

# 周期性边界条件下多孔肋片电磁热弹性力学性能分析

余斯凡, 李凌\*

上海理工大学能源与动力工程学院, 上海  
Email: \*13122297260@163.com

收稿日期: 2020年11月30日; 录用日期: 2021年2月17日; 发布日期: 2021年2月25日

## 摘要

基于Lord-Shulman 广义热弹性理论, 本文研究了一维实心肋片、多孔肋片在竖直方向的均匀磁场作用下受瞬态热冲击的电磁热弹性耦合问题, 通过数值方法求解控制方程, 得到了温度和应力分布规律。此外, 还研究了在非傅立叶条件下, 多孔肋片的孔隙效应(Np)、对流效应(Nc)和辐射效应(Nr)对温度和应力的影响。结果表明: 在非傅立叶条件下, 孔隙效应、辐射效应和对流效应有利于传热的进行, 多孔肋片的传热效率随各参数的增大而增大, 且与其他参数相比, 辐射效应对温度和应力的影响最显著。

## 关键词

非傅立叶传热, 多孔肋片, 热应力, 磁场

# Analysis of Electromagnetic Thermoelastic Mechanical Properties of Porous Fins under Periodic Boundary Condition

Sifan Yu, Ling Li\*

School of Energy and Power, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai  
Email: \*13122297260@163.com

Received: Nov. 30<sup>th</sup>, 2020; accepted: Feb. 17<sup>th</sup>, 2021; published: Feb. 25<sup>th</sup>, 2021

## Abstract

Based on the Lord-Shulman generalized thermoelastic theory, this paper studies the electromag-

\*通讯作者。

netic thermoelastic coupling problem of one-dimensional solid fins and porous fins subjected to transient thermal shock under the action of a vertical uniform magnetic field. The control equation is solved by numerical method, and the distribution of temperature and stress is obtained. In addition, the effects of the pore effect ( $N_p$ ), convection effect ( $N_c$ ) and radiation effect ( $N_r$ ) on the temperature and stress of the porous rib are also studied. The results show that the pore effect, radiation effect and convection effect are beneficial to heat transfer under non-Fourier heat condition. The heat transfer efficiency of porous fin increases with the increase of parameters, and the radiation effect has the most significant effect on temperature and stress compared with other parameters.

## Keywords

Non-Fourier Heat Conduction, Porous Fin, Thermal Stress, Electromagnetic Field

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

超集成化产品工作时, 其表面会在短时间之内产生超高的温度或者热流, 进而影响产品的性能和寿命, 因此如何实现其表面的快速散热是近些年来学者们关注的焦点[1] [2]。在换热表面加装肋片是实现强化换热的一种高效手段, 这种方法在燃料电池热管理、蓄能、换热器等工业领域有着广泛的工程应用。它通过增大肋片换热面积以及破坏边界层增大传热系数, 从而达到增强换热的目的, 肋片的强化换热能力与其形状、材料以及几何参数等因素有关, 因此, 众多研究者不断地寻找能够使散热率最大化的肋片结构。与实心肋片相比, 多孔肋片增加了单位体积下的热交换面积, 而且通过去除空心孔的固体材料减轻了重量, 是一种应用前景良好的换热方式。

Kraus 等[3]对有关经典肋片的原理及设计作了较为全面的总结。Kiwani 和 AJ-Nimr [4]率先提出了利用多孔肋片强化传热的概念, 并通过与实心肋片对比, 发现在相同条件下, 多孔肋片的传热效率更高。Hoshyar [5]分析了多孔介质肋片内热源随温度变化的对流传热性能。Darvishi [6]等使用频谱搭配方法对全湿多孔直肋片中自然对流和辐射换热进行了热分析。Gorla 等[7]采用四阶龙格库塔方法研究了直肋片内辐射和自然对流耦合传热的问题, 研究表明, 与不考虑辐射影响的肋片相比, 考虑了辐射影响的肋片散热效果更好。Hatami 等[8]分析了不同几何截面的多孔介质陶瓷肋片散热情况。Atouei 等[9]采用最小二乘法和配置法获得了热源和导热率均为温度函数的条件下的半球形肋片的温度分布。Nasser 等[10]研究了非傅里叶条件下一维实心肋片的热弹性耦合问题, 得到了肋片内温度及应力的分布规律。He 等[11]研究了在非傅里叶条件下, 均匀磁场作用的实心肋片受热冲击的电磁热弹性耦合问题, 利用拉普拉斯数学求解得到了肋片的温度及应力分布规律。当肋片长期处于磁场、温度场等多场耦合的复杂环境下, 肋片材料会由于非均匀温度场引起的热应力作用产生热疲劳, 这是导致肋片发生断裂的重要因素。并且在非傅里叶条件下, 肋片受瞬态热冲击所引起的热应力变化剧烈, 因此分析多孔肋片在多场条件下的电磁热弹性问题对于肋片的设计和安全性具有重要的工程意义。

