

Research on Cooperative Strategy of Concentric Drum Activities

Yiqiang Yi, Fan Zhang, Yuqi Xie

College of Information and Intelligent Science and Technology, Hunan Agricultural University, Changsha Hunan
Email: 1270484925@qq.com

Received: Mar. 12th, 2020; accepted: Mar. 27th, 2020; published: Apr. 3rd, 2020

Abstract

In order to study the collaborative strategy of concentric drum activities, first of all, in the ideal state, before and after the collision between the volleyball and the drum is analyzed, based on the kinetic energy theorem and the law of conservation of momentum, a motion-to-motion model is established with the minimum team work as the angle. Then, in reality, it is difficult for multiple people to make forces at the same time. Based on the rigid body fixed axis rotation law on the original model, constant integrals are used to iteratively calculate the drum inclination angle at each interval in order to adjust the collaboration strategy in the original model.

Keywords

Collision, Force Analysis, Moment, Moment of Inertia

同心鼓活动协作策略的研究

易毅强, 张帆, 谢宇奇

湖南农业大学信息与智能科学技术学院, 湖南 长沙
Email: 1270484925@qq.com

收稿日期: 2020年3月12日; 录用日期: 2020年3月27日; 发布日期: 2020年4月3日

摘要

为了研究同心鼓活动协作策略问题。首先, 在理想状态下分析排球与鼓即将碰撞前和碰撞后, 基于动能定理和动量守恒定律, 以团队做功最小为角度建立一动一动模型。然后, 在现实情况下需要多人同时刻使力存在困难, 在原模型上以刚体定轴转动定律为基础, 采用定积分不断迭代计算出每个间隔的鼓面倾角, 从而去调整原模型中的协作策略。

关键词

碰撞, 受力分析, 力矩, 转动惯量

Copyright © 2020 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

“同心协力”(又称“同心鼓”)是一项团队协作能力拓展项目。该项目的道具是一面牛皮双面鼓, 鼓身中间固定多根绳子, 绳子在鼓身上的固定点沿圆周呈均匀分布, 每根绳子长度相同。团队成员每人牵拉一根绳子, 使鼓面保持水平。项目开始时, 球从鼓面中心上方竖直落下, 队员同心协力将球颠起, 使其有节奏地在鼓面上跳动。颠球过程中, 队员只能抓握绳子的末端, 不能接触鼓或绳子的其他位置。



Figure 1. Concentric drum illustration

图 1. 同心鼓示意图

项目所用排球的质量为 270 g。鼓面直径为 40 cm, 鼓身高度为 22 cm, 鼓的质量为 3.6 kg。队员人数不少于 8 人, 队员之间的最小距离不得小于 60 cm。项目开始时, 球从鼓面中心上方 40 cm 处竖直落下, 球被颠起的高度应离开鼓面 40 cm 以上, 如果低于 40 cm, 则项目停止。项目的目标是使得连续颠球的次数尽可能多。

针对项目的目标, 先从理想情况出发, 认为队员之间的发力是同时刻的。再考虑到现实中队员之间同时发力存在困难, 加以调整并给出对应的协作策略。以此来让同心鼓项目得到更多人的了解和普及, 它能培养大家的团队协作能力和沟通能力。与普通传统项目相比, 同心鼓更具有趣味性, 在得到锻炼的同时也能收获美好的心情。

2. 数据来源与模型假设

数据来源于 2019 高教社杯全国大学生数学建模竞赛

http://www.mcm.edu.cn/html_cn/node/b0ae8510b9ec0cc0deb2266d2de19ecb.html

为简化模型, 本文做以下假设:

- (1) 假设每次颠球初始时刻鼓面水平静止。
- (2) 忽略球与鼓碰撞的能量损失。

- (3) 各队员的拉力始终为恒力
 (4) 假设所参加项目的各队员均匀分布在以绳长为半径的圆周上。

3. 理想情况下(一动一动)模型建立与求解

3.1. 颠排球的动态变化过程

同心鼓颠一次排球的动态变化过程大致为排球竖直落下的同时，鼓因人的拉力上升。当鼓与绳子水平时，排球与鼓相碰撞。碰撞后排球上升，鼓下降。则过程为 $a \rightarrow b$ ，之后均为 $b \rightarrow c \rightarrow b$ (如图 2)。

