

Using Higher-Order L-Moments for Flood Frequency Analysis in Northern Shaanxi

Junzhen Wang¹, Keyu Zhao²

¹Guizhou Dam Safety Observation Center, Guiyang Guizhou

²PowerChina Guiyang Engineering Corporation Limited, Guiyang Guizhou

Email: junzicau@163.com

Received: Jul. 8th, 2018; accepted: Jul. 24th, 2018; published: Jul. 31st, 2018

Abstract

In order to provide an efficient and reliable theoretical basis for design floods in the northern Shaanxi province, the higher-order L-Moments are applied in flood frequency analysis based on the principles of higher-order L-Moments. The annual maximum flood series of 8 hydrological stations at Jiaokou, Zhangjiashan, Zhaoshiyao, Sudie, Liuja, Zhangcunyi, Linjiacun and Shenmu Rivers are selected for case study. The parameters of Generalized Extreme Value (GEV) distribution and the design floods are estimated. The flood frequency curves are fitted, and the cumulative of squares error is regard as an indicator to evaluate the effect, and compared with the traditional Method of moments. The results show that higher-order L-Moments possess good statistical performance, which can describe the data series much better than lower-order L-Moments in flood analysis. Consequently, this method is reasonable and feasible, and would be provided the basis for the flood quantile calculation.

Keywords

Design Flood, Parameter Estimation, Flood Quantile, Higher-Order L-Moments, GEV Distribution

高阶线性矩法在陕北地区洪水频率分析中的应用

王俊珍¹, 赵克宇²

¹贵州省大坝安全监测中心, 贵州 贵阳

²中国电建集团贵阳勘测设计研究院有限公司, 贵州 贵阳

Email: junzicau@163.com

收稿日期: 2018年7月8日; 录用日期: 2018年7月24日; 发布日期: 2018年7月31日

摘要

在介绍高阶线性矩原理的基础上, 选取陕北交口河、张家山、赵石窖、绥德、刘家河、张村驿、林家村及神木
作者简介: 王俊珍(1987-), 女, 工程师, 研究方向: 水文学及水资源。

8个水文站的洪峰流量资料进行广义极值分布高阶线性矩的参数估计, 评价拟合效果和设计值的计算偏差, 并与普通线性矩法拟合结果进行比较分析。利用高阶线性矩和普通线性矩对陕北8个水文站洪水频率进行的分析表明: 随着阶数 η 的增大, 设计值的相对偏差值越小, 说明高阶线性矩法对洪峰序列的大洪水值拟合效果更好, 提高了设计值估算精度。因此, 高阶线性矩法是一种合理有效的洪水频率分析参数估计方法, 可为大重现期设计洪水值的计算提供依据。

关键词

设计洪水, 参数估计, 洪水设计值, 高阶线性矩, 广义极值分布

Copyright © 2018 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

洪水是我国最频繁和严重的自然灾害之一。洪水因暴雨形成, 具有突发性, 破坏性和危险性, 可以使村镇、城市及人民生命财产毁于一旦[1]。陕北地区洪水灾害严重且频繁, 修建水库和堤防等水利工程是必要的防洪措施。而推求设计洪水是防洪规划和建设的依据[2] [3]。洪水频率分析法是推求设计洪水的主要途径, 在分布函数给定的情况下, 参数估计是设计洪水计算的重要工作[4]。国内外学者在此方面进行了大量研究, 并相继提出了概率权重矩法、权函数法、线性矩法、极大似然法等参数估计方法。实际中, 理论频率曲线与实测大洪水点据在大重现期段拟合难以获得满意的结果。为了解决这一问题, 国外学者 Wang [5] [6], Pandey [7] [8], Deng [9] [10] 等先后进行了大洪水段的计算研究, 主要包括部分概率权重矩(Partial Probability Moments)法, 部分线性矩(Partial Linear Moments)法, 最小交互熵(Minimum Cross-Entropy)法等。这些方法认为小洪水值在设计洪水估算中具有滋扰行为, 可应用截取概率分布进行相对大洪水值的推求。研究结果显示, 在大洪水段取得较好的拟合效果, 但计算复杂。国内工程设计采用适线法, 通过调整参数或给定权重进行经验适线, 这些方法适线结果存在一定的主观性和经验性[11] [12] [13] [14]。20世纪90年代, 高阶线性矩法[15] (higher-order L-Moments)开始引入洪水分布参数计算, 通过提高线性矩阶数来改善大洪水段拟合效果, 使外延的大重现期设计洪水值精度得到提高, 且借助于计算机, 容易实现计算过程。

