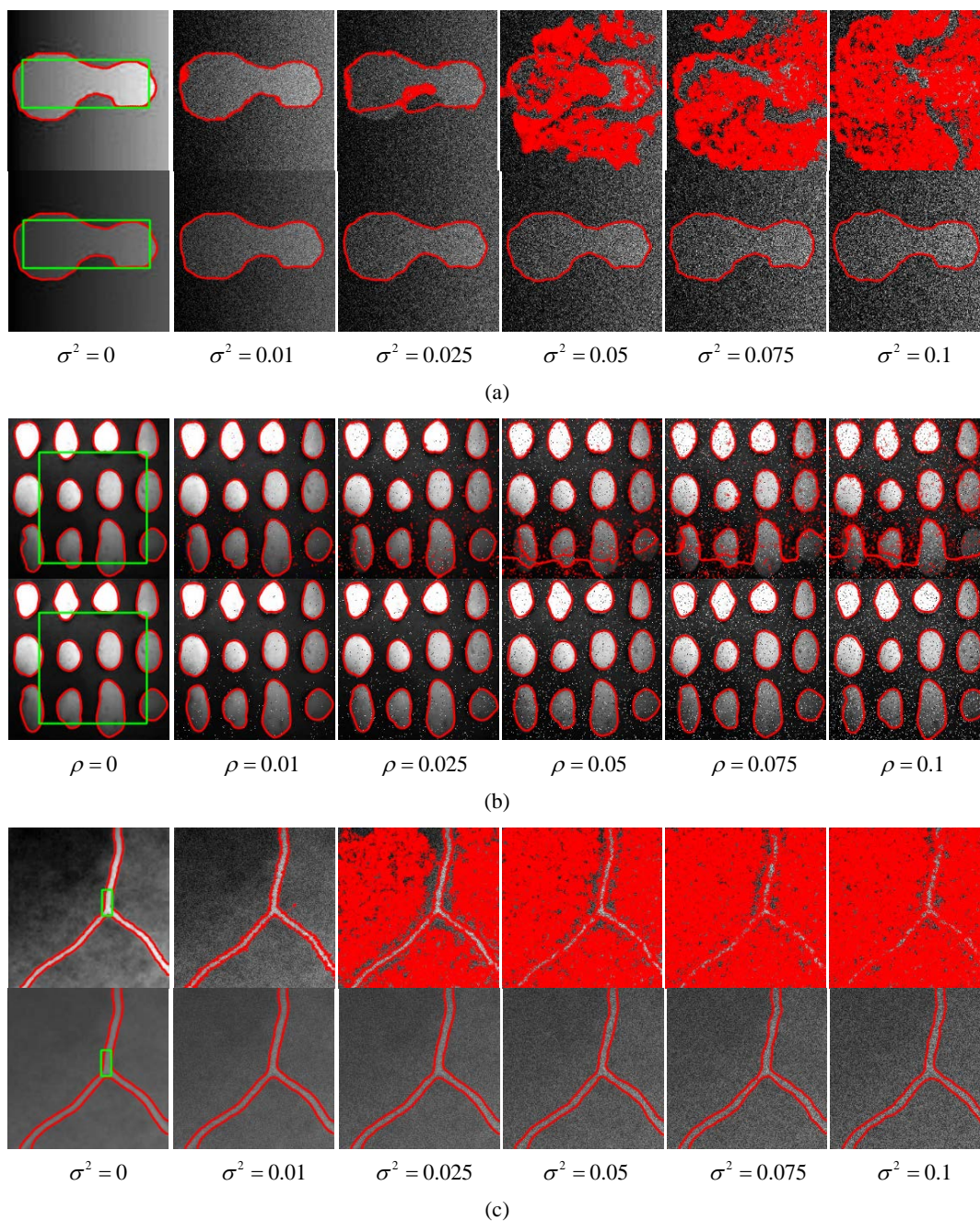


Figure 4. The segmentation results of hybrid noise image

图 4. 混合噪声图像分割结果

图4展示了6幅混合噪声图像的分割结果。在这6幅图像中分别依次添加不同类型的噪声，以此来验证本文模型对混合噪声图像的有效性。(a)~(c)依次添加了密度为0.1的椒盐噪声、均值为0，方差为0.05的高斯白噪声和均值为0，方差为0.1的光斑噪声。(d)~(f)依次添加了密度为0.01的椒盐噪声、均值为0，方差为0.01的高斯白噪声和均值为0，方差为0.01的光斑噪声。分割结果表明，本文模型对混合噪声图像的分割具有很强的鲁棒性。