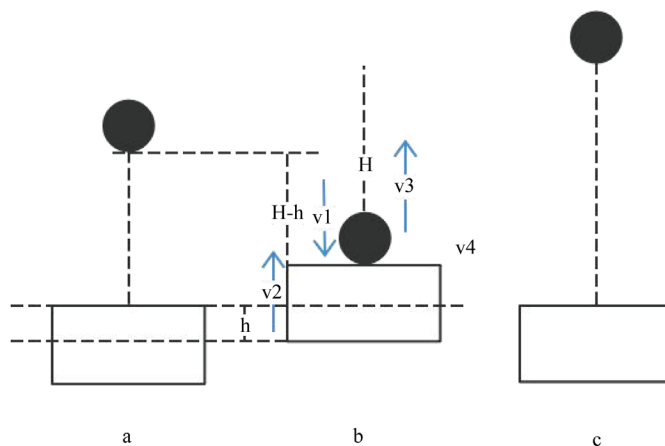


Figure 2. Drum activity side view
 图 2. 鼓活动侧视图

3.2. 排球克服空气阻力做功

根据 5 号标准排球的周长和重量可知质量为 270 g 的排球周长为 66 cm。根据 $C = 2\pi r$ ，取 $\pi = 3.141592$ ，可得 $r = 10.5042$ cm。类比篮球飞行过程[1]，对排球的下降和上升(如图 3)分别考虑克服空气阻力做的功 W_a 和 W_b 。

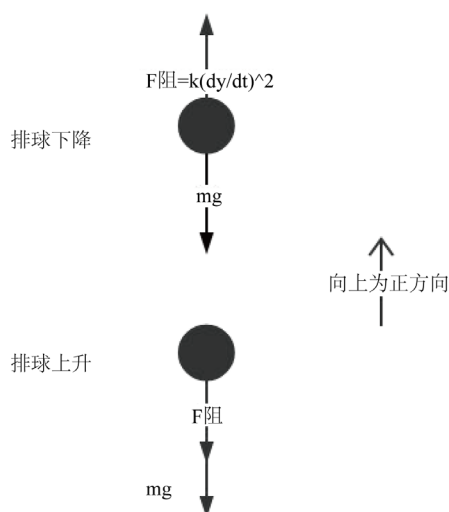


Figure 3. Force Analysis of Volleyball
 图 3. 排球受力分析

3.2.1. 排球下降

排球在空气中沿竖直下落，设 y 坐标轴是向上的，由牛顿第二定律能够满足(1)为

$$\begin{cases} m \frac{d^2 y}{dt^2} = -C \frac{dy}{dt} - mg \\ y(0) = 0.4, y'(0) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

其中， m 是排球的质量， C 是空气阻力系数， g 是重力加速度， y 是以鼓面为坐标原点的坐标， t 是时间。由于排球的质量 $m = 0.27 \text{ kg}$ ，空气阻力系数查阅文献计算可得 $C = kS = 0.1018$ ， S 为排球截面面积，重力加速度 $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ 。利用 MATLABR2018a 求解二阶常微分方程，得到公式 $y(t)$ 。由于空气阻力是方向不变，大小时刻变化的变力，使用微元法求排球下降的做功 W_a

$$W_a = \int_0^{t_a} F_{\text{阻}} y dt = C \int_0^{t_a} v y dt = C \int_0^{t_a} \frac{dy}{dt} y dt \quad (2)$$

3.2.2. 排球上升

同理可得二阶常微分方程如下，利用 MATLAB2018a 求解得到公式 $y(t, v_3)$ ，其中 v_3 是一个暂时未知的常量。

$$\begin{cases} m \frac{d^2 y}{dt^2} = C \frac{dy}{dt} - mg \\ y(0) = 0, y'(0) = v_3 \end{cases} \quad (3)$$