由 Lord 和 Shulman 发展起来的热弹性理论, 通过在经典傅里叶热传导定律中引入热流密度及热松弛时间  $\tau$  获得了一种新的波形热传导定律, 确保了热波的有限传播速度。本文基于 Lord-Shulman 广义热弹性理论建立了肋片内的电磁热弹性耦合方程, 主要从两个方面进行研究。首先, 以一维实心肋片为研究对

象, 着重分析肋片在瞬态热冲击下, 磁场强度对肋片内应力及温度分布的影响。其次, 研究了多孔肋片在非傅里叶条件下受瞬态热冲击的多场耦合问题, 分析了多孔肋片的孔隙效应, 对流效应及辐射效应对多孔肋片的温度及应力分布的影响。

## 2. 物理模型与数学模型

物理模型如图 1 所示, 多孔肋片处于一个磁场强度为  $H_0$  方向竖直向上的磁场中。假设肋片在垂直纸面方向上不发生变化, 并且肋片表面上的换热热阻远小于导热热阻, 即任一截面上的温度是均匀的, 因此将肋片受热冲击简化为一维问题[12]。肋片顶端绝热, 肋基受瞬态热冲击  $\theta_0 = \theta_0 H(t)$ , 式中  $\theta_0$  为热冲击的幅值, 为一固定值,  $H(t)$  为 Heaviside 阶跃函数。热冲击  $\theta_0 = \theta_0 H(t)$  表明, 在时间无限小的情况下, 肋片左端温度升到  $\theta_0$ , 并保持不变。计算中不考虑热在边界上的反射问题, 并忽略环境中的湿度影响。流体与多孔介质之间的相互作用满足达西定律[13], 肋片左右两端应力自由, 均为零值。

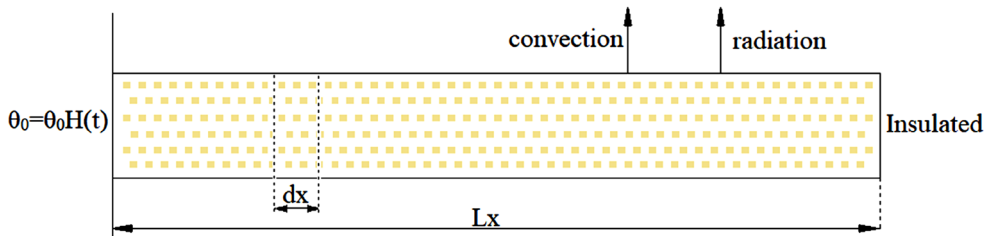


Figure 1. Physical model  
图 1. 物理模型

描述传热过程的导热方程为:

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \rho c_E \frac{\partial T}{\partial t} + \tau \rho c_E \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \gamma T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + \tau \gamma T_0 \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} + S + \tau S' \quad (1)$$

式中,  $\gamma = (3\lambda + 2\mu)\alpha_t$ ,  $\alpha_t$  为线性膨胀系数。S 项分别对应肋片的对流、辐射及孔隙率的影响[14]:

$$\begin{aligned} S &= \frac{hP(1-\phi)}{A}(T-T_0) + \frac{\varepsilon\sigma F_{f-a}P(1-\phi)}{A}(T^4-T_0^4) + \phi \frac{\rho_f c_{E,f} \beta_f KP}{v_f A}(T-T_0)^2 \\ &= \frac{h_a P(1-\phi)}{A} \frac{(T-T_0)^{m+1}}{(T_b-T_0)^m} + \frac{\varepsilon\sigma F_{f-a}P(1-\phi)}{A}(T^4-T_0^4) + \phi \frac{\rho_f c_{E,f} \beta_f KP}{v_f A}(T-T_0)^2 \end{aligned} \quad (2)$$