**Figure 5.** Noise comparison experiment between LBF model and this model. (a) Comparison experiment of Gaussian white noise; (b) Comparison experiment of salt and pepper noise; (c) Comparison experiment of spot noise

**图5.** LBF模型和本文模型的噪声对比实验。(a) 高斯白噪声对比实验；(b) 椒盐噪声对比实验；(c) 光斑噪声对比实验

为进一步验证本文模型对噪声的鲁棒性，我们在灰度不均匀的图像中添加不同类型的噪声来实现对噪声图像的分割，并与 LBF 模型进行对比实验。

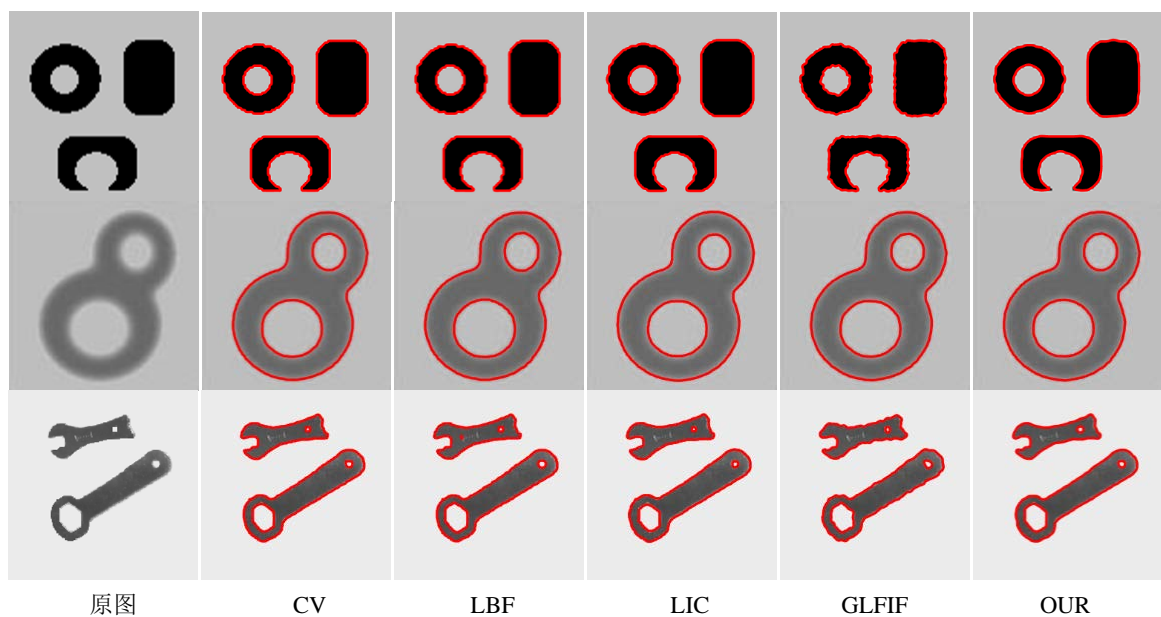
图 5(a)、图 5(b)、图 5(c)分别是 LBF 模型和本文模型对零均值高斯白噪声、椒盐噪声和零均值光斑噪声的分割结果的比较。图 5(a)、图 5(b)和图 5(c)的第一行是 LBF 模型的分割结果，第二行是本文模型的分割结果。第一列是带有初始轮廓的原始图像的分割结果，第二列到第六列是分别添加了不同等级噪声的分割结果。在分割过程中，保持初始轮廓和参数不变，只改变迭代次数，迭代次数和分割时间如表 1 所示。由实验结果可以看出，LBF 模型能够成功地分割出含低程度的噪声图像，但是在噪声水平较高的情况下，不能准确地定位目标边界，而且分割所需要的时间较长；本文模型能够在不同等级的噪声下精确地分割图像，且需要的迭代次数和时间比 LBF 模型更具优势，所以本文模型对噪声具有鲁棒性。