由于空气阻力是方向不变，大小时刻变化的变力，使用微元法求排球上升做功 W_b 。

$$W_b = \int_0^{t_b} F_{\text{阻}} y dt = C \int_0^{t_b} v y dt = C \int_0^{t_b} \frac{dy}{dt} y dt \quad (4)$$

3.3. 碰撞前后分析

对于图 1 中 b，本文分别考虑鼓与排球碰撞的前后[2]。即将碰撞前排球的速度为 v_1 ，鼓的速度为 v_2 。碰撞后排球的速度为 v_3 ，鼓的速度为 v_4 。其中排球的质量为 m ，鼓的质量为 M (如图 4)。

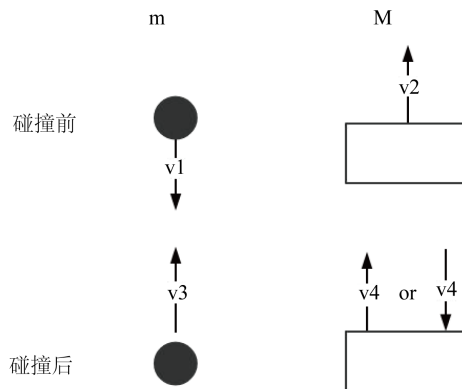


Figure 4. Speed before and after volleyball and drum collision

图 4. 排球和鼓碰撞前后的速度

以向上为正方向，碰撞前排球下降时，由动能定理可得

$$-W_a + mg(H - h) = \frac{1}{2}mv_1^2 - 0 \quad (5)$$

碰撞后排球上升时，同理由动能定理可得

$$0 - \frac{1}{2}mv_3^2 = mgH - W_b \quad (6)$$

碰撞前后，由动量守恒可得

$$-mv_1 + Mv_2 = mv_3 \pm Mv_4 \quad (7)$$

不考虑碰撞的能量损失，由动能守恒可得

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}Mv_2^2 = \frac{1}{2}mv_3^2 + \frac{1}{2}Mv_4^2 \quad (8)$$

3.4. 最佳协作策略

在每个人都可以精确控制用力方向，时机和力度的理想条件下，鼓面一直保持水平(如图 5)。理想状态下会保持平衡。在问题所给参数限制的前提下，保证颠排球活动的进行，人做功越小则协作策略越佳。而由上面的颠排球的动态变化过程可知，颠一次球团队做功为

$$W_{\lambda} = W_F - W_G \quad (9)$$

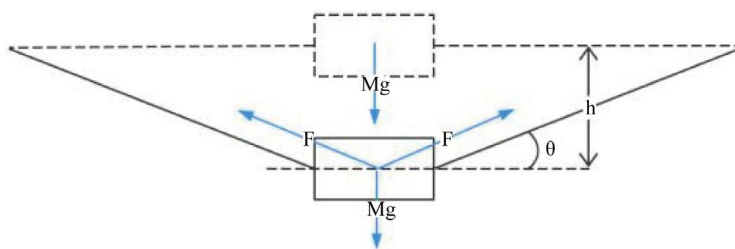


Figure 5. Concentric Drum Force Analysis
图 5. 同心鼓受力分析

为了使得 W_{λ} 最小，经分析可知 $v_4 = 0$ 时， $W_{\lambda} = W_F - W_G = \int_0^{\sigma} 2F \sin \theta h d\theta - mgh$ ，即排球与鼓碰撞后，鼓的速度变成零，之后做自由落体运动，不会向上。这种情况下人的做功最小。

3.5. 一动一动模型的求解

步骤 1：求排球碰撞后速度，解得 $v_3 = 2.4831 \text{ m/s}$ 。

步骤 2：求排球碰撞前速度 v_1 ，鼓面初始位置较绳子水平时下降高度 h 和鼓上升时间 t_a

解得 $v_1 = 2.1366 \text{ m/s}$ ， $h = 0.1620 \text{ m}$ ， $t_a = 0.23 \text{ s}$ 。