上式中,  $h$  为对流换热系数,  $h = h_a \frac{(T-T_0)^m}{(T_b-T_0)^m}$ ,  $m$  表示不同的热传递模式。从导热方程中可以看出, 温度场的分布受运动场的影响。

描述应变过程的运动方程为:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \gamma \frac{\partial T}{\partial x} + \mu_e H_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3)$$

运动方程中,  $\mu_e H_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  表征磁场项, 运行场的分布受到温度场和磁场的共同影响。

应力方程为:

$$\sigma = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} - \gamma T + \mu_e H_0^2 \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4)$$

上述各式中的物理量代表的含义如表 1 所示。

引入如下无量纲量:

$$x^* = c_1 \eta_1 x, \quad u^* = c_1 \eta_1 u, \quad t^* = c_1^2 \eta_1 t, \quad \tau^* = c_1^2 \eta_1 \tau, \quad \theta^* = T/T_0, \quad \sigma^* = \sigma/\mu,$$

$$b = \frac{\gamma T_0}{\mu}, \quad g = \frac{\gamma}{\rho c_E}, \quad h = \frac{\mu_e H_0^2}{\mu}, \quad \beta^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu}, \quad \epsilon = \frac{\mu_e H_0^2}{\mu},$$

$$N_c = \frac{k}{(\rho c_E c_1)^2} \frac{h_a P(1-\varphi)}{A(\theta_b - \theta_0)^m}, \quad N_r = \frac{k \epsilon \sigma F_{f-a} P(1-\varphi)}{(\rho c_E c_1)^2 A} T_0^3, \quad N_p = \frac{k}{(\rho c_E c_1)^2} \varphi \frac{\rho_f c_{E,f} g \beta_f K T_0 P}{v_f A}.$$

其中,  $c_1$  为等温弹性波的传播速度,  $c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$ ,  $\eta_1 = \frac{\rho c_E}{k}$ 。

对方程(1) (3) (4)进行无量纲处理:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \left(1 + \tau \frac{\partial}{\partial t}\right) \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} + g \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + N_c (\theta - \theta_0)^{m+1} + N_r (\theta^4 - \theta_0^4) + N_p (\theta - \theta_0)^2\right) \quad (5)$$

$$\beta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\beta^2 + \epsilon) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (6)$$

$$\sigma = (\beta^2 + \epsilon) \frac{\partial u}{\partial x} - b \theta \quad (7)$$

初始条件:

$$\theta(x, t) = 0, \quad t = 0$$

$$u(x, t) = 0, \quad t = 0$$

边界条件:

$$\theta(x, t) = \theta_0 H(t), \quad x = 0$$

$$\sigma(x, t) = 0, \quad x = 0$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = 0, \quad x = L$$

$$\sigma(x, t) = 0, \quad x = L$$

**Table 1.** Symbol table  
**表 1.** 名词符号表

名词	意义	名词	意义
$k$	热传导系数	$v_f$	流体的运动粘度
$\rho$	密度	$T_b$	肋基温度
$c_E$	比热	$P$	肋片横截面周长
$\tau$	热松弛时间	$A$	肋片横截面面积
$\alpha_r$	线性膨胀系数	$\varphi$	孔隙率
$T_0$	环境温度	$\lambda$	第一拉梅常数
$h$	对流换热系数	$\mu$	第二拉梅常数
$\epsilon$	表面发射率	$\mu_e$	磁导率
$\sigma$	斯蒂芬玻尔兹曼常数	$H_0$	磁场强度

Continued

$F_{fa}$	辐射传热的形状因子	$c_1$	等温弹性波波速
$\rho_f$	流体的密度	$N_c$	对流效应参数
$c_{E,f}$	流体的比热	$N_r$	辐射效应参数
$g$	引力常数	$N_p$	孔隙率效应参数
$\beta_f$	流体的体积膨胀系数	$\theta$	温度
$K$	多孔肋片的渗透率		

### 3. 验证

本文采用数值离散方法对该问题进行求解。为验证程序的可靠性, 利用该程序计算了不同时刻自由状态下实心铜肋片内的温度和热应力分布情况, 并与拉普拉斯变换的数值反演[10]进行了对比, 其结果如图 2 所示。相关参数如下:

$$\lambda = 7.76, \quad \mu = 3.86 \times 10^{10}, \quad \alpha_f = 1.78 \times 10^{-5}, \quad C = 383.1, \quad \rho = 8954, \quad T_0 = 293,$$

$$\varepsilon = 0.161, \quad \beta_2 = 4, \quad b = 0.042, \quad g = 1.61, \quad \theta_0 = 1, \quad L_x = 1, \quad \tau = 0.02$$