本文选用陕北地区8个水文站洪峰流量序列为例, 以高阶线性矩法进行洪水频率曲线拟合, 进而评价所得洪水频率曲线对序列拟合效果及设计值误差。

2. 高阶线性矩

高阶线性矩是高阶概率权重矩[16]的线性组合。给定样本容量为 n 的样本, $x_{i:n}$ 表示 n 个样本点中第 i 个由小到大的排序值, 变量服从 $F(x) = P(X \leq x)$ 分布。Hosking(1990)提出 $x_{i:n}$ 的数学期望为

$$E[X_{i:n}] = \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} \int_0^1 x(F) F^{i-1} (1-F)^{n-i} dF \quad (1)$$

高阶线性矩定义为

$$\lambda_1^\eta = E[X_{(\eta+1)(\eta+1)}] \quad (2)$$

$$\lambda_2^\eta = \frac{1}{2} E[X_{(\eta+2)(\eta+2)} - X_{(\eta+1)(\eta+2)}] \quad (3)$$

$$\lambda_3^\eta = \frac{1}{3} E \left[X_{(\eta+3)(\eta+3)} - 2X_{(\eta+2)(\eta+3)} + X_{(\eta+1)(\eta+3)} \right] \tag{4}$$

$$\lambda_4^\eta = \frac{1}{4} E \left[X_{(\eta+4)(\eta+4)} - 3X_{(\eta+3)(\eta+4)} + 3X_{(\eta+2)(\eta+4)} - X_{(\eta+1)(\eta+4)} \right] \tag{5}$$

式中： λ_1^η 表示样本容量为 $\eta+1$ 中最大变量的数学期望， λ_2^η 表示样本容量为 $\eta+2$ 中最大变量的数学期望， λ_3^η 表示样本容量为 $\eta+3$ 中最大变量的数学期望， λ_4^η 表示样本容量为 $\eta+4$ 中最大变量的数学期望。

当 $\eta=0$ 时，高阶线性矩转化为普通线性矩(Hosking, 1990)。随着 η 增高，高阶线性矩对随机变量的较大值更为依赖。高阶线性矩的变差系数 τ_2^η ，偏态系数 τ_3^η 和峰态系数 τ_4^η 分别为

$$\tau_2^\eta = \frac{\lambda_2^\eta}{\lambda_1^\eta} \tag{6}$$

$$\tau_3^\eta = \frac{\lambda_3^\eta}{\lambda_2^\eta} \tag{7}$$

$$\tau_4^\eta = \frac{\lambda_4^\eta}{\lambda_2^\eta} \tag{8}$$

给定一个排序样本 $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ ，高阶线性矩的估计量分别为

$$\hat{\lambda}_1^\eta = \frac{1}{n C_{\eta+1}} \sum_{i=1}^n {}^{i-1}C_\eta x_{(i)} \tag{9}$$

$$\hat{\lambda}_2^\eta = \frac{1}{2} \frac{1}{n C_{\eta+2}} \sum_{i=1}^n ({}^{i-1}C_{\eta+1} - {}^{i-1}C_\eta {}^{n-i}C_1) x_{(i)} \tag{10}$$

$$\hat{\lambda}_3^\eta = \frac{1}{3} \frac{1}{n C_{\eta+3}} \sum_{i=1}^n ({}^{i-1}C_{\eta+2} - 2{}^{i-1}C_{\eta+1} {}^{n-i}C_1 + {}^{i-1}C_\eta {}^{n-i}C_2) x_{(i)} \tag{11}$$

$$\hat{\lambda}_4^\eta = \frac{1}{4} \frac{1}{n C_{\eta+4}} \sum_{i=1}^n ({}^{i-1}C_{\eta+3} - 3{}^{i-1}C_{\eta+2} {}^{n-i}C_1 + 3{}^{i-1}C_{\eta+1} {}^{n-i}C_2 - {}^{i-1}C_\eta {}^{n-i}C_3) x_{(i)} \tag{12}$$

$${}^n C_i = \frac{n!}{i!(n-i)!} \tag{13}$$

3. 广义极值分布及其高阶线性矩

广义极值分布(Generalized extreme value distribution, GEV)的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} \exp \left\{ - \left[1 - \frac{k}{\alpha} (x - \xi) \right]^{\frac{1}{k}} \right\}; & k \neq 0 \\ \exp \left\{ - \exp \left[- \frac{1}{\alpha} (x - \xi) \right] \right\}; & k = 0 \end{cases} \tag{14}$$