步骤 3：求鼓碰撞前速度 v_2 ，解得 $v_2 = 0.3465 \text{ m/s}$ 。

步骤 4：求初始位置绳子与水平面的夹角，每个人的发力 F_{λ} ，其中 d 为绳长取 1.7 m 。

解得 $nF = 501.0913 \text{ N}$ ，其中 n 为人数，由于人数不会影响连续颠球的次数，则取 $n = 8$ 人，则 $F_{\lambda} = 62.9198 \text{ N}$ 。

4. 鼓面倾角模型

一动一动模型是在理想情况所有队员都能同时发力下建立的，也就意味着发力的同时鼓面不会产生倾角。但在现实情况下往往做不到同时发力，那么鼓面在发力的那一时刻，就会发生倾斜产生倾角。鼓

面倾角模型则是先计算出产生的倾角，再在一动一动模型的基础上给予调整。

4.1. 基本定律

力矩 τ ：力矩等于作用于杠杆的作用力乘以支点到力的垂直距离。

$$t = r \times F = |r||F_{\perp}| = |r|F \sin \theta \tag{10}$$

合外力矩 M_z ：

刚体定轴转动定律：刚体所受的对于某定轴的合外力矩 M_z 等于刚体对此定轴的转动惯量 J 与刚体在此合外力矩作用下所获得的角加速度的乘积。

$$M_z = J \times \beta \tag{11}$$

转动惯量 J ：刚体绕轴转动时惯性的量度。 M 为物体的质量， r 为物体的半径。

$$J = M \times r^2 \tag{12}$$

4.2. 颠球情况分类，每类情况的鼓运动过程及受力分析

对于题目所给的发力时机和用力大小取值表， -0.1 s 指该队员提前 0.1 s 发力，序号指每一次颠球的情况。由队员们的提前发力时间和发力大小不同可将 9 次颠球情况分为 4 个类型。

