

Stress Field Near to an Elliptic Inclusion in a Piezoelectric Medium

Longchao Dai, Junjie Gong, Xiang Gu, Xinsong Li

College of Mechanical Engineering, Yangzhou University, Yangzhou
Email: dai_lc@163.com

Received: Nov. 1st, 2013; revised: Nov. 20th, 2013; accepted: Nov. 27th, 2013

Copyright © 2013 Longchao Dai et al. This is an open access article distributed under the Creative Commons Attribution License, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited. In accordance of the Creative Commons Attribution License all Copyrights © 2013 are reserved for Hans and the owner of the intellectual property Longchao Dai et al. All Copyright © 2013 are guarded by law and by Hans as a guardian.

Abstract: Piezoelectric material can be used in piezoelectric sensors and other fields. The problem of its stress field distribution in the zone of stress concentration has received widespread attention due to its brittleness. This paper presents an analytical solution for an elliptical anisotropic piezoelectric inclusion embedded in an infinite anisotropic piezoelectric matrix subjected to arbitrary far-field uniform loadings by employing the Stroh formalism, the method of analytical continuation, the technique of conformal mapping, and the concept of superposition. Solutions of the temperature and stress functions either in the matrix or in the inclusion are expressed in complex matrix notation. It shows that mechanic loading and electric loading lead to the appearance of the constant stress fields in the inclusion and heat flux only leads to that of the linear stress fields. Comparison with some related works shows that the present solutions are valid and general.

Keywords: Elliptical Inclusion; Piezoelectric Material; Stress Analysis

压电材料中椭圆形夹杂附近的应力场

戴隆超, 龚俊杰, 顾 乡, 李新松

扬州大学机械工程学院, 扬州
Email: dai_lc@163.com

收稿日期: 2013 年 11 月 1 日; 修回日期: 2013 年 11 月 20 日; 录用日期: 2013 年 11 月 27 日

摘 要: 压电材料在传感器件等多个领域有着广泛的用途。由于压电陶瓷材料非常脆, 因而其应力集中部位的应力场分布问题受到了广泛关注。本文采用 Stroh 公式法、解析连续方法、保角变换法和叠加法得到了任意远场均匀热电弹性载荷作用下, 椭圆形各向异性压电体内嵌于无限大各向异性压电基体中的解析解。以复矩阵的形式给出了基体和夹杂中的温度场和应力函数的解。结果表明应力载荷和电载荷将导致夹杂体中常应力场的出现, 而温度载荷将导致线性应力场的出现。与一些相关工作的比较表明本文的解是正确的和普遍的。

关键词: 椭圆夹杂; 压电材料; 应力分析

1. 引言

压电材料, 比如压电陶瓷材料等, 具有优越的力电性能, 广泛用作传感器件、信号发生器、测试计量

仪器、信号处理器等智能结构系统中的核心元件, 因而压电材料越来越为大家所瞩目。如通用电气公司将压电陀螺装在直径为 127 mm 的弹壳内作为炮射导弹

的制导装置。摩根马特劳克公司采用两种改进的 PZT 材料(PZT-4S 和 PZT-8M)用作超声功率、声纳和致动器件。另外, 压电复合材料、压电高聚物的制备及其力电性能也是研究的热点。