其逆函数形式为

$$x(F) = \begin{cases} \xi + \frac{\alpha}{k} \left[1 - (-\ln F)^k \right]; & k \neq 0 \\ \xi - \alpha \ln(-\ln F); & k = 0 \end{cases} \tag{15}$$

式中： k 为形状参数， α 为尺度参数， ξ 为位置参数。

当 $k \neq 0$ 时, 即为 Hosking (1985) [17] 给出的 GEV 分布概率权重矩(PWM)

$$\beta_r = \int_0^1 x(F) F^r dF \tag{16}$$

把式(14)和式(15)代入式(16), 可推出

$$(r+1)\beta_r = \xi + \frac{\alpha}{k} \left[1 - \Gamma(1+k)(r+1)^{-k} \right] \tag{17}$$

当 $k = 0$ 时, 式(14)为 EVI 型分布(Gumbel 分布)。Greenwood (1979) [18] 给出了 GEV 分布的 PWM

$$(r+1)\beta_r = \xi + \alpha \left[\varepsilon + \ln(r+1) \right] \tag{18}$$

式中, $\varepsilon = 0.5772156649\dots$ 为欧拉常数。

将式(17)代入式(1)~式(5), 可推出 $k \neq 0$ 时, 前 4 阶线性矩分别为

$$\lambda_1^\eta = \xi + \frac{\alpha}{k} \left[1 - \Gamma(1+k)(\eta+1)^{-k} \right] \tag{19}$$

$$\lambda_2^\eta = \frac{(\eta+2)\alpha\Gamma(1+k)}{2!k} \left[-(\eta+2)^{-k} + (\eta+1)^{-k} \right] \tag{20}$$

$$\lambda_3^\eta = \frac{(\eta+3)\alpha\Gamma(1+k)}{3!k} \left[-(\eta+4)(\eta+3)^{-k} + 2(\eta+3)(\eta+2)^{-k} - (\eta+2)(\eta+1)^{-k} \right] \tag{21}$$

$$\lambda_4^\eta = \frac{(\eta+4)\alpha\Gamma(1+k)}{4!k} \left[-(\eta+6)(\eta+5)(\eta+4)^{-k} + 3(\eta+5)(\eta+4)(\eta+3)^{-k} - 3(\eta+4)(\eta+3)(\eta+2)^{-k} + (\eta+3)(\eta+2)(\eta+1)^{-k} \right] \tag{22}$$

同样, 将式(18)代入式(1)~式(5), 可推出 $k = 0$ 时, 前 4 阶线性矩分别为

$$\lambda_1^\eta = \xi + \alpha \left[\varepsilon + \ln(\eta+1) \right] \tag{23}$$

$$\lambda_2^\eta = \frac{(\eta+2)\alpha}{2!} \left[\ln(\eta+2) - \ln(\eta+1) \right] \tag{24}$$

$$\lambda_3^\eta = \frac{(\eta+3)\alpha}{3!} \left[(\eta+4)\ln(\eta+3) - 2(\eta+3)\ln(\eta+2) + (\eta+2)\ln(\eta+1) \right] \tag{25}$$

$$\lambda_4^\eta = \frac{(\eta+4)\alpha}{4!} \left[(\eta+6)(\eta+5)\ln(\eta+4) - 3(\eta+5)(\eta+4)\ln(\eta+3) + 3(\eta+4)(\eta+3)\ln(\eta+2) - (\eta+3)(\eta+2)\ln(\eta+1) \right] \tag{26}$$