类型 1： 序号 1，序号 2 和序号 3 (如图 6)。

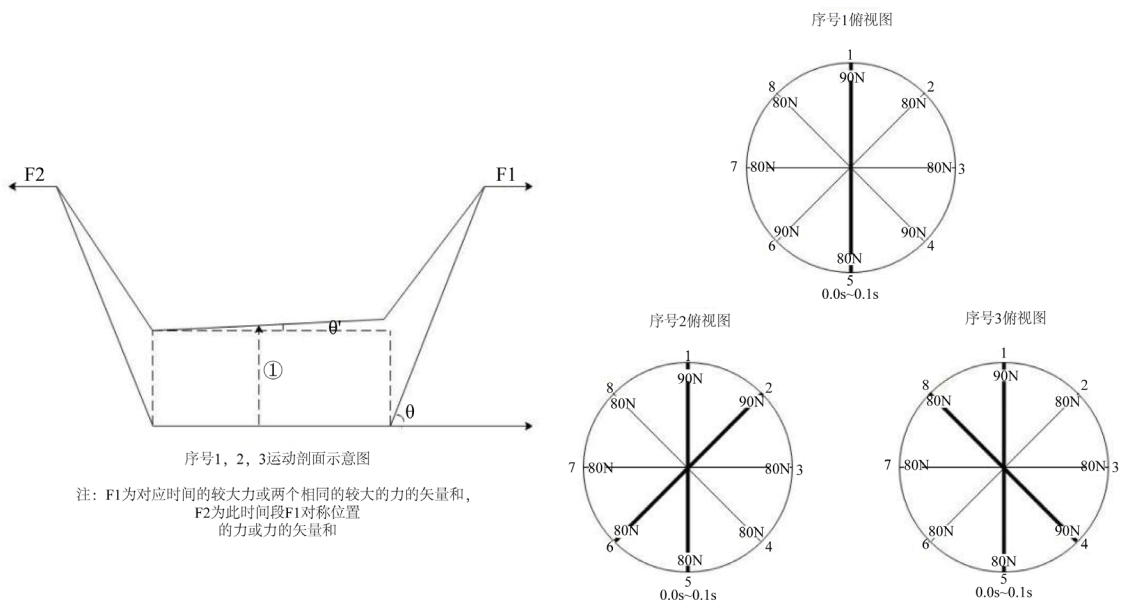


Figure 6. Movement process and stress analysis

图 6. 运动过程及受力分析

类型 2： 序号 9 (如图 7)。

类型 3： 序号 4，序号 5，序号 6 和序号 7 (如图 8)。

类型 4： 序号 8 (如图 9)。

如图 7 分两个时间段对鼓进行受力分析， $-0.1\sim 0.0\text{ s}$ 由于鼓受力不平衡，3 与 4 之间和 7 与 8 之间分别有一个弧中点，鼓将会沿这两个点所连的直线方向，向 7 与 8 这一侧倾斜。接着 $0.0\sim 0.1\text{ s}$ 2 与 3 之间和 6 与 7 之间分别有一个弧中点，鼓将沿这两个点所连的直线方向，向 6 与 7 这一侧倾斜。