可以发现, 数值计算结果与解析解基本一致。因此, 编写的程序是可靠的。

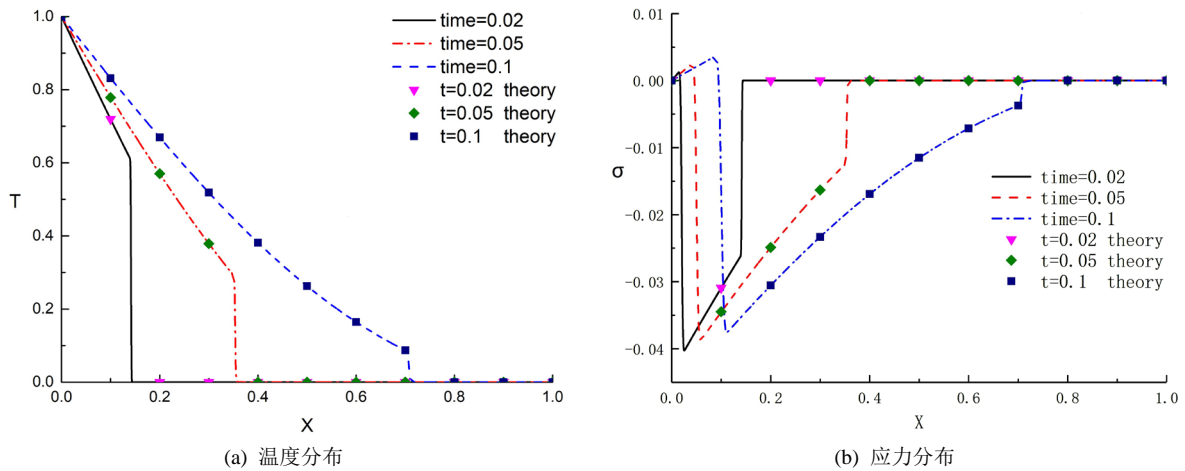


Figure 2. Model validation  
图 2. 模型验证

## 4. 结果与讨论

### 4.1. 磁场强度对实心肋片温度和热应力的影响

固体在热冲击下会发生变形从而产生应力, 由于磁场的作用, 肋片内的温度及应力分布均会受到影响。论文研究了在磁感强度恒定的电磁场作用下, 实心肋片在其表面受热冲击时的电磁热弹性耦合问题。肋片材料为铜, 相关参数同上, 磁感强度  $H_0 = 5 \times 10^8$ , 热松弛时间  $\tau = 0.02$ ,  $\theta_0 = 1$ ,  $L_x = 1$ 。

无量纲时间分别为 0.05、0.1 时不同磁场强度下的温度及应力响应如图 3 所示。从图中可以看到, 在同样的无量纲时间下, 磁场强度对温度分布的影响甚微, 其影响主要体现在应力上。如图 3(b)所示, 靠近肋基的部分由于受到热冲击膨胀而产生拉应力, 沿 X 轴方向向后介质产生压应力, 发生压缩变形, 热波没有传递到的部分则保持零值。变形是一个动态过程, 随着时间的推移, 膨胀区逐渐向后移动, 并且

数值变大。其次, 同样的无量纲时间下, 磁场强度会对应力场分布有影响。若物理模型加入磁场项, 得到的应力分布拉压应力拐点会向后偏移, 但是并不影响热波跳跃不连续的位置, 会在同一时刻跳跃到零值。相对于无磁场的情况, 磁场的存在会使拉应力与压应力增大, 应力波的传播速度加快波动更剧烈, 对实际的工程项目有重要指导意义。