给定一个样本, 由式(21), 式(20), 式(24), 式(25)和式(7)可推出

$$k = a_0 + a_1 \left[\tau_3^\eta \right] + a_2 \left[\tau_3^\eta \right]^2 + a_3 \left[\tau_3^\eta \right]^3 + a_4 \left[\tau_3^\eta \right]^4 \tag{27}$$

取 k 为 $-0.5 \leq k \leq 0.5$, 分别令 $\eta = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, 计算各阶取值对应的 τ_3^η 值, 按照(27)拟合曲线, 求得式(27)的系数, 如表 1 所示。

应用式(10)和式(11)计算 τ_3^η , 根据表 1 系数, 由式(27)计算参数 k 的估计值 \hat{k} 。利用式(20)计算参数 α 的估计值 $\hat{\alpha}$ ($\hat{k} \neq 0$)为

$$\hat{\alpha} = \frac{\lambda_2^\eta \times \hat{k} \times 2!}{\Gamma(1+\hat{k})(\eta+2) \left(-(\eta+2)^{-\hat{k}} + (1+\eta)^{-\hat{k}} \right)} \tag{28}$$

由式(19)和式(28)可推出参数 ξ 的估计值 $\hat{\xi} (\hat{k} \neq 0)$ 为

$$\hat{\xi} = \hat{\lambda}_1^\eta - \frac{\hat{\alpha}}{\hat{k}} \left(1 - \Gamma(1 + \hat{k})(\eta + 1)^{-\hat{k}} \right) \tag{29}$$

4. 实例应用

采用陕西省交口河、张家山、赵石窖、绥德、刘家河等 8 个水文测站的年最大洪峰资料，经分析，资料满足一致性要求，研究 GEV 型分布的高阶线性矩法进行洪水序列大洪水段的拟合，资料的基本概况如表 2 所示。

4.1. 绘制频率曲线

根据表 2 结果，由式(15)计算洪水设计值，利用期望公式(30)估计经验频率，其表达式为

$$P = \frac{m}{n+1} \times 100 \tag{30}$$

式中， P 为频率， m 为系列样本中的第 m 项， n 为系列样本中的总数。

根据以上计算成果，绘制各站不同阶线性矩的 GEV 分布理论频率曲线拟合图，详见图 1。

根据拟合的频率曲线图，对各站不同阶线性矩法进行比较，分析理论频率曲线与经验点据的拟合情况。由图 1 可以看出，在 $P = 0 \sim 50\%$ 的频率区间，8 个测站均随着线性矩阶数的增大，理论频率曲线和经验点据的拟合

Table 1. Coefficients a_0, a_1, a_2, a_3 and a_4 for Eq. (27)

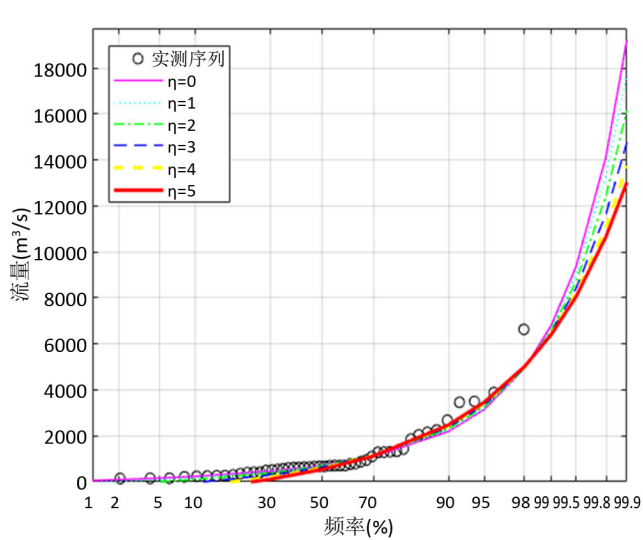
表 1. 式(27)的拟合系数 a_0, a_1, a_2, a_3 和 a_4

η	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4
0	0.2838	-1.7965	0.8200	-0.4821	0.1966
1	0.4814	-2.1433	0.7521	-0.3299	0.1027
2	0.5910	-2.3338	0.6658	-0.2387	0.0632
3	0.6616	-2.4548	0.5898	-0.1798	0.0419
4	0.7111	-2.5387	0.5266	-0.1397	0.0293
5	0.7479	-2.6002	0.4743	-0.1114	0.0213