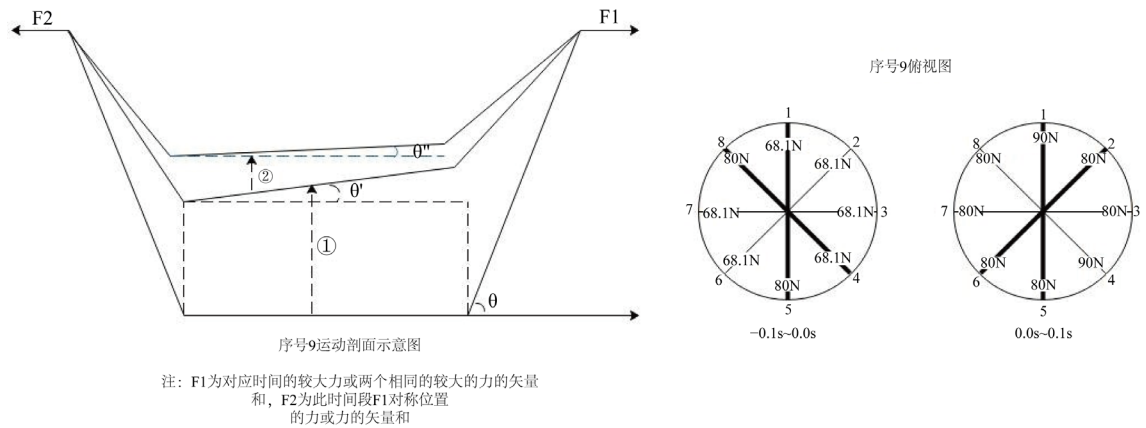


Figure 7. Movement process and stress analysis
图 7. 运动过程及受力分析

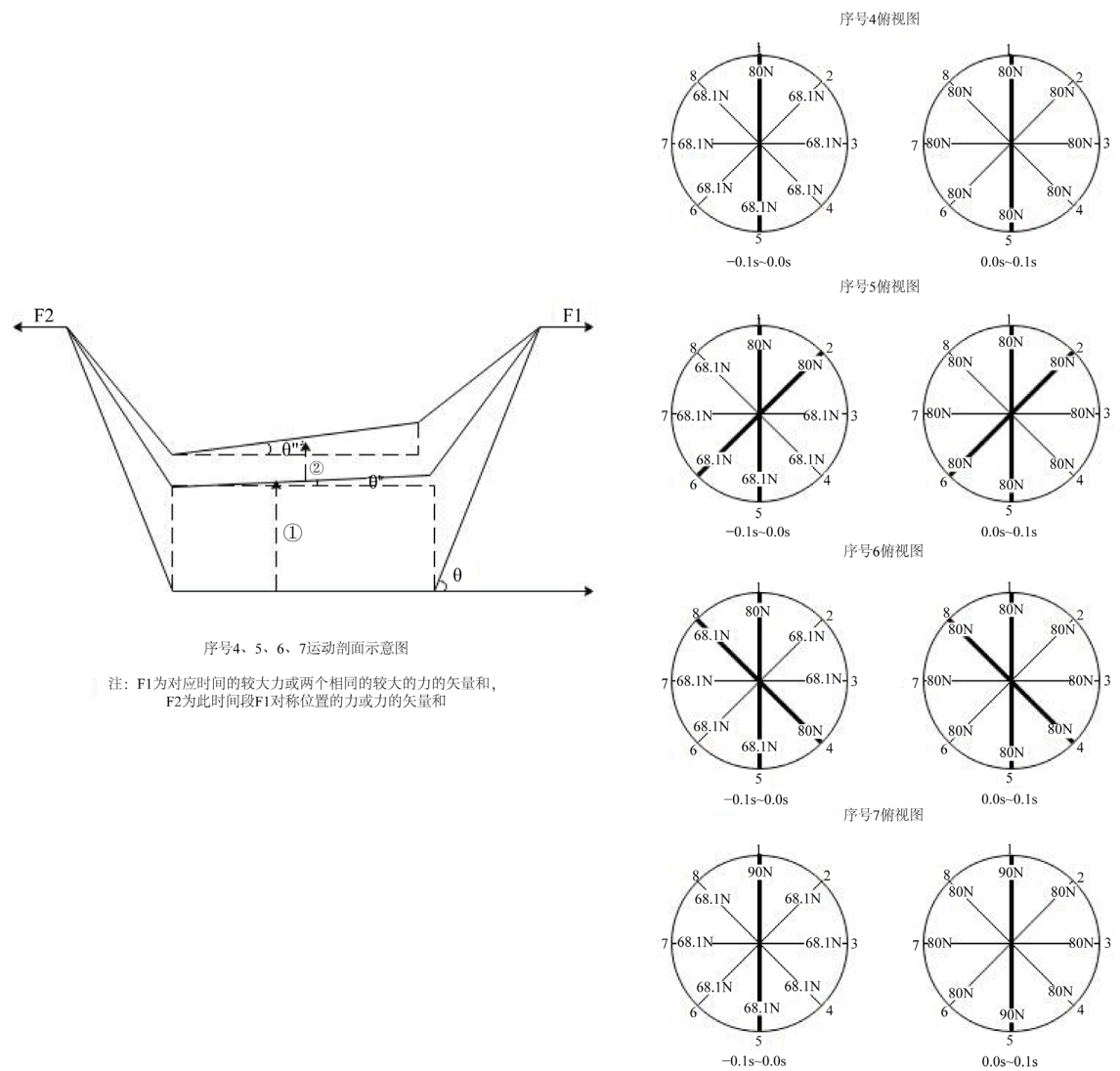


Figure 8. Movement process and stress analysis
图 8. 运动过程及受力分析

序号8俯视图

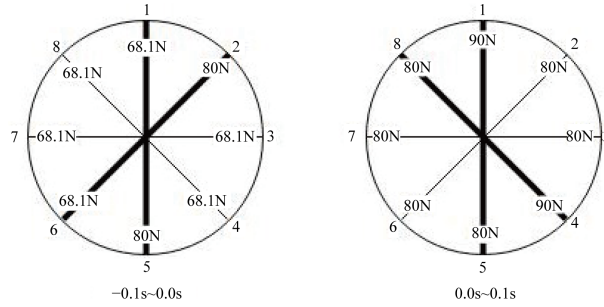


Figure 9. Movement process and stress analysis
图9. 运动过程及受力分析

4.3. 鼓面倾角模型的建立与求解

步骤 1: 求鼓面的角加速度

由刚体定轴转动定律(10)

$$\beta_i = \frac{Mz_i}{J} = \frac{Mz_i}{Mr^2} \quad (13)$$

$$Mz_i = \left(n_1 f_1 \sin\left(\theta - \sum_{i \in I} \theta_i\right) + n_2 f_2 \sin\left(\theta - \sum_{i \in I} \theta_i\right) - Mg \right) \times 2r \quad (14)$$