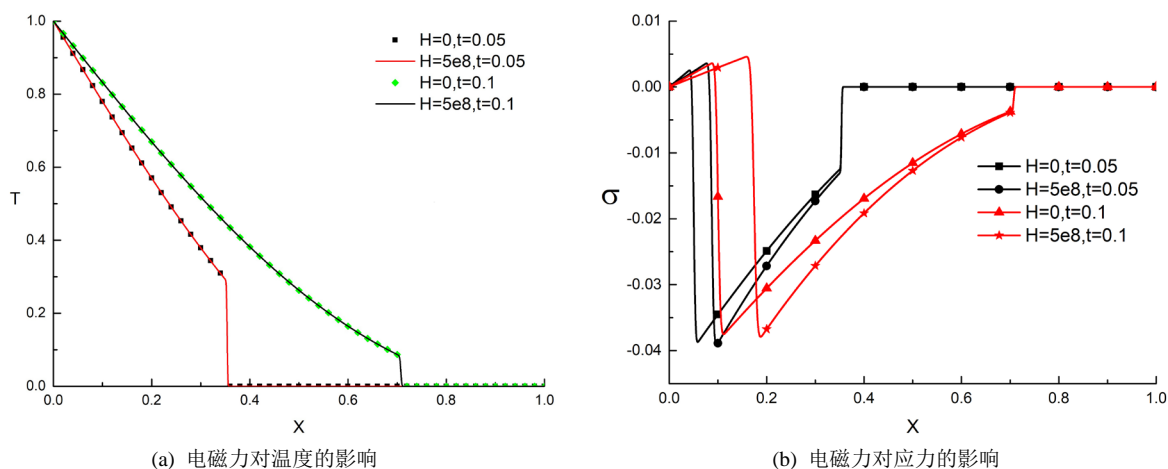


Figure 3. Influence of electromagnetic force on temperature and stress

图 3. 电磁力对温度和应力的影响

#### 4.2. 孔隙率对多孔肋片内温度和热应力的影响

论文进而考虑了多孔肋片孔隙率、对流效应及辐射效应对肋片性能的影响, 研究了一维多孔肋片在其表面受热冲击时的电磁热弹性耦合问题。引入孔隙参数  $\phi$ , 肋片材料取铜, 参数同上, 取  $H_0 = 0$ , 热松弛时间  $\tau = 0.02$ ,  $\theta_0 = 1$ ,  $L_x = 1$ 。

图 4 显示了在傅里叶和非傅里叶条件下, 温度和应力分布随孔隙参数 ( $N_p$ ) 的变化, 忽略辐射和对流效应 ( $N_c = 0, N_r = 0$ )。当不考虑非傅里叶效应, 即无量纲弛豫时间为 0 ( $\tau = 0$ ) 时, 温度及应力分布不存在间断性, 这可以解释为热波以无限的速度传播。

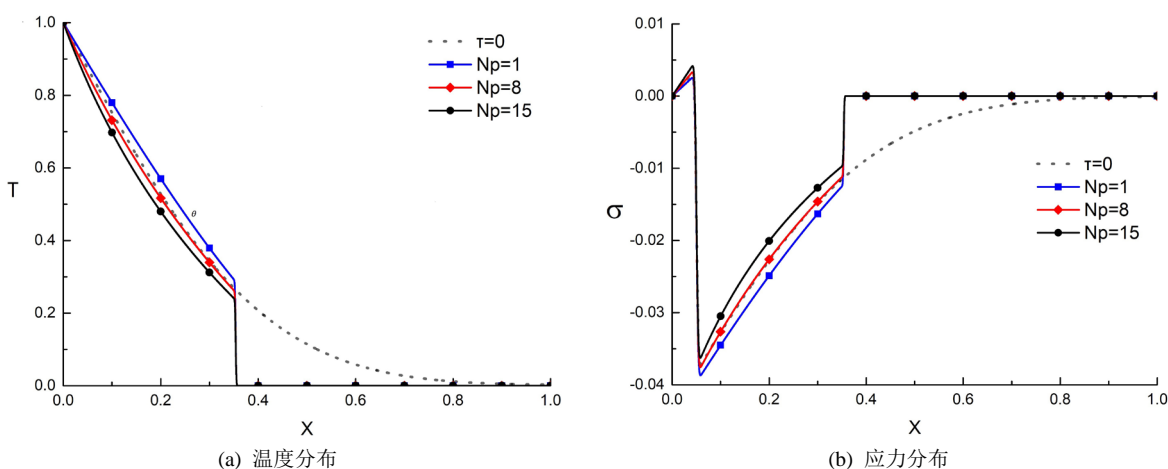


Figure 4. Temperature and stress distribution ( $N_r = 0, N_c = 0, t = 0.05$ )

图 4. 温度和应力分布 ( $N_r = 0, N_c = 0, t = 0.05$ )