由于数学上的困难, 通常理论结果只能针对极为简化的力学模型得到求解, 但是因为可用作数值结果、有限元结果的检验基准, 甚至良好的理论模型可用于实验数据处理和试验结果的检验, 为实验提供理论分析模型, 所以对理论解的探索仍是具有重要意义的。获得压电结构的理论解对于相关智能结构的力电性能表征、力学行为分析、及破坏机理研究等问题仍具有显著的帮助作用。由于压电陶瓷材料通常都是非常脆的, 易于发生断裂破坏, 因此压电材料中应力集中部位附近的应力分布问题对于分析和解决压电结构破坏及结构设计问题具有重大意义, 引起了广泛关注。由于其理论与应用上的重要性, 椭圆形的孔和夹杂问题最为人所关注。许多研究工作采用各种方法探讨了无限大材料中含有椭圆孔或夹杂的问题, 如: Hwu 和 Ting^[1]、Ting 和 Yan^[2]以及 Hwu 和 Yen^[3]采用 Stroh 公式法分析了各向异性材料中含有椭圆孔或夹杂的问题; Sosa^[4]、Sosa^[5]、Gao 和 Fan^[6]以及 Dai、Guo 和 Wang^[7]基于复变函数法讨论了含有椭圆孔的横观各向同性压电体问题; Chung 和 Ting^[8]以及 Zhang、Qian 和 Tong^[9]运用 Stroh 公式法分析了各向异性压电材料中含有椭圆形孔洞的问题; Wang、Zhou 和 Zhou^[10]采用一种新的杂交有限元分析了含有椭圆孔的横观各向同性压电材料问题; Dai、Guo 和 She^[11]采用复变函数法探讨了含有椭圆形夹杂的横观各向同性压电体问题; Chao 和 Shen^[12]运用 Stroh 公式法分析了含有椭圆形各向异性夹杂的各向异性热弹性体问题。随着热压电材料在工程中日渐广泛的应用, 含有孔、裂纹或夹杂的热压电材料的温度场、电场和应力场的耦合问题越来越引起人们的关注。比如: Wang 和 Shen^[13]给出了无穷远处作用有纯热流情况下一个椭圆形夹杂内嵌于具有不同热、电、弹性特性的无限大基体中这一问题的解析解; Gao、Zhao 和 Wang^[14]给出了含有椭圆孔或裂纹的热压电体问题的精确解。然而, 就作者所知, 目前尚无文献给出热压电介质中含有热压电夹杂的温度、电场弹性场耦合问题的解析解。

本文分析了一个椭圆形各向异性压电体夹杂内

嵌于一个受有远场均匀任意载荷作用的各向异性压电基体中的普遍的二维问题。通过使用 Stroh 公式法、解析连续法、保角变换以及叠加法, 以复矩阵的形式给出了基体和夹杂体中的温度和应力场的解析表达式。并通过分析得到了夹杂体中应力场的特性。与相关工作的比较表明本文解是正确地。这一结果将可用于指导相关器件中压电材料结构的设计与应用。

2. 工程问题及理论分析模型

在一些器件中往往会将一根、或多根压电纤维内置于管线中以实现特定信号的测量与传输。在截面上一般管线的面积相比纤维而言会高出一个量级, 其中, 压电纤维起着承担测量与传输的作用, 基体起到为压电纤维提供较为稳定的工作环境以保护其正常工作的作用。此时, 对于压电体的力学性能与结构破坏而言, 结构的截面上的应力集中显得尤为重要。考虑到椭圆形及压电材料更具普遍意义, 可退化为其它形状及材料, 因而我们建立如图 1 所示的典型结构。这样的结构在压电复合材料结构及许多智能材料结构中也能见到。

由于基体尺寸远大于夹杂体, 因而不妨认为是一个无限大的基体中含有中心椭圆夹杂的问题, 且为使问题的求解具有较为普遍的意义, 不妨将基体与夹杂视为两种不同材料的热压电介质。结构中在远场处受到有均匀热流 q_1^∞, q_2^∞ 、均匀应力 $\sigma_{11}^\infty, \sigma_{12}^\infty, \sigma_{13}^\infty, \sigma_{21}^\infty, \sigma_{22}^\infty, \sigma_{23}^\infty$ 和均匀电位移 D_1^∞, D_2^∞ 的作用, 如图 1 所示, 分析这样一个含有椭圆形热压电夹杂的压电体结构中界面附近的应力分布问题。

3. 本问题的解

直角坐标系 (x_1, x_2, x_3) 中, 在不计体积力、自由电荷和热源的情况下热压电材料的本构方程为:

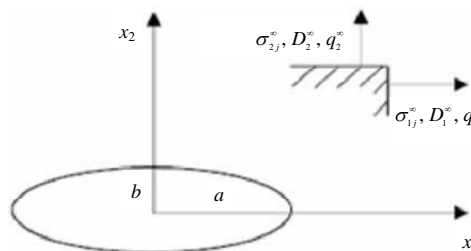


Figure 1. Structure diagram of the present model
图 1. 模型的结构示意图

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= c_{ijrs} \gamma_{rs} - e_{ijs} E_s - \beta_{ij} T \\ D_i &= e_{irs} \gamma_{rs} + \varepsilon_{is} E_s + \alpha_i T \\ q_i &= -k_{ij} T_{,j} \end{aligned} \quad (1)$$

平衡方程为

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad D_{i,i} = 0, \quad q_{i,i} = 0 \quad (2)$$

其中, $\gamma_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$, $E_i = -\varphi_{,i}$ 。下标的逗号表示微分, 并采用求和约定。 σ_{ij} , D_i , γ_{rs} , E_s , T , q_i , u_i , φ 分别表示应力、电位移、弹性变形、电场、温度、热流、弹性位移和电势; c_{ijrs} , e_{ijs} , ε_{ij} , β_{ij} , k_{ij} , α_i 分别表示弹性刚度、压电常数、介电常数、应力温度系数、导热系数和压电系数。

温度场可表示为:

$$T = 2 \operatorname{Re} [g'(z_\tau)], \quad z_\tau = x_1 + p_\tau x_2 \quad (3)$$

其中, Re 表示复函数的实数部分, g 是待定的复函数, 符号(')对相关量的微分, 热特征值 p_τ 可由下式确定:

$$k_{22} p_\tau^2 + 2k_{12} p_\tau + k_{11} = 0$$

则总热流 Q 可表示为:

$$Q = \int q_n ds = \int q_1 dx_2 - q_2 dx_1 = 2 \operatorname{Re} [ik_\tau g'(z_\tau)]$$

其中 $k_\tau = \sqrt{k_{11} k_{22} - k_{12}^2}$ 。

不妨将位移和应力函数表示为:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= 2 \operatorname{Re} [\mathbf{A} \mathbf{f}(z_\alpha) + \mathbf{c} \mathbf{g}(z_\tau)] \\ \phi &= 2 \operatorname{Re} [\mathbf{B} \mathbf{f}(z_\alpha) + \mathbf{d} \mathbf{g}(z_\tau)] \end{aligned} \quad (4)$$

其中

$$\begin{aligned} z_\alpha &= x_1 + p_\alpha x_2, \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4) \\ \sigma_{i1} &= -\phi_{i,2}, \quad \sigma_{i2} = \phi_{i,1} \quad (i = 1, 2, 3) \\ D_1 &= -\phi_{4,2}, \quad D_2 = \phi_{4,1}, \quad E_1 = -u_{4,1}, \quad E_2 = -u_{4,2} \\ \mathbf{A} &= \{A_{i\alpha}\} = [a_1, a_2, a_3, a_4], \\ \mathbf{B} &= \{B_{i\alpha}\} = [b_1, b_2, b_3, b_4]. \end{aligned}$$

在没有椭圆形夹杂的情况下基体中电弹性场的均匀解可表示为:

$$\begin{aligned} \phi^\infty &= \Pi_2^\infty x_1 - \Pi_1^\infty x_2 \\ \mathbf{u}^\infty &= \boldsymbol{\gamma}_1^\infty x_1 + \boldsymbol{\gamma}_2^\infty x_2 \end{aligned} \quad (5)$$

