

Optimal Control Strategy of Chang'e-3 Main Reduce Phase and Quick Adjustment Phase

Jingjing Zhang^{1,2}, Yunlong Fei¹, Lifei Zheng^{1*}

¹Department of Applied Mathematics, Northwest A&F University, Yangling Shaanxi

²School of Mathematical Sciences, Zhejiang University, Hangzhou Zhejiang

Email: *zhenglifei@126.com

Received: Aug. 4th, 2016; accepted: Aug. 22nd, 2016; published: Aug. 25th, 2016

Copyright © 2016 by authors and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

Abstract

To study the optimal control strategy of the main reduction phase and quick adjustment phase in the process of Chang'e-3 soft landing, we established the optimal model for these two phases according to the Newton's second law. The error analysis and sensitivity analysis were made to show the efficiency of the method used in this paper.

Keywords

Chang'e-3 (CE-3), Main Reduction Phase, Quick Adjustment Phase, Optimal Control, Sensitivity Analysis

嫦娥三号主减速段和快速调整段 最优控制策略研究

张晶晶^{1,2}, 费云龙¹, 郑立飞^{1*}

¹西北农林科技大学应用数学系, 陕西 杨凌

²浙江大学数学科学学院, 浙江 杭州

Email: *zhenglifei@126.com

收稿日期: 2016年8月4日; 录用日期: 2016年8月22日; 发布日期: 2016年8月25日

*通讯作者。

摘要

研究嫦娥三号(CE-3)软着陆过程中的主减速段和快速调整段这两个阶段的最优控制策略, 根据牛顿第二定律, 建立针对这两个阶段的燃耗最优模型, 得到最优控制策略。误差分析和敏感性分析说明了本文所用方法的有效性。

关键词

嫦娥三号, 主减速阶段, 快速调整阶段, 最优控制, 敏感性分析

1. 引言

2013年12月14日, 嫦娥三号(CE-3)在月球表面实现软着陆, 这是1976年后人类探测器首次落月探测, 对人类科学考察月球资源、环境具有重大意义[1]-[3]。

CE-3的软着陆过程是指CE-3从近月点降落到月面的过程, 共分为6个阶段(图1):

- 1) 主减速段: 从距离月面15 km减少到3 km, 实现CE-3减速;
- 2) 快速调整段: 距月面3 km到2.4 km, 在2.4 km处将水平速度减为0 m/s, 期间调整姿态, 使发动机推力竖直向下;
- 3) 粗避障段: 距月面2.4 km到100 m, 主要避开大的陨石坑, 拍照获得数字高程图, 并初步确定落月地点;
- 4) 精避障段: 距月面100 m到30 m, CE-3拍照获得数字高程图, 确定最佳着陆地点;
- 5) 缓速下降段: 距月面30 m到4 m, 实现在距月面4 m处速度降为0 m/s;
- 6) 自由落体段: 距月面4 m到月面, 此阶段CE-3关闭发动机, 自由落体到精确的落月点。

以上6个阶段的研究方法都不尽相同, 其中主减速段和快速调整段主要实现了CE-3减速和姿态调整, 使CE-3基本调整到预定着陆点上方, 因此对这两个阶段的研究是对整个软着陆过程研究的关键内容。目前对软着陆过程的研究中, 和兴锁等[4]给出最优推力控制方向的计算公式, 周净扬等[5]将问题转化为两点边值问题, 利用Pontryagin极大值原理, 得到发动机推力的最优控制律。还有多名学者[6]利用Simulink