当考虑非傅里叶效应时, 图 4(a) 为无量纲时间 0.05 时多孔肋片的温度分布图, 从图中可看出, 不连

续性发生在  $X = 0.35$ , 即热扰动只传递到  $X < 0.35$  区域。另外, 无量纲温度随  $N_p$  的增加而降低, 这是因为  $N_p$  值越高, 多孔肋片的温度梯度越大, 传热速率越快, 所以随着  $N_p$  的增加, 肋片接近周围温度的速度更快。此外, 尽管  $N_p$  值的变化会影响温度分布, 但是并不影响跳跃不连续的位置。图 4(b) 显示了热应力随不同孔隙率参数  $N_p$  的分布情况。同温度分布一样, 不连续性发生  $X = 0.35$ 。另外,  $N_p$  值对拉压应力区域的影响不一致, 在靠近肋基侧拉应力区域, 随着  $N_p$  参数的增加, 拉应力逐渐增大; 在压应力区域, 应力值随  $N_p$  参数的增大而减小。并且,  $N_p$  值的变化并不影响拉压应力拐点和热波不连续的位置。

图 5 描述了辐射换热效应  $N_r$  对肋片内温度和应力分布的影响( $N_c = 0, N_p = 8, N_r = 1, 8, 15$ )。图 6 显示的是不同  $N_c$  值对肋片换热的影响( $N_p = 8, N_r = 1, N_c = 1, 5, 10$ )。根据图 4、图 5、图 6 可以得到,  $N_p, N_r, N_c$  对肋片散热和应力均具有积极影响, 增大各个参数值可以使肋片散热更快, 同时降低热应力。与其他参数相比,  $N_c$  对肋片传热及应力的影响最小,  $N_r$  影响最大。

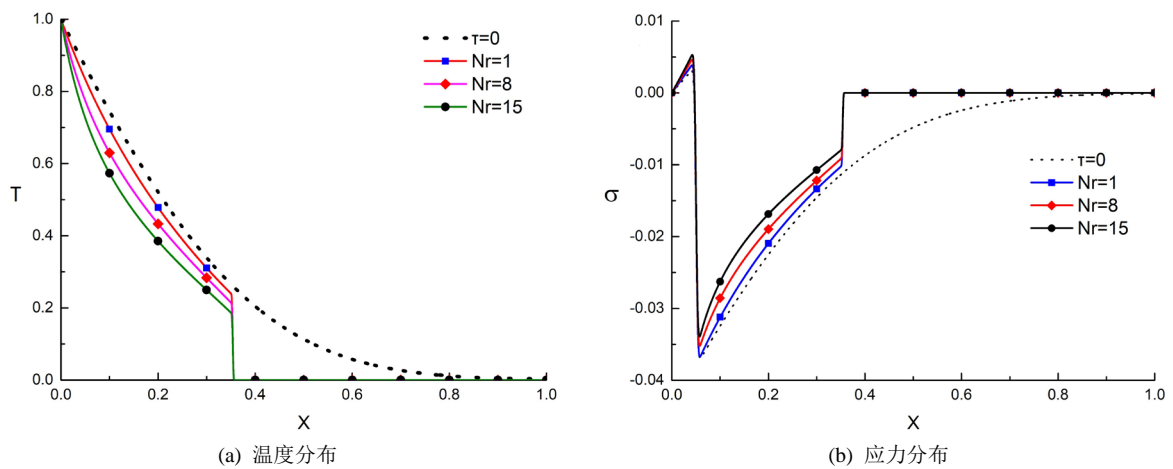


Figure 5. Temperature and stress distribution ( $N_p = 8, N_c = 0, t = 0.05$ )

图 5. 温度和应力分布( $N_p = 8, N_c = 0, t = 0.05$ )