其中

$$\Pi_1^\infty = -\phi_{,2}^\infty = (\sigma_{11}^\infty, \sigma_{12}^\infty, \sigma_{13}^\infty, D_1^\infty)^\top$$

$$\Pi_2^\infty = \phi_{,1}^\infty = (\sigma_{21}^\infty, \sigma_{22}^\infty, \sigma_{23}^\infty, D_2^\infty)^\top$$

$$\boldsymbol{\gamma}_1^\infty = \mathbf{u}_{,1}^\infty = (\gamma_{11}^\infty, \gamma_{12}^\infty, 2\gamma_{13}^\infty, -E_1^\infty)^\top$$

$$\boldsymbol{\gamma}_2^\infty = \mathbf{u}_{,2}^\infty = (\gamma_{21}^\infty, \gamma_{22}^\infty, 2\gamma_{23}^\infty, -E_2^\infty)^\top$$

因为夹杂和基体之间被认为是沿着界面的完整粘结, 所以界面边界条件可以表示为:

$$\begin{aligned} T^{(M)} &= T^{(I)}, \quad Q^{(M)} = Q^{(I)}; \\ \mathbf{u}^{(M)} &= \mathbf{u}^{(I)}, \quad \phi^{(M)} = \phi^{(I)}, \end{aligned} \quad (6)$$

其中上标(M)和(I)分别表示基体和夹杂中的物理量。

3.1. 温度场

在不计椭圆夹杂的情况下, 基体在远场均匀热流作用下的解可表示为:

$$\hat{g}'_\infty(z_\tau) = h z_\tau = h(m_{1\tau} \zeta + m_{2\tau} \zeta^{-1}) \quad (7)$$

则相应的热流分量可表示为:

$$\begin{aligned} q_1^\infty &= ip_\tau k_\tau h - i \overline{p_\tau} k_\tau \overline{h} \\ q_2^\infty &= -ik_\tau h + ik_\tau \overline{h} \end{aligned} \quad (8)$$

求解上式得

$$h = \frac{q_1^\infty + \overline{p_\tau} q_2^\infty}{ik_\tau (p_\tau - \overline{p_\tau})} \quad (9)$$

现在来分析由于椭圆夹杂的出现而引起的基体和夹杂体中的扰动解 $\hat{g}(\zeta)$ 与 $\hat{g}_0(\zeta)$ 。在此情况下, 夹杂体中的函数是全纯的, 可以表示为:

$$\hat{g}'_0(z_\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e_k \zeta^k \quad (10)$$

其中,

$$e_{-k} = \Gamma_k e_k, \quad \Gamma_k = \left(\frac{a + ip_\tau b}{a - ip_\tau b} \right)^k$$

然后, 将式(7)~(10)代入边界条件(6)并化简求解可得:

$$\begin{aligned} \hat{g}(\zeta) &= \gamma \left(m_{1\tau} \ln \zeta + \frac{1}{2} m_{2\tau} \zeta^{-2} \right) \\ \hat{g}'_\infty(\zeta) &= \frac{h}{2} (m_{1\tau}^2 \zeta^2 + m_{2\tau}^2 \zeta^{-2}) \\ \hat{g}_0(\zeta) &= \frac{1}{2} m_{1\tau} e_1 \zeta^2 + \frac{1}{2} \Gamma_1 e_1 m_{2\tau} \zeta^{-2} \end{aligned} \quad (11)$$

其中

$$\gamma = -\left(hm_{2\tau} + \frac{k_{\tau 0} - k_{\tau}}{k_{\tau 0} + k_{\tau}} \overline{hm_{1\tau}} - \frac{2k_{\tau 0}}{k_{\tau 0} + k_{\tau}} \Gamma_1 e_1 \right)$$

$m_{1\tau}$ 与 $m_{2\tau}$ 为对此椭圆孔做保角变换的常数。

3.2. 电弹性场

基体中的应力函数可表示为:

$$\hat{f}^*(\zeta) = \hat{f}(\zeta) + \delta \ln \zeta \quad (12)$$

其中 $\hat{f}(\zeta)$ 是 ζ 空间中单位园孔外的全纯函数。夹杂体内的应力函数可表示为:

$$\hat{f}_0(\zeta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \lambda_k \zeta^k \quad (13)$$