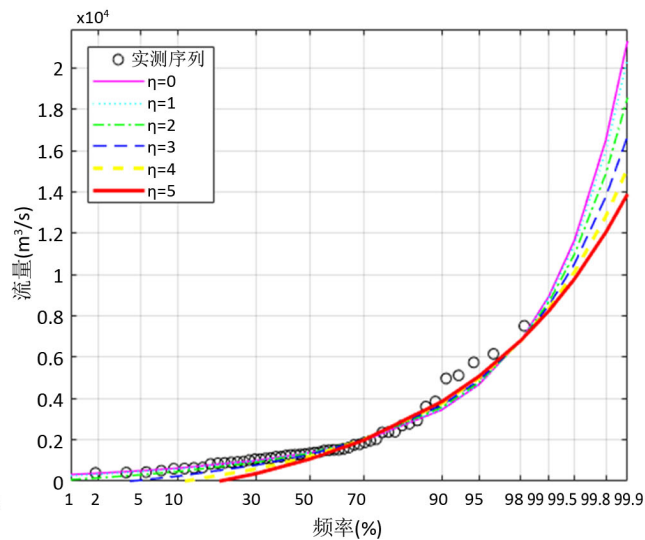
Table 2. Comparison of quantile errors using different orders L-Moments

表 2. 不同阶线性矩法的设计值偏差比较

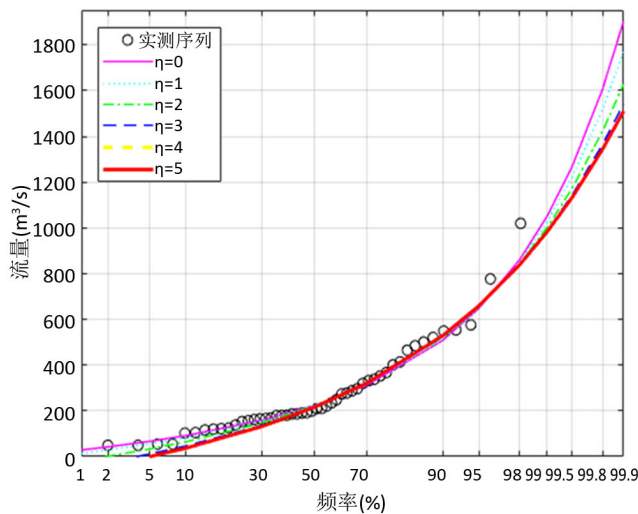
站名	资料长度	η					
		0	1	2	3	4	5
交口河	48	0.034	0.0302	0.0256	0.0216	0.0189	0.0172
张家山	53	0.0129	0.012	0.0097	0.0075	0.0059	0.005
赵石窖	50	0.0049	0.0043	0.0035	0.003	0.0029	0.0029
绥德	36	0.0058	0.0033	0.002	0.0013	0.001	0.0008
刘家河	45	0.0269	0.0236	0.0182	0.0134	0.01	0.0079
张村译	39	0.0102	0.007	0.0056	0.0052	0.0052	0.0054
林家村	48	0.0051	0.0028	0.002	0.0017	0.0015	0.0014
神木	48	0.0093	0.0041	0.0019	0.001	0.0007	0.0005