**Table 1.** Comparison of number of iterations  $N$  and segmentation time  $S$  ( $N/S$ )

**表 1.** 迭代次数  $N$  和分割时间  $S$  对比( $N/S$ )

高斯噪声		椒盐噪声		光斑噪声	
LBF	OUR	LBF	OUR	LBF	OUR
260/17.029	10/0.597	600/38.279	80/3.026	50/1.735	35/1.131
300/19.688	10/0.610	400/23.959	80/3.049	50/1.741	35/1.261
340/22.183	15/1.276	400/24.641	80/2.960	50/1.755	35/1.264
380/23.784	20/1.772	400/26.015	80/2.966	50/1.781	40/1.371
380/23.812	30/2.234	400/24.821	80/3.047	50/1.768	40/1.673
380/25.263	40/3.217	400/24.620	80/3.005	50/1.737	40/1.684

#### 4.4. 不同模型的对比实验



**Figure 6.** Results of bimodal image segmentation by different models

**图 6.** 不同模型分割双峰图像的结果

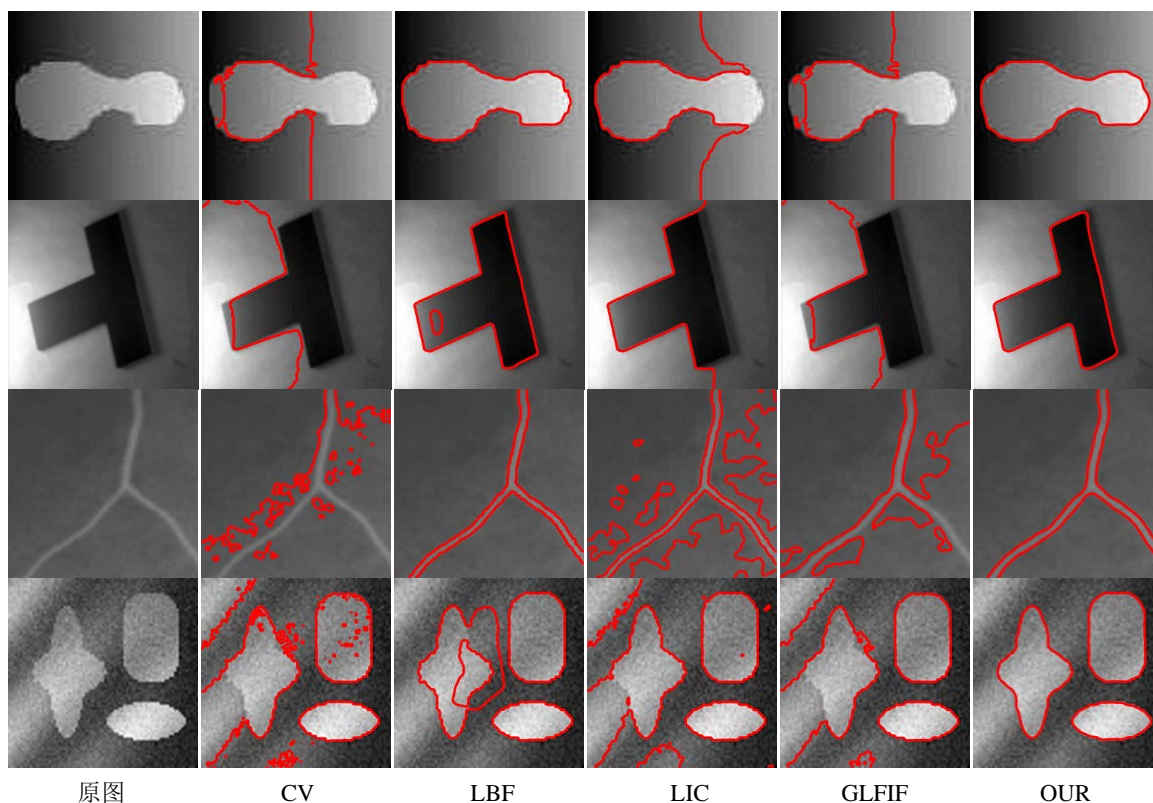
本节我们选取不同类型的图像进行分割对比实验。图 6 是双峰图像的分割结果，第一列是原始图像，第二列到第六列分别是 CV、LBF、LIC、GLFIF 和本文模型的分割结果。实验结果表明，所有方法都对这些双峰图像的分割有着较好的效果。但是，如表 2 所示，本文模型只需迭代 1 次，就能得到良好的分割效果，对比其他模型的分割时间可以看出，本文模型无论是在迭代次数还是分割时间上都优于其它对比模型。