其中

$$\lambda_{-k} = \mathbf{G}_k \lambda_k, \quad \mathbf{G}_k = \langle \langle \mathbf{G}_{\alpha k} \rangle \rangle,$$

$$\mathbf{G}_{\alpha k} = \begin{pmatrix} a + ip_{\alpha} b \\ a - ip_{\alpha} b \end{pmatrix}^k$$

其中双括号表示对角阵。

在没有夹杂的情况下，均匀问题的应力函数解为:

$$f_{\infty}(\zeta) = \mathbf{B}^T \mathbf{u}^{\infty} + \mathbf{A}^T \phi^{\infty} \quad (14)$$

其中

$$\phi^{\infty} = \Pi_2^{\infty} x_1 - \Pi_1^{\infty} x_2$$

$$\mathbf{u}^{\infty} = \gamma_1^{\infty} x_1 + \gamma_2^{\infty} x_2$$

考虑到基体中的应力和位移必须满足单值条件，有

$$\delta = \mathbf{B}^T (\overline{c\gamma m_{1\tau}} - c\gamma m_{1\tau}) + \mathbf{A}^T (\overline{d\gamma m_{1\tau}} - d\gamma m_{1\tau}) \quad (15)$$

将(34)、(36)~(42)带入边界条件(6)化简可得

$$-\mathbf{K}_2^T \hat{f}(\zeta) = -\sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{G}_k \lambda_k \zeta^{-k} + \zeta^{-1} (\mathbf{B}_0^T \overline{\mathbf{K}_\gamma} + \mathbf{A}_0^T \overline{\mathbf{K}_\Pi})$$

$$+ \zeta^{-2} (\mathbf{B}_0^T \overline{\mathbf{K}_c} + \mathbf{A}_0^T \overline{\mathbf{K}_d}) \quad (16)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\mathbf{K}_1 \overline{\mathbf{G}_k \lambda_k} + \mathbf{K}_2 \lambda_k) \zeta^k$$

$$= \zeta (\mathbf{B}^T \mathbf{K}_\gamma + \mathbf{A}^T \mathbf{K}_\Pi) + \zeta^2 (\mathbf{B}^T \mathbf{K}_c + \mathbf{A}^T \mathbf{K}_d)$$

其中

$$\mathbf{K}_\gamma = \frac{a\gamma_1^{\infty} - ib\gamma_2^{\infty}}{2}$$

$$\mathbf{K}_c = \left(\mathbf{c} \frac{hm_{1\tau}^2}{2} + \overline{\mathbf{c}} \frac{\overline{hm_{2\tau}^2} + \overline{\gamma m_{2\tau}}}{2} \right) - \left(\mathbf{c}_0 \frac{m_{1\tau} e_1}{2} + \overline{\mathbf{c}_0} \frac{\overline{\Gamma_1 m_{2\tau} e_1}}{2} \right)$$

$$\mathbf{K}_\Pi = \frac{a\Pi_2^{\infty} + ib\Pi_1^{\infty}}{2}$$

$$\mathbf{K}_d = \left(\mathbf{d} \frac{hm_{1\tau}^2}{2} + \overline{\mathbf{d}} \frac{\overline{hm_{2\tau}^2} + \overline{\gamma m_{2\tau}}}{2} \right)$$

$$- \left(\mathbf{d}_0 \frac{m_{1\tau} e_1}{2} + \overline{\mathbf{d}_0} \frac{\overline{\Gamma_1 e_1 m_{2\tau}}}{2} \right)$$

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{B}^T \overline{\mathbf{A}_0} + \mathbf{A}^T \overline{\mathbf{B}_0}$$

$$\mathbf{K}_2 = \mathbf{B}^T \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}^T \mathbf{B}_0$$