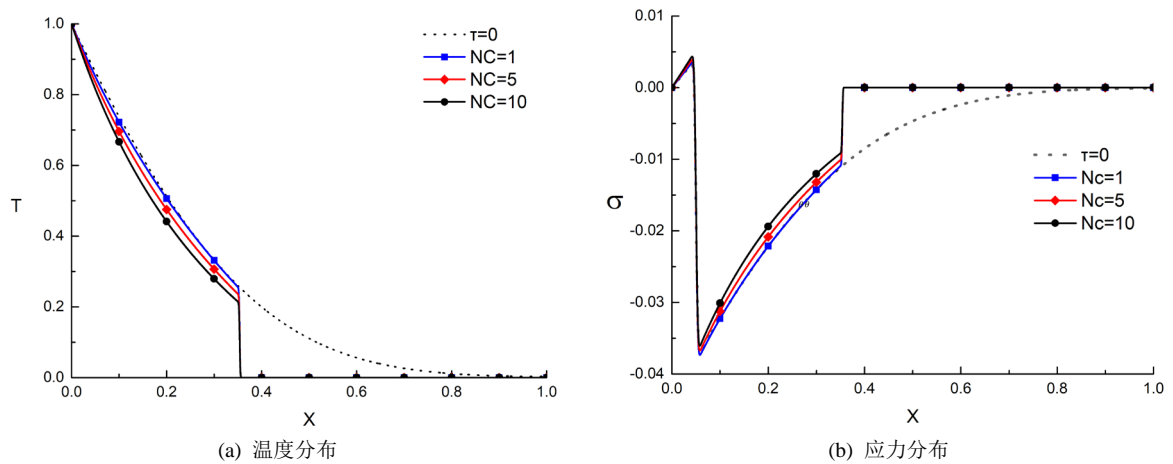


Figure 6. Temperature and stress distribution ( $N_p = 8, N_r = 1, t = 0.05$ )

图 6. 温度和应力分布( $N_p = 8, N_r = 1, t = 0.05$ )

### 4.3. 周期性边界条件对多孔肋片内温度和热应力的影响

本节研究了多孔肋片在周期性边界条件热冲击下的电磁热弹耦合问题。肋基温度为  $\theta = \theta_0 + B \cos(\omega t)$ ,

取  $\theta_0 = 1$ ,  $B = 10$ ,  $w = 2, 8, 16$ 。图 7(a)描述了傅里叶和非傅里叶条件下不同频率值对肋片温度分布的影响, 从图中可以得知, 频率的变化没有影响到温度的不连续性。图 7(b)热应力分布中, 增加  $w$  值会导致靠近肋基的膨胀区域拉应力变大, 压缩区域压应力减小, 同时  $w$  值的改变不会影响拉压应力拐点和波动不连续的位置。值得一提的是, 在材料物性参数及热松弛时间确定的情况下, 只有无量纲时间会影响热波的传播距离, 其余参数均无影响。

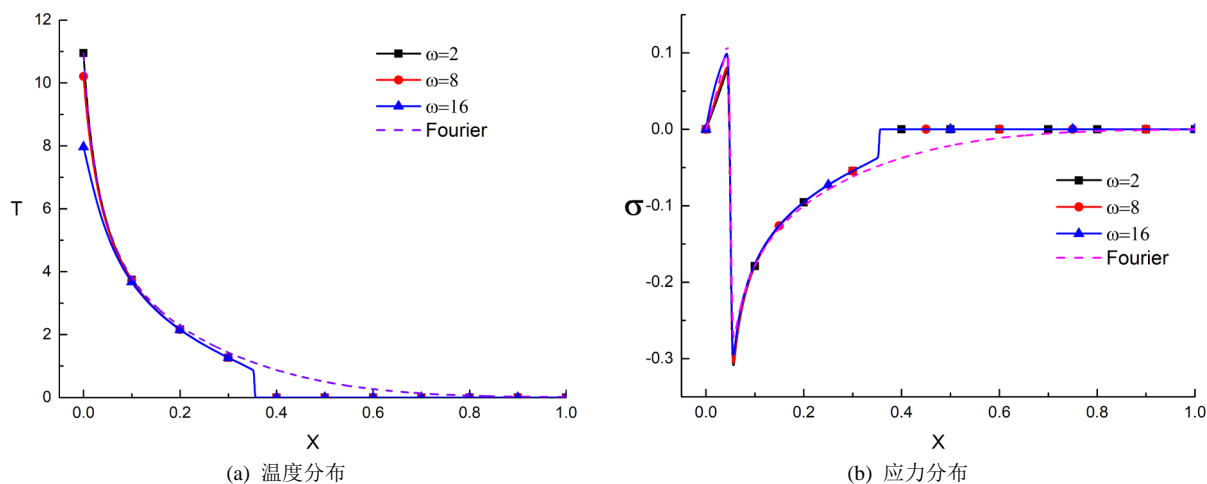


Figure 7. Temperature and stress distribution ( $N_p = 8$ ,  $N_r = 1$ ,  $t = 0.05$ )

图 7. 温度和应力分布 ( $N_p = 8$ ,  $N_r = 1$ ,  $t = 0.05$ )