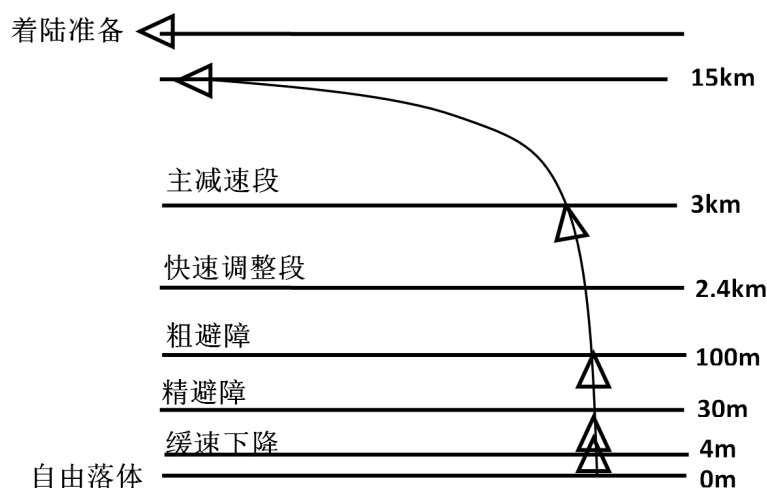


Figure 1. Chang'e-3 soft landing process

图 1. 嫦娥三号月球软着陆过程示意图

软件进行轨迹仿真，等等。这些方法都是针对软着陆整体过程进行研究的，忽略了软着陆不同阶段研究方法不尽相同的事实，没有对主减速段和快速调整段的进行专门研究。

本文针对 CE-3 软着陆的主减速段和快速调整段，基于牛顿第二定律，能耗最优原则，建立起这两个阶段 CE-3 的数学模型，给出针对两个阶段的最优控制策略。

2. 最优控制策略研究

最优控制策略是指达到能耗最少、轨道与实际最相符这两个目标的控制策略。文献[7]指出主减速段和快速调整段 CE-3 不仅受月球引力，而且也受自身多台发动机的推力。推力方向和大小会随实际需要做微小调整，引力方向和大小也会随着 CE-3 轨迹的变化有微小变动。为了简化问题，在实际情况允许的范围内，本文做出如下假设：

- (A1) 嫦娥三号在软着陆的主减速段和快速调整阶段的受力状态相同；
- (A2) 在主减速和快速调整阶段发动机推力 f 方向恒定，大小可变；
- (A3) 月球对 CE-3 的引力恒定(即：CE-3 所受重力恒定)；
- (A4) 不考虑月球自转对轨迹的影响。

文献[7]指出 CE-3 在主减速阶段的开始点速度方向水平，大小为近月速度。故这两个阶段 CE-3 做初速度水平，受恒力的类平抛运动，且水平方向 CE-3 所受合力方向与初速度方向相反，竖直方向 CE-3 所受合力指向月球。

由假设(A1)~(A4)和以上的分析，主减速段和快速调整段 CE-3 的受力分析见图 2。

图中发动机推力大小为 $f = v_e \dot{m}$ ，该力与水平方向夹角为 θ ， v_e 是比冲(单位米/秒)， \dot{m} 是单位时间燃料消耗(单位：公斤)。

由牛顿第二定律，对 CE-3 的受力沿水平 x 方向和竖直 y 方向分解，分别取水平向右和竖直向下为水平、竖直方向的正方向，有如下结果：

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -f \cos \theta \\ m\ddot{y} = mg - f \sin \theta \end{cases}$$

式中 m 是 CE-3 的质量，随时间 t 的增大而减少。

整理得：

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{\dot{m}}{m} v_e \cos \theta \\ \ddot{y} = g - \frac{\dot{m}}{m} v_e \sin \theta \end{cases}$$

根据假设(A2)， θ 方向不变。取 T 为经历这两个阶段共需要的时间，在区间 $[0, T]$ 上，沿 x 方向两次对 t 积分，有

$$v_x - v_{x_0} = -v_e \cos \theta \int_0^T \frac{\dot{m}}{m} dt$$

式中， v_x 为水平末速度 0， v_{x_0} 为水平初速度 $-v_0$ (v_0 方向与正方向相反，故符号取负)，由此得

$$v_0 = v_e \cos \theta \ln \frac{m_0}{m_T} \quad (1)$$

式中 m_T 表示这两个阶段结束后 CE-3 的质量，即：CE-3 的剩余质量。

在区间 $[0, T]$ 上，沿 y 方向两次对 t 积分，并用 H 表示这两个阶段的高度差，即 y 从 0 时刻的高度到

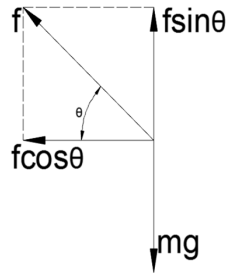


Figure 2. Force analysis of Chang'e-3 in the main reduction phase and quick adjustment phase

图 2. 嫦娥三号在主减速阶段和快速调整阶段受力分析

T 时刻的高度变化(高度由高到低的变化), 有

$$-H = \frac{1}{2} g T^2 - T \cdot v_e \sin \theta \ln \frac{m_0}{m_T}$$

即:

$$\ln \frac{m_0}{m_T} v_e \sin \theta = \frac{H}{T} + \frac{1}{2} g T \quad (2)$$

将式(1)平方后与式(2)平方后相加, 得:

$$\left(\ln \frac{m_0}{m_T} v_e \right)^2 = \left(\frac{H}{T} + \frac{1}{2} g T \right)^2 + v_0^2 \quad (3)$$