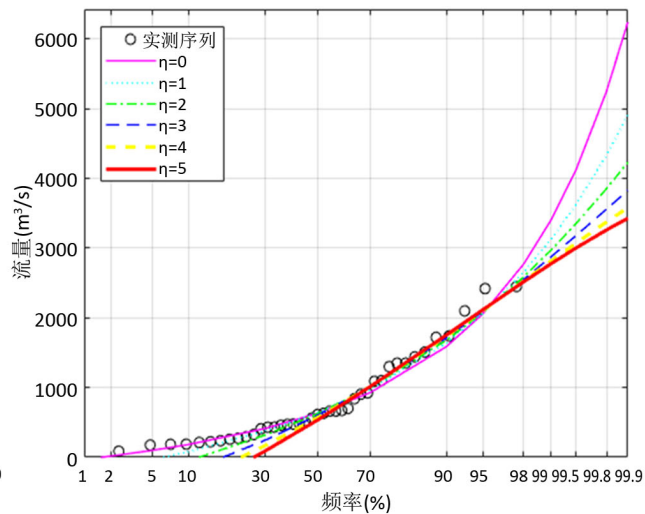
(a) 交口河



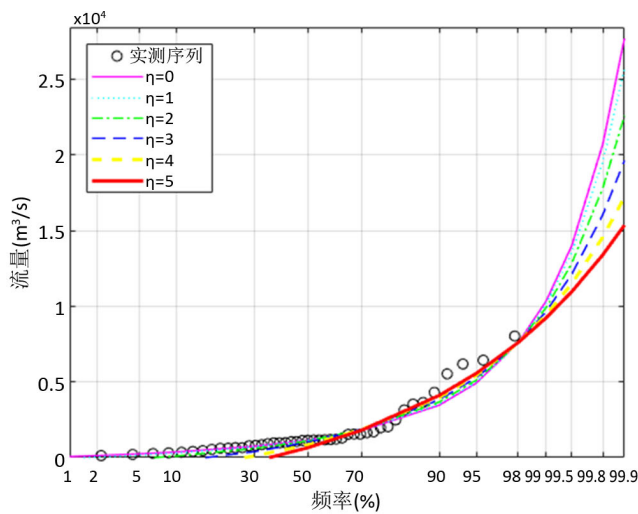
(b) 张家山



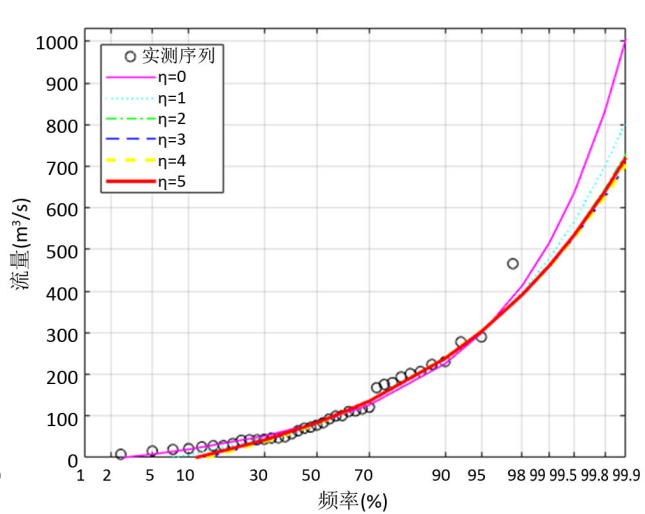
(c) 赵石窖



(d) 绥德



(e) 刘家河



(f) 张村译

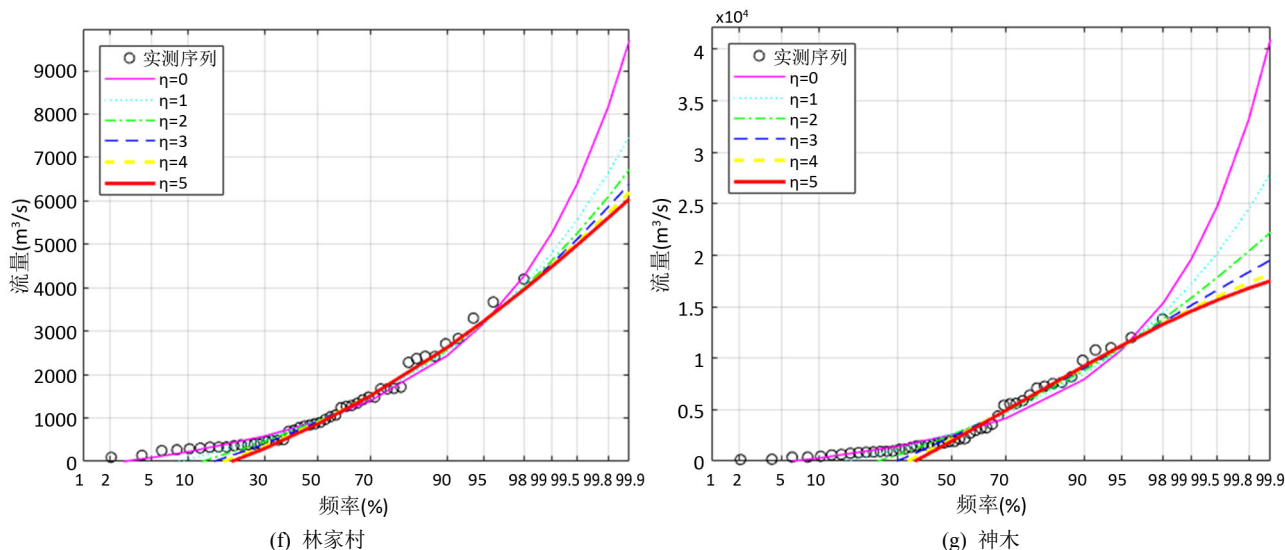


Figure 1. Fitting of the GEV distribution to annual maximum flows for different orders L-Moments

图 1. 年最大洪峰序列各阶线性矩频率曲线拟合图

效果不显著；在 $P = 50\% \sim 99\%$ 的频率区间，8 个测站均随着线性矩阶数的增大，理论频率曲线和经验点据的拟合效果得到显著改善，说明本方法计算大重现设计洪水值的偏差小。因此，从实测序列值拟合结果可知，采用高阶线性矩法进行拟合计算时，大洪峰段取得较好的拟合效果。

4.2. 拟合效果分析

应用累积相对偏差平方和 δ 分析上述不同阶线性矩法对经验点据的拟合效果。式(31)为 $P = 50\% \sim 98\%$ 时，对应实测值与设计值累积偏差平方和的计算公式。

$$\delta = \sum_{i=i|P=50\%}^{i|P=98\%} \left(\frac{x_i - \hat{x}_i}{x_i} \right)^2 \quad (31)$$