**Table 2.** Iteration times  $N$  and segmentation time  $S$  ( $N/S$ )

**表 2.** 迭代次数  $N$  和分割时间  $S$  ( $N/S$ )

CV	LBF	LIC	GLFIF	OUR
20/0.583	140/4.125	5/0.565	100/1.013	1/0.239
20/0.541	260/10.961	5/0.587	150/1.257	1/0.243
20/0.546	140/4.191	5/0.494	100/0.859	1/0.143

为验证本文模型对灰度不均匀图像的分割效果，我们选取了 4 幅典型的合成或医学图像进行对比实验，这 4 幅图像具有严重灰度不均、边界弱、对比度低以及光照不均匀等问题。图 7 的第一列是原始图像，第二列到第六列对比模型的分割结果。从实验结果可以看出，CV、LIC 和 GLFIF 模型对灰度不均匀的图像分割效果较差，LBF 模型可以分割部分灰度不均的图像，本文模型对灰度不均的图像分割效果较好。结合表 3 中的数据，可以看出本文提出的模型不仅可以准确地定位目标边界，还可以在较短的时间内实现理想的分割效果。



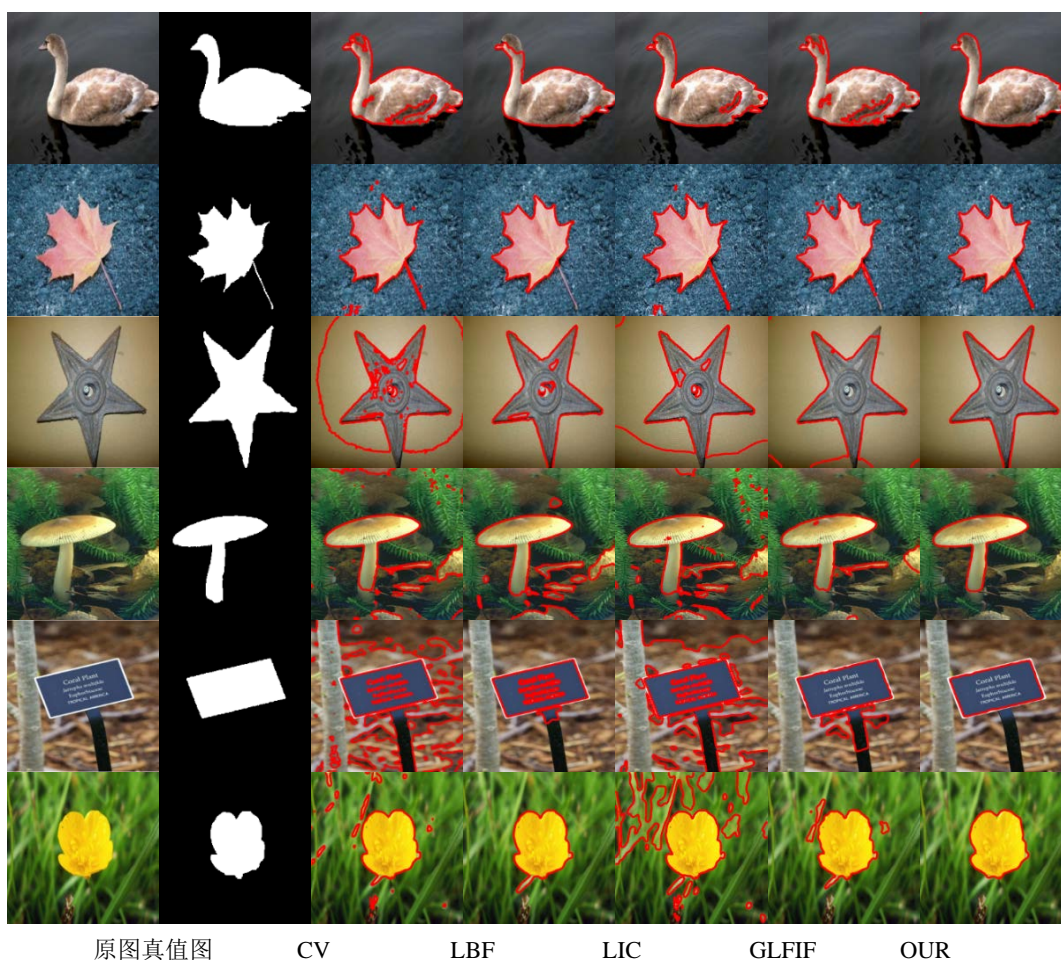
**Figure 7.** The results of segmentation of intensity inhomogeneity image by different models