## 5. 结论

本文研究了多孔肋片处于电磁空间受瞬态热冲击时的电磁热弹性耦合问题。首先以实心肋片为研究对象, 分析了磁场强度对肋片内温度及应力分布的影响, 进而研究了孔隙率效应  $N_p$ 、辐射效应  $N_r$ 、对流换热效应  $N_c$  对多孔肋片换热性能的影响。结果表明: 1) 当肋片处于磁场环境下, 磁场强度对温度分布影响很小, 主要影响应力分布。磁场强度的存在会导致应力分布拉压应力拐点会向后偏移, 但是热波跳跃不连续的位置不会改变。2)  $N_p$ ,  $N_r$ ,  $N_c$  能增大肋片换热效率, 其中  $N_r$  对传热的影响最大,  $N_c$  影响最小。3) 无量纲温度及热应力分布间断的位置受弛豫时间和无量纲时间的影响, 而  $N_p$ ,  $N_r$ ,  $N_c$  等参数对温度间断没有影响。

## 参考文献

- [1] Kundu, B. and Lee, K.S. (2012) Fourier and Non-Fourier Heat Conduction Analysis in the Absorber Plates of a Flat-Plate Solar Collector. *Solar Energy*, **86**, 3030-3039. <https://doi.org/10.1016/j.solener.2012.07.011>
- [2] Kundu, B. and Lee, K.S. (2013) A Non-Fourier Analysis for Transmitting Heat in Fins with Internal Heat Generation. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **64**, 1153-1162. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2013.05.057>
- [3] Kraus, A.D., Aziz, A., Welty, J. and Sekulic, D.P. (2001) Extended Surface Heat Transfer. *Applied Mechanics Reviews*, **54**, B92. <https://doi.org/10.1115/1.1399680>
- [4] Kiwan, S. and Al Nimr, M.A. (2001) Using Porous Fins for Heat Transfer Enhancement. *Journal of Heat Transfer*, **123**, 790-795. <https://doi.org/10.1115/1.1371922>
- [5] Hoshyar, H.A., Ganji, D.D. and Abbasi, M. (2015) Analytical Solution for Porous Fin with Temperature-Dependent Heat Generation via Homotopy Perturbation Method. *International Journal of Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, **2**, 15-22.
- [6] Darvishi, M.T., Gorla, R.S.R., Khani, F., et al. (2016) Thermal Analysis of Natural Convection and Radiation in a Ful-



- ly Wet Porous Fin. *International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow*, **26**, 2419-2431. <https://doi.org/10.1108/HFF-06-2015-0230>
- [7] Gorla, R.S.R. and Bakier, A.Y. (2011) Thermal Analysis of Natural Convection and Radiation in Porous Fins. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, **38**, 638-645. <https://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2010.12.024>
- [8] Hatami, M. and Ganji, D.D. (2014) Thermal Behavior of Longitudinal Convective-Radiative Porous Fins with Different Section Shapes and Ceramic Materials (SiC and Si<sub>3</sub>N<sub>4</sub>). *Ceramics International*, **40**, 6765-6775. <https://doi.org/10.1016/j.ceramint.2013.11.140>
- [9] Atouei, S.A., Hosseinzadeh, K.H., Hatami, M., *et al.* (2015) Heat Transfer Study on Convective-Radiative Semispherical Fins with Temperature-Dependent Properties and Heat Generation Using Efficient Computational Methods. *Applied Thermal Engineering*, **89**, 299-305. <https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2015.05.084>
- [10] El-Maghraby, N.M. and Yossef, H.M. (2003) State Space Approach to Generalized Thermoelastic Problem with Thermomechanical Shock. *Applied Mathematics and Computation*, **156**, 577-586. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2003.08.009>
- [11] He, T.H., Shen, Y.P. and Tian, X.G. (2003) A Two-Dimensional Generalized Thermal Shock Problem for a Half-Space in Electromagneto-Thermoelasticity. *International Journal of Engineering Science*, **42**, 809-823. <https://doi.org/10.1016/j.jengsci.2003.09.006>
- [12] 杨世铭, 陶文铨. 传热学[M]. 第四版. 北京: 高等教育出版社, 2006.
- [13] 吴吉春. 地下水动力学[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 2009.
- [14] Mehraban, M., Khosravi-Nikou, M.R. and Shaahmadi, F. (2019) Thermal Behaviour of Convective-Radiative Porous Fins under Periodic Thermal Conditions. *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, **97**, 821-828. <https://doi.org/10.1002/cjce.23240>