由于 $\frac{H}{T} + \frac{1}{2} g T \geq 2\sqrt{\frac{H}{T} \times \frac{1}{2} g T} = \sqrt{2Hg}$, 所以使等式右端取值最大的 T 值为 $T^* = \sqrt{\frac{2H}{g}} = 124.212 \text{ s}$, 此时嫦娥三号剩余质量 m_T 最大, 为

$$m_T = m_0 e^{-\frac{\sqrt{2Hg+v_0^2}}{v_e}} \quad (4)$$

式(4)就是针对主减速段和快速下降段所建立的燃耗最优模型。

3. 相关数据和参数的选取和计算

根据文献[7], 相关参数取值为: 初始速度 $v_0 = 1692 \text{ m/s}$, 初始质量 $m_0 = 2400 \text{ kg}$, 发动机比冲 $v_e = 2940 \text{ m/s}$, 主减速和快速下降段的高度差 $H = 12600 \text{ m}$, 月球表面重力加速度 $g = \frac{1}{6} \times 9.8 \text{ m/s}^2$ 。

代入参数值到模型(4)中, 求出最大剩余质量 $m_T = 1344.2 \text{ kg}$ 。

此时, 嫦娥三号的推力为 $f = v_e \times \dot{m} = v_e \times \left(\frac{m_0 - m_T}{T^*} \right) = 24989.95 \text{ m/s}$ 。根据假设(A2), 该力为恒力, 水平分力为 $f \cos \theta$ 亦为恒定值, 所以水平方向可以看做速度由 v_0 减为 0 的匀减速运动, 加速度 $a = \frac{v_0}{T^*} = 13.621 \text{ m/s}^2$, 由 $f \cos \theta = m_T a$, 得 $\theta = 42.885^\circ$ 。

故主减速和快速调整段的最优控制策略是发动机推力大小恒为 24989.95 N, 方向与轨迹方向相反且与水平方向夹角为 42.885° 。

4. 敏感性分析和误差检验

根据上述研究结果, 主减速阶段和快速调整阶段建立的数学模型是式(4)。在该模型中, 取月球表面

重力加速度 $g = \frac{9.8}{6} \text{ m/s}^2$ ，比冲 $v_e = 2940 \text{ m/s}$ ，主要讨论燃料初始质量 m_0 、主减速段初至快速调段末的高度差 H 、近月点的速度 v_0 三者在它们的估计值附近存在微小变化时对问题结论的影响[8]。

① 初始速度 v_0

固定 $m_0 = 2400 \text{ kg}$ ， $H = 12600 \text{ m}$ ，分析 v_0 的变化对最终剩余质量的影响，这时模型 1 变为

$$m_T = 2400e^{-\frac{\sqrt{41160+v_0^2}}{2940}}。$$

令参数 v_0 在估计值 1962 上下各改变 1% 和 5%，计算剩余燃料质量，数值结果见表 1。

m_T 随参数 v_0 变化的敏感度，记为 $S(m_T, v_0)$ 。代入相关参数值，模型(4)为：

$$m_T = 2400e^{-\frac{\sqrt{41160+v_0^2}}{2940}}$$

在 $v_0 = 1692$ 时， m_T 关于 v_0 的敏感度为：

$$S(m_T, v_0) = \left. \frac{dm_T}{dv_0} \cdot \frac{v_0}{m_T} \right|_{v_0=1692} = -0.571$$

它表明初始速度每降低 1% 将导致剩余燃料质量增加 0.571%，表明剩余燃料质量对初始速度的敏感性很低。

② 垂直高度 H

固定 $m_0 = 2400 \text{ kg}$ ， $v_0 = 1692 \text{ m/s}$ ，分析 H 的变化对 m_T 的影响。令参数 H 在估计值 $H = 12600 \text{ m}$ 上下各改变 1% 和 5%，分别估计剩余燃料质量，数值结果见表 2。

此时高度差与剩余燃料质量的关系为 $m_T = 2400e^{-\frac{\sqrt{H+2862864}}{2940}}$ ，所以在 $H = 12600 \text{ m}$ 附近， H 关于 m_T 的灵敏度为：

$$S(m_T, H) = \left. \frac{dm_T}{dH} \cdot \frac{H}{m_T} \right|_{H=12600} = -0.0048$$

结果表明，高度差每增加 1%，剩余燃料的质量减少 0.0048%，表明剩余燃料质量对高度差的敏感性非常低。

③ 初始质量 m_0

固定主减速阶段 $H = 12600 \text{ m}$ 、 $v_0 = 1692 \text{ m/s}$ ，分析 m_0 的变化对 m_T 的影响。此时，模型为 $m_T = 0.56m_0$ ，令参数 m_0 在估计值 2400 上下各改变 1% 和 5%，分别估计剩余燃料质量，得到数值如表 3。