由方程(16)和(17)可得:

$$\lambda_k = \mathbf{0} \quad \text{for } k \neq \pm 1 \text{ or } \pm 2$$

$$\lambda_1 = (\mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_1 \overline{\mathbf{G}_1 \mathbf{K}_2^{-1} \mathbf{K}_1 \mathbf{G}_1})^{-1}$$

$$\times (\mathbf{B}^T \mathbf{K}_\gamma + \mathbf{A}^T \mathbf{K}_\Pi - \mathbf{K}_1 \overline{\mathbf{G}_1 \mathbf{K}_2^{-1}} (\overline{\mathbf{B}^T \mathbf{K}_\gamma} + \overline{\mathbf{A}^T \mathbf{K}_\Pi}))$$

$$\lambda_2 = (\mathbf{K}_2 - \mathbf{K}_1 \overline{\mathbf{G}_2 \mathbf{K}_2^{-1} \mathbf{K}_1 \mathbf{G}_2})^{-1}$$

$$\times (\mathbf{B}^T \mathbf{K}_c + \mathbf{A}^T \mathbf{K}_d - \mathbf{K}_1 \overline{\mathbf{G}_2 \mathbf{K}_2^{-1}} (\overline{\mathbf{B}^T \mathbf{K}_c} + \overline{\mathbf{A}^T \mathbf{K}_d}))$$

将上面三式带入方程(16)可得到 $\hat{f}(\zeta)$ 的解。这样就可以得到应力和电位移的解。可以看出 λ_1 仅取决于远场应力和电位移载荷，而 λ_2 仅取决于远场热流载荷。故将相关结果代入式(4.2)即可得到夹杂体中的广义应力函数表达式

$$\phi^0(z_\alpha) = 2 \operatorname{Re} \left(\mathbf{B}_0 \lambda_1 \frac{z_\alpha}{m_{1\alpha}} + \mathbf{B}_0 \lambda_2 \left(\frac{z_\alpha^2}{m_{1\alpha}^2} - \frac{2m_{2\alpha}}{m_{1\alpha}} \right) \right) \quad (17)$$

$$+ \mathbf{d}_0 e_1 \left(\frac{z_\tau^2}{m_{1\tau}} - 2m_{2\tau} \right)$$

因此，在只有均匀应力场和电位移作用的情况下可以看到夹杂体中的应力场是常数，而只有远场均匀热流载荷作用时将会引起夹杂体内的应力场呈线性变化。

对于远场均匀热流作用下的含有椭圆夹杂的各向异性弹性材料而言，有

$$\mathbf{K}_\gamma = \mathbf{K}_\Pi = \mathbf{0}.$$

$$\lambda_1 = \mathbf{0}.$$

因此(18)变为

$$\frac{d\phi^0}{dz_\alpha} = 2 \operatorname{Re} \left(\mathbf{B}_0 \lambda_2 \frac{2z_\alpha}{m_{1\alpha}^2} + d_0 e_1 \frac{2z_\tau}{m_{1\tau}} \right).$$

上面的解与 Chao 和 Shen^[12]中所给出的结果完全一致，而他们所给的解只是本文解的特殊情况。这表明本文解是正确地。

4. 结果与讨论

在余下的数值算例中，采用直角坐标系来考查一个含有椭圆夹杂的横观各向同性压电介质，并且该介质沿 X_3 轴方向极化。因为离面位移与面内位移不耦合，我们将关注 $X_1 \sim X_3$ 平面。针对基体材料与夹杂体材料完全相同的这种较为简单的情况给出相应计算结果，为便于比较，基体的材料特性被取成与 Gao、Zhao 和 Wang^[14]一文一致。

图 2、3 给出了远场均匀拉应力或电位移载荷作用下界面上环向应力和电位移的分布情况，其中 t 是形状因子，并且 $t = b/a$ 。正如我们所预想的，当夹杂体和基体是同一种材料时，本问题将退化为均匀材料的情况。通过比较本文解和均匀材料解容易看到本文解是正确地。