其中, Mz 表示对于某定轴的合外力矩, J 表示刚体绕给定轴的转动惯量, n_1 、 n_2 为不同力的个数, f_1 、 f_2 为不同的力, M 为鼓的质量, r 为鼓的半径, θ_i 为时间间隔内变化的倾角, $I = \{1, 2, \dots, 100\}$ 。将不同的几个力做合成, 再进行合外力矩的计算。

步骤 2: 求鼓面的角速度 i

角加速度 i 对时间 t 积分得到角速度

$$\omega_i = \int_{t_0}^{t_1} \beta_i dt \quad (15)$$

由于角加速度是变化的, 因此对时间进行分割, 以 $\Delta t = t_1 - t_0 = 0.001s$ 为间隔(如图 10), 在此间隔角加速度保持不变, 最后再将所有加起来。

$\theta = 3.7074^\circ$ 其中 d 为绳长为 1.7 m, 鼓面初始位置较绳子水平时下降 0.11 m。

步骤 3: 求鼓面的倾斜角度

角速度 i 对时间 t 积分得到划分角度

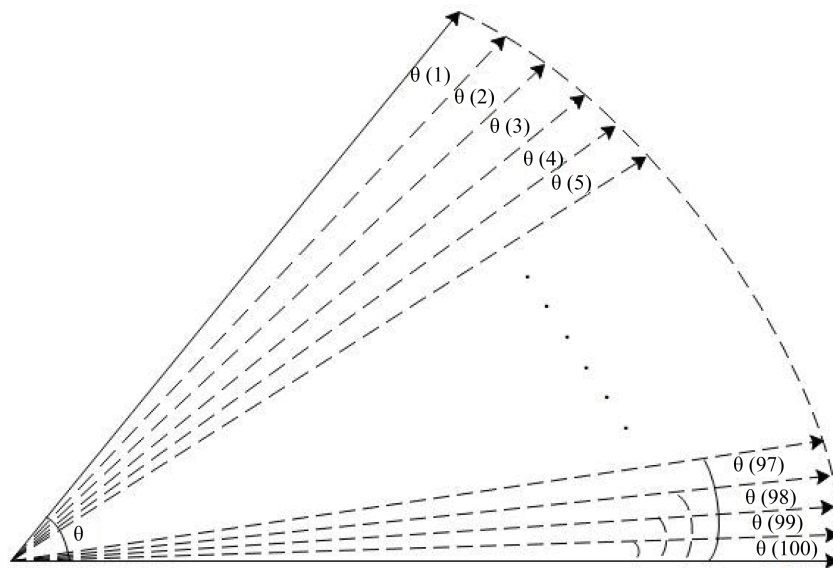
$$\theta_i = \int_{t_0}^{t_1} \omega_i dt \quad (16)$$

时间间隔与步骤 2 相同。由于 $\sum \theta_i = \theta = 3.7074^\circ$ 迭代步骤 1 到步骤 4 分别求出 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{99}$, 则鼓面倾斜角度 $\eta = \theta - \sum \theta_i$ 。利用 MATLAB R2018a 求解, 得到结果(如表 1)。

4.4. 策略的调整

4.4.1. 现实情况下鼓面倾角的计算

在现实情形中, 队员的发力时机和力度不能精确控制, 理想情况下的模型得到的每个人发力为 62.92 N, 现实情形认为有 1 个人会提前发力且发力大小增加 10 N, 详见表 2。