**图 7.** 不同模型分割灰度不均匀图像的结果

**Table 3.** Iteration times  $N$  and segmentation time  $S$  ( $N/S$ )**表 3.** 迭代次数  $N$  和分割时间  $S$  ( $N/S$ )

CV	LBF	LIC	GLFIF	OUR
80/1.899	40/1.778	30/2.021	150/1.338	15/0.768
80/1.806	180/5.692	30/2.096	150/1.291	35/1.037
80/1.795	120/4.735	30/2.095	100/2.852	35/1.131
80/1.783	120/5.717	30/2.108	150/1.507	35/1.193

图 8 是为验证本文模型对自然图像的有效性。我们选中 6 幅灰度不均的自然图像进行对比实验，第一列是原图，第二列是分割真值图，第三列到第七列分别是 CV、LBF、LIC、GLFIF 和本文模型的分割结果。从图中可以观察到，对于背景较简单的图像，如第一行和第二行，本文模型和对比模型都可以定位到目标边界，但是从分割的最终分割轮廓可以看出本文模型的分割效果最好；对于背景较复杂的图像，如第三行到第六行，CV、LIC 和 GLFIF 模型都不能准确地分割目标，LBF 可以分割部分图像，本文模型在分割复杂背景的图像时也能得到较好的分割结果。结合图 8 和图 9，可以看出，我们的模型可以实现对复杂图像的分割，且 DSC 值都优于文中的其它对比模型。