5. 结论

本文得到了任意远场均匀载荷作用下一个椭圆

形夹杂内嵌于一无限大基体中时的解析解，基体和夹杂都是一般各向异性压电材料。获得了基体和夹杂体中的温度场和应力函数的解。结果表明，当只有应力载荷和电载荷作用时夹杂体中只出现常应力场，而当只有温度载荷作用时夹杂体中将出现线性应力场。与相关工作的比较表明本文解是正确的。这一结果将有助于相关压电结构的机电性能表征、力学行为分析、

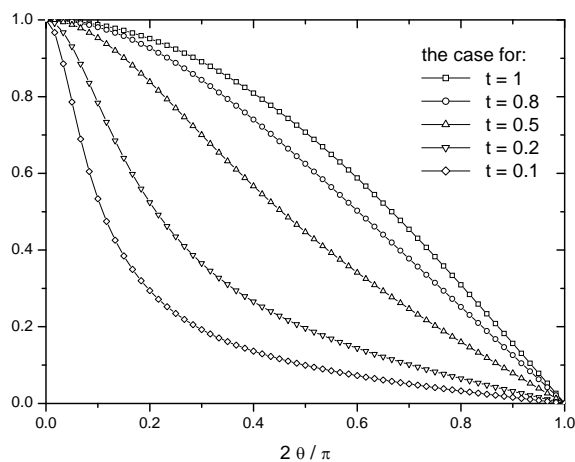


Figure 3. Distributions of the normalized tangential electric displacement $D_\theta/D_{y,\infty}$ on the interface when only electric displacement is loaded on the far field and the material of inclusion is the same as that of matrix

图 3. 远场仅有电位移载荷 D_y^∞ 作用下，当夹杂体材料与基体相同时，无量纲化的环向电位移 $D_\theta/D_{y,\infty}$ 在界面上的分布情况

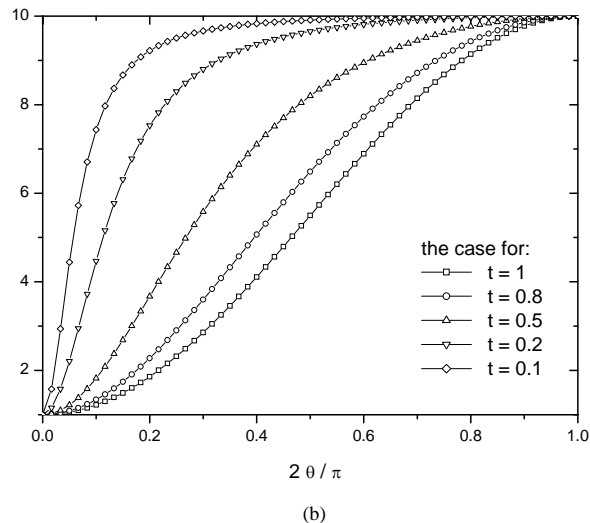
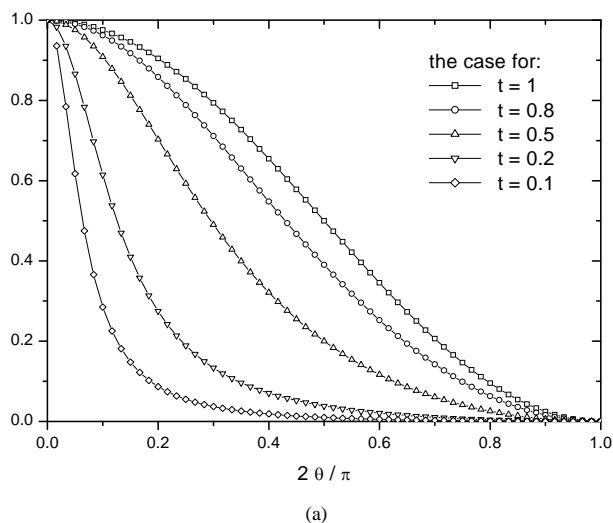