注：将时间0.1s划分100等份每一份对应微小时间段的角变化如图，且当前时间段的倾斜角由上一时间的倾斜度和受力大小共同决定。

Figure 10. Division of tilt angle

图 10. 倾斜角度的划分

Table 1. Result data

表 1. 结果数据

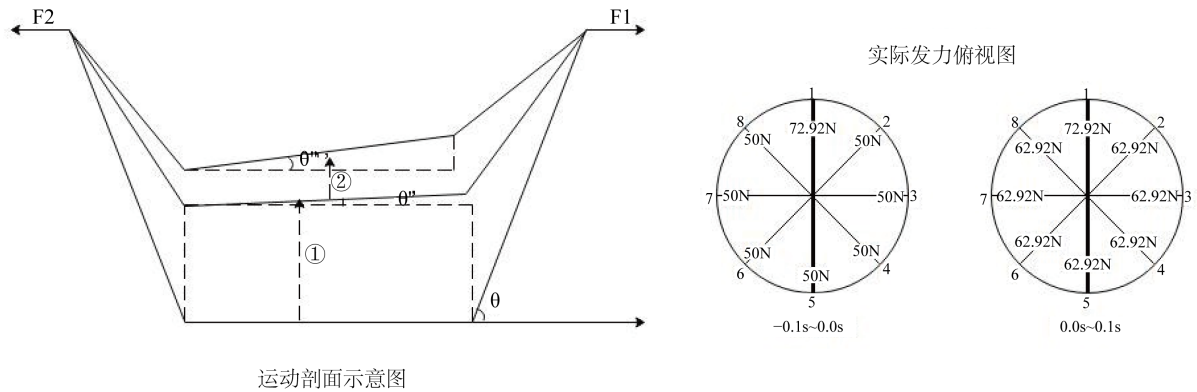
序号	鼓面倾角度
1	0.4266
2	0.5591
3	0.3879
4	0.2864
5	0.5465
6	0.4047
7	0.2969
8	0.3297
9	0.0881

Table 2. Timing of actual exertion (s) and strength (N)

表 2. 现实发力时机(s)和用力大小(N)

序号	发力时机	用力大小
1	-0.1	72.92
2	0	62.92
3	0	62.92
4	0	62.92
5	0	62.92
6	0	62.92
7	0	62.92
8	0	62.92

对鼓进行运动过程分析和受力分析如图 11，根据现实情况下求鼓面倾角的模型，求出鼓面倾角为 0.2393 (结果均由源数据计算而来，未实际验证)。



注：F1为对应时间的较大力或两个相同的较大的力的矢量和，
F2为此时段F1对称位置的力或力的矢量和

Figure 11. Movement process and stress analysis

图 11. 运动过程及受力分析

4.4.2. 调整策略

实际情况下的鼓面会发生倾斜，可采取以下措施进行调整：

调整下一次鼓面与排球将碰撞时的倾斜角度，在现实情形中，排球碰击倾斜面后可视为斜抛运动[3]，则可调整鼓面倾斜度使得下一次碰撞后的排球做竖直上抛运动。将球调整为竖直状态弹跳，使得连续颠球次数尽可能多。

鼓面的倾斜角度与人们的发力时机和用力大小有关，即在可精确控制条件下：

- (1) 不改变用力大小，之前提前发力时机的人下一次颠球延迟时间。
- (2) 不改变发力时机，之前用力大的人减小发力。

5. 结束语

本文考虑了空气阻力的影响，对于过程的受力分析非常清楚，一动一动模型合理地解决了排球在理想情况下的最佳团队协作策略和该策略下的颠球高度。在现实情况中明确分了 4 种类型，在建模过程中微元法时间计算每一个小时时间段的倾斜角度，很好地解决了动态变化的问题。运用物理具体分析，计算严谨，符合实际，具有可行性和合理性，是掌握同心鼓活动技巧的有效策略。

参考文献

- [1] 李铁, 王路猛. 基于信息技术背景下篮球空气阻力的计算[J]. 电子测试, 2013(22): 47-48.
- [2] 贺西平, 王成会, 边小兵, 等. 碰撞问题的速度矩阵表达和能量损失及传递率分析[J]. 物理通报, 2017, 36(11): 27-34.
- [3] 郭雪鹏. 考虑空气阻力的斜抛运动研究[J]. 物理教学, 2017(4): 47-48.