**Figure 8.** Comparative experimental results of different models**图 8.** 不同模型的对比实验结果

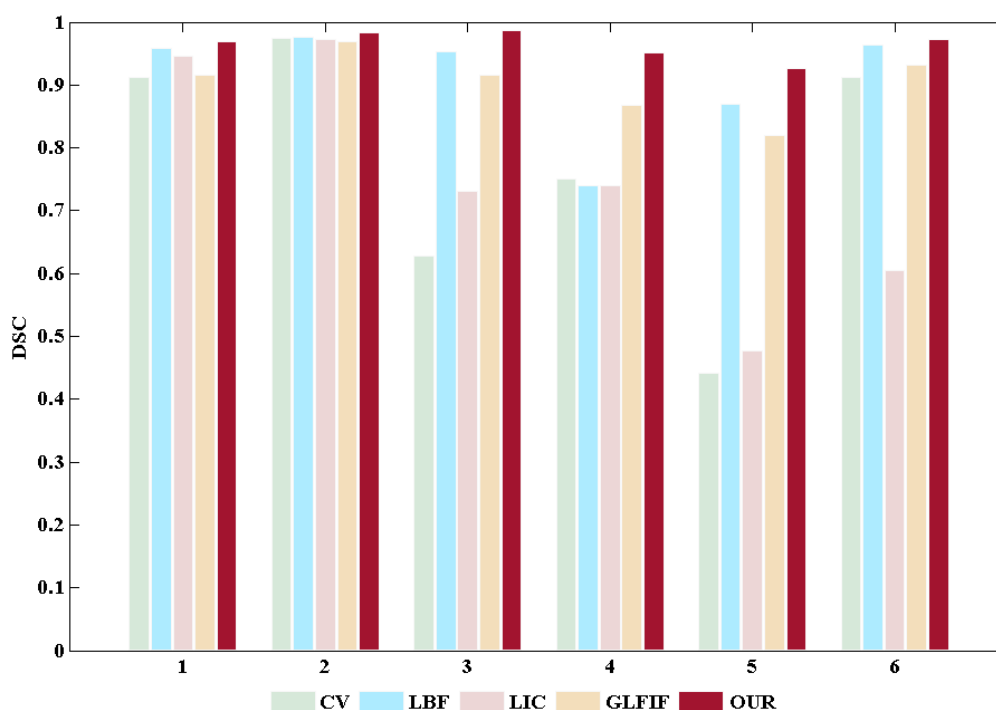


Figure 9. Experimental comparison of DSC values  
图 9. DSC 值实验对比

## 5. 结论

为了更好地分割灰度不均匀和噪声污染的图像,本文提出了一个基于 MAP 的全局和局部统计先验活动轮廓模型。该模型通过假设观测图像服从局部高斯分布;而局部均值图像和局部方差图像分别服从全局高斯分布和均匀分布。根据这 3 个假设,基于 MAP 准则,构建了结合局部和全局信息的变分活动轮廓模型。实验结果表明,本文模型不仅具有较高的分割效率,还对初始轮廓和噪声鲁棒。然而,我们注意到,在实验过程中参数较多,且对参数的选取没有统一标准,因此如何减少参数对最终分割结果的影响是我们下一步关注的内容。

## 基金项目

国家自然科学基金项目资助(模糊正则化图像复原及深度网络学习实现研究 62061016,非凸非光滑高阶变分正则和非局部变分正则图像复原研究 61561019)。

## 参考文献

- [1] Li, H., Gong, M., Miao, Q. and Wang, B. (2018) Interactive Active Contour with Kernel Descriptor. *Information Sciences*, **450**, 53-72. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2018.03.016>
- [2] 佟国峰, 刘永旭, 彭浩, 等. 基于编码特征学习的 3D 点云语义分割网络[J]. 模式识别与人工智能, 2023, 36(4): 313-326.
- [3] Zhang, W., Li, R., Deng, H., et al. (2015) Deep Convolutional Neural Networks for Multi-Modality Isointense Infant Brain Image Segmentation. *NeuroImage*, **108**, 214-224. <https://doi.org/10.1016/j.neuroimage.2014.12.061>
- [4] Müller, D. and Kramer, F. (2021) MIScnn: A Framework for Medical Image Segmentation with Convolutional Neural Networks and Deep Learning. *BMC Medical Imaging*, **21**, Article No. 12. <https://doi.org/10.1186/s12880-020-00543-7>
- [5] 唐利明, 熊点华, 方壮. 基于比尔朗伯定律的变分水平集模型[J]. 电子学报, 2023, 51(2): 416-426.