式中： x_i 为实测值； \hat{x}_i 为设计值。计算结果如表 2 所示。

由表 2 看出，除了张村译站以外，其余 7 个站点的 δ 均随着线性矩阶数 η 的升高而减小，即大洪水段实测值与设计值之间的偏差逐渐减小，说明大重现期设计值在阶数较高时与实测值更为接近，这与图 1 中的拟合结果相一致。而张村译站，在 $\eta \leq 4$ 时，大洪水段实测值拟合效果与其它 7 站变化趋势相同，但 $\eta = 5$ 时，设计值估算偏差变大，说明并非 η 越大越好，即并非给与的权重越大越好，而是选择合适的 η 值，可提高设计值估算精度。所以，通过提高线性矩阶数的方式来拟合序列大洪水段是可行的，可为外延的大重现期设计值提供有利依据。

综合以上分析，在研究区大重现期设计值计算中，建议选用不超过 4 阶线性矩。

5. 结论

以陕北地区 8 个水文测站的年最大洪峰流量序列为例，以高阶线性矩法对洪峰序列进行参数估计，评价其拟合效果及设计值的偏差。结果表明，高阶线性矩法通过增大 η 值的方式来拟合大洪水值是可行的，且随着 η 的增大，大重现期设计值计算偏差越小，可为研究区防洪工程建设提供理论依据。但并非 η 越大越好，应选择合适的 η 值，可提高设计值估算精度。但高阶线性矩法还存在一定的问题，由于 P-III 型分布的逆函数无法表达为显式函数，推导 P-III 型分布参数与高阶线性矩法的关系式存在较大的困难。因此，在今后的研究中，应重点研究高阶线性矩法在 P-III 型分布参数估计中的应用研究。