Figure 2. Distributions of the normalized tangential stress $\sigma_\theta/\sigma_y^\infty$ on the interface for the case: (a) $\sigma_x^\infty:\sigma_y^\infty:\sigma_{xy}^\infty = 0:1:0$; (b) $\sigma_x^\infty:\sigma_y^\infty:\sigma_{xy}^\infty = 10:1:0$ when only tension is loaded on the far field and the material of inclusion is the same as that of matrix

图 2. 远场拉伸载荷作用下，当夹杂体材料与基体相同时，无量纲化的环向应力 $\sigma_\theta/\sigma_y^\infty$ 在界面上的分布情况：(a) $\sigma_x^\infty:\sigma_y^\infty:\sigma_{xy}^\infty = 0:1:0$ ；(b) $\sigma_x^\infty:\sigma_y^\infty:\sigma_{xy}^\infty = 10:1:0$

及破坏机理等问题的彻底解决，并可用于指导压电材料结构的设计。

参考文献 (References)

- [1] Hwu, C. and Ting, T.C.T. (1989) Two-dimensional problems of the anisotropic elastic solids with an elliptic inclusion. *Quarterly Journal Mechanics Applied Mathematics*, **42**, 553-572.
- [2] Ting, T.C.T. and Yan, G. (1991) The anisotropic elastic solid with an elliptic hole or rigid inclusion. *International Journal Solids Structures*, **27**, 1879-1894.
- [3] Hwu, C. and Yen, W. (1993) On the anisotropic elastic inclusions in plane elastostatics. *ASME Journal Applied Mechanics*, **60**, 626-632.
- [4] Sosa, H. (1991) Plane problems in piezoelectric media with defects. *International Journal Solids Structures*, **28**, 491-505.
- [5] Sosa, H. and Khutoryansky, A. (1996) New developments concerning piezoelectric materials with defects. *International Journal Solids Structures*, **33**, 3399-3414.
- [6] Gao, C. and Fan, W. (1999) Exact solutions for the plane problem in piezoelectric materials with an elliptic or a crack. *International Journal Solids Structures*, **36**, 2527-2540.
- [7] Dai, L., Guo, W. and Wang, X. (2006) Stress concentration at an elliptic hole in transversely isotropic piezoelectric solids. *International Journal Solids Structures*, **43**, 1818-1831.
- [8] Chung, M.Y. and Ting, T.C.T. (1996) Piezoelectric solid with an elliptic inclusion or hole. *International Journal Solids Structures*, **33**, 3343-3361.
- [9] Zhang, T., Qian, C. and Tong, P. (1998) Linear electro-elastic analysis of a cavity or a crack in a piezoelectric material. *International Journal Solids Structures*, **35**, 2121-2149.
- [10] Wang, X., Zhou, Y. and Zhou, W. (2004) A novel hybrid finite element with a hole for analysis of plane piezoelectric medium with defects. *International Journal Solids Structures*, **41**, 7111-7128.
- [11] Dai, L., Guo, W. and She, C. (2005) Plane strain problem of piezoelectric solid with elliptic inclusion. *Applied Mathematics Mechanics*, **26**, 1615-1622.
- [12] Chao, C.K. and Shen, M.H. (1998) Thermal stresses in a generally anisotropic body with an elliptic inclusion subject to uniform heat flow. *ASME Journal Applied Mechanics*, **65**, 51-58.
- [13] Wang, X. and Shen, Y. (2001) A solution of the elliptic piezoelectric inclusion problem under uniform heat flux. *International Journal Solids Structures*, **38**, 2503-2516.
- [14] Gao, C., Zhao, Y. and Wang, M. (2002) An exact and explicit treatment of an elliptic hole problem in thermopiezoelectric media. *International Journal Solids Structures*, **39**, 2665-268.