- [6] 孟新超, 齐银波. 基于活动轮廓模型的图像分割方法研究综述[J]. 信息技术与信息化, 2023(5): 91-94.
- [7] Paragios, N., Mellina-Gottardo, O. and Ramesh, V. (2001) Gradient Vector Flow Fast Geodesic Active Contours. *Proceedings Eighth IEEE International Conference on Computer Vision. ICCV 2001*, Vancouver, 7-14 July 2001, 67-73.
- [8] Yang, X. and Jiang, X. (2020) A Hybrid Active Contour Model Based on New Edge-Stop Functions for Image Segmentation. *International Journal of Ambient Computing and Intelligence (IJACI)*, **11**, 87-98. <https://doi.org/10.4018/IJACI.2020010105>
- [9] Li, C.M., Xu, C.Y., Gui, C.F. and Fox, M.D. (2010) Distance Regularized Level Set Evolution and Its Application to Image Segmentation. *IEEE Transactions on Image Processing*, **19**, 3243-3254. <https://doi.org/10.1109/TIP.2010.2069690>
- [10] Chan, T.F. and Vese, L.A. (2001) Active Contours without Edges. *IEEE Transactions on Image Processing*, **10**, 266-277. <https://doi.org/10.1109/83.902291>
- [11] Li, C.M., Kao, C.Y., Gore, J.C. and Ding, Z.H. (2007) Implicit Active Contours Driven by Local Binary Fitting Energy. *2007 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, Minneapolis, 17-22 June 2007, 1-7. <https://doi.org/10.1109/CVPR.2007.383014>
- [12] Wang, L., He, L., Mishra, A. and Li, C.M. (2009) Active Contours Driven by Local Gaussian Distribution Fitting Energy. *Signal Processing*, **89**, 2435-2447. <https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2009.03.014>
- [13] Wang, L., Li, C., Sun, Q., Xia, D.S. and Kao, C.Y. (2009) Active Contours Driven by Local and Global Intensity Fitting Energy with Application to Brain MR Image Segmentation. *Computerized Medical Imaging and Graphics*, **33**, 520-531. <https://doi.org/10.1016/j.compmedimag.2009.04.010>
- [14] 熊点华, 唐利明. 基于融合局部信息的全局划分活动轮廓模型在图像分割中的研究[J]. 湖北民族大学学报(自然科学版), 2021, 39(4): 404-410.
- [15] Li, Y., Cao, G., Wang, T., Cui, Q.J. and Wang, B.S. (2020) A Novel Local Region-Based Active Contour Model for Image Segmentation Using Bayes Theorem. *Information Sciences*, **506**, 443-456. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2019.08.021>
- [16] Wang, G., Zhang, F., Chen, Y., Weng, G.R. and Chen, H.T. (2023) An Active Contour Model Based on Local Pre-Piecewise Fitting Bias Corrections for Fast and Accurate Segmentation. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, **72**, 1-13. <https://doi.org/10.1109/TIM.2023.3241981>
- [17] Weng, G., Dong, B. and Lei, Y. (2021) A Level Set Method Based on Additive Bias Correction for Image Segmentation. *Expert Systems with Applications*, **185**, Article ID: 115633. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2021.115633>
- [18] Li, C., Huang, R., Ding, Z., et al. (2011) A Level Set Method for Image Segmentation in the Presence of Intensity Inhomogeneities with Application to MRI. *IEEE Transactions on Image Processing*, **20**, 2007-2016. <https://doi.org/10.1109/TIP.2011.2146190>
- [19] Fang, J., Liu, H., Liu, J., et al. (2021) Fuzzy Region-Based Active Contour Driven by Global and Local Fitting Energy for Image Segmentation. *Applied Soft Computing*, **100**, Article ID: 106982. <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2020.106982>
- [20] Ren, Y., Tang, L., Zhang, H. and Zheng, J. (2022) A Variational Level Set Model Combining with Local Gaussian Fitting and Markov Random Field Regularization. *Multimedia Tools and Applications*, **81**, 4511-4534. <https://doi.org/10.1007/s11042-021-11783-2>
- [21] Yang, Y., Hou, X. and Ren, H. (2022) Efficient Active Contour Model for Medical Image Segmentation and Correction Based on Edge and Region Information. *Expert Systems with Applications*, **194**, Article ID: 116436. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2021.116436>
- [22] Niu, S., Chen, Q., De Sisternes, L., et al. (2017) Robust Noise Region-Based Active Contour Model via Local Similarity Factor for Image Segmentation. *Pattern Recognition*, **61**, 104-119. <https://doi.org/10.1016/j.patcog.2016.07.022>
- [23] Yan, S., Tai, X.C., Liu, J. and Huang, H.Y. (2020) Convexity Shape Prior for Level Set-Based Image Segmentation Method. *IEEE Transactions on Image Processing*, **29**, 7141-7152. <https://doi.org/10.1109/TIP.2020.2998981>
- [24] Yang, Y., Wang, R., Shu, X., et al. (2021) Level Set Framework with Transcendental Constraint for Robust and Fast Image Segmentation. *Pattern Recognition*, **117**, Article ID: 107985. <https://doi.org/10.1016/j.patcog.2021.107985>
- [25] Pang, Z., Yao, J., Shi, B. and Zhu, H.H. (2023) Intensity Inhomogeneity Image Segmentation Based on the Gradient-Based Spaces and the Prior Constraint. *Applied Mathematical Modelling*, **119**, 605-625. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2023.02.024>