参考文献

- [1] 李桃英. 陕西省灾害性洪水类型及成因分析[J]. 水文, 2004, 4(24): 39-42.
LI Taoying. The types of disastrous floods in Shaanxi Province and the concerned genetic analysis. Hydrology, 2004, 4(24):39-42. (in Chinese)
- [2] 刘攀, 郭生练, 闫宝伟, 李响, 陈璐. 再论分期设计洪水频率与防洪标准的关系[J]. 水力发电学报, 2011, 1(30): 187-192.
LIU Pan, GUO Shenglian, YAN Baowei, LI Xiang and CHEN Lu. Supplementary of relationship between seasonal flood frequency and flood control standard. Journal of Hydroelectric Engineering, 2011, 1(30): 187-192.
- [3] 王俊珍, 宋松柏. 基于高阶线性矩法的洪水设计值研究[J]. 水力发电学报, 2014, 6(33): 33-42.
WANG Junzhen, SONG Songbai. Application of higher-order L-Moments for flood quantile estimation. Journal of Hydroelectric Engineering, 2014, 6(33): 33-42. (in Chinese)
- [4] 王俊珍, 宋松柏. 具有历史洪水资料的期望矩法参数估计研究[J]. 水力发电学报, 待刊.
WANG Junzhen, SONG Songbai. Expected moments algorithm method for parameters estimation with consideration of historical flood. Journal of Hydroelectric Engineering, in Press. (in Chinese)
- [5] WANG, Q. J. Estimation of the GEV distribution from censored samples by method of partial probability weighted moments. Journal of Hydrology, 1990, (120): 103-114. [https://doi.org/10.1016/0022-1694\(90\)90144-M](https://doi.org/10.1016/0022-1694(90)90144-M)
- [6] WANG, Q. J. Using partial probability weighted moments to fit the extreme value distributions to censored samples. Water Resources Research, 1996, 32(6): 1767-1771.
- [7] PANDEY, M. D. Extreme quantile estimation using order statistics with minimum cross-entropy principle. Engineering Mechanics, 2001, (16): 31-42.
- [8] PANDEY, M. D. Minimum cross-entropy method for extreme value estimation using peaks-over-threshold data. Structural Safety, 2001, (23): 345-363. [https://doi.org/10.1016/S0167-4730\(02\)00008-5](https://doi.org/10.1016/S0167-4730(02)00008-5)
- [9] DENG, J., PANDEY, M. D. Using partial probability weighted moments and partial maximum entropy to estimate quantile from censored samples. Engineering Mechanics, 2009, (24): 407-417.
- [10] DENG, J., PANDEY, M. D. Cross entropy quantile function estimation from censored samples using partial probability weighted moments. Journal of Hydrology, 2008, (363): 18-31.
- [11] 詹道江, 徐向阳, 陈元芳. 工程水文学[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2011.
ZHAN Daojiang, XU Xiangyang and CHEN Yuanfang. Engineering hydrology. Beijing: China Water Power Press, 2011. (in Chinese)
- [12] 董闯, 宋松柏. 群智能优化算法在水文频率曲线适线中的应用[J]. 水文, 2011, 31(2): 20-26.
DONG Chuang, SONG Songbai. Application of swarm intelligence optimization algorithm in optimization fitting of hydrologic frequency curve. Journal of China Hydrology, 2011, 31(2): 20-26. (in Chinese)
- [13] 谢平, 郑泽权. 水文频率计算有约束加权适线法[J]. 武汉水利电力大学学报, 2000, 33(1): 49-52.
XIE Ping, ZHENG Zequan. A constrained and weighted fitting method for hydrologic frequency calculation. Journal of Wuhan University of Hydraulic and Electric Engineering, 2000, 33(1): 49-52. (in Chinese)
- [14] 邓育仁, 丁晶, 韦雪艳. 水文计算中的模糊优化适线法[J]. 水电站设计, 1995, 11(4): 43-47.
DENG Yuren, DING Jing and WEI Xueyan. Fuzzy optimal curve fitting method in frequency analysis. Design of Hydroelectric Power Station, 1995, 11(4): 43-47. (in Chinese)
- [15] WANG, Q. J. LH moments for statistical analysis of extreme events. Water Resources Research, 1997, 33(12): 2841-2848. <https://doi.org/10.1029/97WR02134>
- [16] WANG, Q. J. Using higher probability weighted moments for flood frequency analysis. Journal of Hydrology, 1997, 194(1): 95-106. [https://doi.org/10.1016/S0022-1694\(96\)03223-4](https://doi.org/10.1016/S0022-1694(96)03223-4)
- [17] HOSKING, J. R. M., WALLIS, J. R. and WOOD, E. F. Estimation of the generalized extreme value distribution by the method of probability weighted moments. Technometrics, 1985, 27(3): 251-261. <https://doi.org/10.1080/00401706.1985.10488049>
- [18] GREENWOOD, J. A., LANDWEHR, J. M., MATALAS, N. C., et al. Probability weighted moments: Definition and relation to parameters of several distributions expressible in inverse form. Water Resources Research, 1979, 15(5): 1049-1054. <https://doi.org/10.1029/WR015i005p01049>