此时 CE-3 初始质量与剩余质量的关系为 $m_T = 0.56m_0$ ，所以在 $m_0 = 2400$ 附近， m_0 。

关于 m_T 的灵敏度为：

$$S(m_T, v_0) = \left. \frac{dm_T}{dm_0} \cdot \frac{m_0}{m_T} \right|_{m_0=2400} = 0.999$$

结果表明，飞船初始质量每增加 1%，剩余燃料的质量增加 0.999%，说明剩余燃料质量对初始质量

Table 1. Sensitivity analysis of initial velocity v_0

表 1. 初始速度 v_0 敏感性分析

v_0	1607.4	1675.1	1692.0	1708.92	1776.6
m_T	1383.2	1352.0	1344.2	1336.6	1306.4
%	2.40	0.58	0	-0.57	-2.81

Table 2. Sensitivity analysis of vertical height H
表 2. 垂直高度 H 敏感性分析

H	11970	12474	12600	12726	13230
m_T	1344.5	1344.3	1344.2	1344.1	1344.0
%	0.022	0.007	0	-0.007	-0.014

Table 3. Sensitivity analysis of initial mass m_0
表 3. 初始质量 m_0 敏感性分析

m_0	2280	2376	2400	2424	2520
m_T	1276.8	1330.6	1344.2	1357.4	1370.9
%	-2.01	-1.01	0	0.98	1.98

的敏感性非常低。

另外, 模型 1 所得结论合理, 和文献[7]相关结论吻合, 可认为误差比较小, 相关结论是可靠的。

本文误差主要产生在假设部分, 假设(A2)认为发动机推力 f 方向恒定, 实际操作中 f 方向是有微小变化的, 故产生误差。具体误差大小还要在以后继续进行研究。

5. 结论

本文针对嫦娥三号主减速和快速下降这两个飞行阶段, 忽略了非重点因素的影响, 提出适当合理的假设, 构建了理论模型来解决燃耗最优问题。模型得出的最终结果与实际资料相吻合, 误差及敏感性分析的结果表明计算结果是可以接受的。但是, 本文在忽略了其它阶段的研究, 其进一步的工作还需要在将来的研究中继续进行。

基金项目

本文受到西北农林科技大学基本科研业务专项资金资助(No. 2014YB023), 西北农林科技大学博士科研启动项目资助(No.Z109021414), 西北农林科技大学本科优质课程建设项目资助(数学模型)及西北农林科技大学教改项目资助(No.JY1504078)。

参考文献 (References)

- [1] 欧阳自远, 李春来, 等. 深空探测的进展与我国深空探测的发展战略[J]. 中国航天, 2002, 12(2): 28-32.
- [2] 欧阳自远. 我国月球探测的总体科学目标与发展战略[J]. 地球科学进展, 2004, 19(3): 351-353.
- [3] 王宏, 黄勇, 潘敏. 基于地面测量的月球软着陆轨迹解算精度分析[C]//第二届全国航天飞行动力学研讨会会议文摘. 贵阳, 2013: 304-308.
- [4] 和兴锁, 林胜勇, 张亚峰. 月球探测器直接软着陆最优轨道设计[J]. 宇航学报, 2007, 28(2): 309-410.
- [5] 周净扬, 周获, 段广仁. 月球探测器软着陆最优轨道设计[C]. 程代展. 第 25 届中国控制会议论文集: 下册. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2006: 2226-2229.
- [6] 单永正, 段广仁, 张烽. 月球精确点软着陆轨道设计及初始点选取[J]. 宇航学报, 2009, 30(6): 2099-2100.
- [7] 中国新闻网. 嫦娥三号“落月”在即解密如何实现月球软着陆.
<http://www.cjnews.com/mil/2013/12-12/5608941.shtml>, 2013-12-12.
- [8] 刘来福, 黄海洋, 曾文艺. 数学模型与数学建模[M]. 北京: 北京师范大学出版社, 2010: 23-25.

期刊投稿者将享受如下服务：

1. 投稿前咨询服务 (QQ、微信、邮箱皆可)
2. 为您匹配最合适的期刊
3. 24 小时以内解答您的所有疑问
4. 友好的在线投稿界面
5. 专业的同行评审
6. 知网检索
7. 全网络覆盖式推广您的研究

投稿请点击：<http://www.hanspub.org/Submission.aspx>