

# 基于混合时间序列的电子产品可靠性预测方法研究

张国龙, 方远, 吕鑫, 朱峰

光电对抗测试评估技术重点实验室, 河南 洛阳  
Email: zhang\_20041987@163.com

收稿日期: 2021年6月9日; 录用日期: 2021年7月26日; 发布日期: 2021年8月2日

## 摘要

针对工程实际中大多数电子产品具有多个性能特征参数的特点, 本文以解决传统基于单一性能参数退化数据可靠性预测不够准确, 且基于联合概率密度法的多性能退化参数建模复杂、难以计算的难题, 从多元预测的角度, 提出基于混合时间序列的方法对多性能退化参数数据进行可靠性建模方法, 并通过仿真实例验证了方法的有效性。

## 关键词

可靠性建模, 寿命预测, Copula-ARMA, 时间序列, 多性能退化参数

# Research on Reliability Prediction Method of Electronic Products Based on Mixed Time Series

Guolong Zhang, Yuan Fang, Xin Lv, Feng Zhu

Key Laboratory of Electro-Optical Countermeasure Test and Evaluation Technology, Luoyang Henan  
Email: zhang\_20041987@163.com

Received: Jun. 9<sup>th</sup>, 2021; accepted: Jul. 26<sup>th</sup>, 2021; published: Aug. 2<sup>nd</sup>, 2021

## Abstract

In view of the fact that most electronic products have multiple performance characteristic parameters in engineering practice, to solve the problems that the traditional reliability prediction based on single performance parameter degradation data is not accurate enough, and the model-

ing of multi-performance degradation parameters based on joint probability density method is complex and difficult to calculate, this paper proposes a reliability modeling method for multi-performance degradation parameter data based on mixed time series from the perspective of multi-prediction, and verifies the effectiveness of the method through simulation examples.

### Keywords

Reliability Modeling, Lifetime Prediction, Copula-ARMA, Time-Series, Multi-Performance Degradation Parameters

Copyright © 2021 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

时间序列的一个重要研究内容就是趋势预测，传统的利用故障趋势预测都是基于历史数据信息，历史数据信息决定未来时间序列的趋势，这种预测方法的缺点在于过于依赖历史数据信息，而忽略了预测自变量之间的相关性，且忽略了外部因素对时间序列趋势的影响[1] [2] [3] [4]。而多元时间序列的建模与预测方法则考虑了多元变量之间的相关性，充分发挥协方差或相关系数在预测过程中的作用，相对于一元时间序列建模与预测更加有效合理，因此本文针对产品多性能参数的特点，将多元时间序列分析方法应用于可靠性建模与寿命预测。

基于多元时间序列的多性能参数退化建模方法，并利用 Copula 函数来描述多性能参数间的相关性，可以解决基于单性能参数对退化过程描述和寿命预测的结果不够准确，以及考虑多性能参数间的相关性及受环境干扰和人为因素的交互影响时建模困难的难题。

## 2. 多性能退化参数的时间序列建模

### 2.1. 一元时间序列模型

实际工程中的单性能参数退化量时间序列多为方差平稳时序，根据方差平稳时序分解原理，可分为确定性部分和平稳随机性部分。以  $f_t$  表示确定性部分，即方差平稳时序的均值，并以一元回归模型描述， $r_t$  表示平稳随机性部分，则组成的单性能参数的一元时序模型为：

$$\begin{cases} y_t = f_t + r_t \\ r_t = \sum_{i=1}^p \varphi_i r_{t-i} + \varepsilon_t - \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j} \end{cases} \quad (1)$$

其中， $f_t$  为以时间  $t$  为自变量的回归函数， $p$  为自回归模型阶数； $\varphi_i (i=1,2,\dots,p)$  为自回归参数， $\theta_j (j=1,2,\dots,q)$  为滑动平均参数； $\varepsilon_t$  为均值为 0，方差为  $\sigma^2$  的高斯白噪声。若考虑多个性能参数的时序模型，首先想到的是将每个性能参数分别利用一元时间序列模型描述，而后组成方程组形式，此时则有：

$$\begin{Bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \\ \vdots \\ y_{nt} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{1t} \\ f_{2t} \\ \vdots \\ f_{nt} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} r_{1t} \\ r_{2t} \\ \vdots \\ r_{nt} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{Bmatrix} + \sum_{i=1}^p \begin{Bmatrix} \varphi_{1i} r_{1(t-i)} \\ \varphi_{2i} r_{2(t-i)} \\ \vdots \\ \varphi_{ni} r_{n(t-i)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ \vdots \\ \varepsilon_{nt} \end{Bmatrix} + \sum_{j=1}^q \begin{Bmatrix} \theta_{1j} \varepsilon_{1(t-j)} \\ \theta_{2j} \varepsilon_{2(t-j)} \\ \vdots \\ \theta_{nj} \varepsilon_{n(t-j)} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

其中,  $f_{it}$  为第  $i$  个性能参数的确定性部分,  $r_{it}$  为第  $i$  个性能参数的平稳随机性部分,  $f_i(t)$  为第  $i$  个性能参数的以时间  $t$  为自变量的回归函数,  $r_{i(t,j)}$  为第  $i$  个性能参数在  $t-j$  时刻下的平稳随机性部分,  $\varepsilon_{it}$  为第  $i$  个性能参数的白噪声,  $i=1,2,\dots,n$ 。

可见, 多性能参数的一元时序模型方程组公式(1)的本质仍然是只能分别反映单个性能参数的退化过程, 而不能反映各性能参数间的相关性。

为弥补多性能参数的一元时序模型公式(2)不能够反映各性能参数间的相关性的不足, 并同时考虑各性能参数之间及其自身不同时刻变化的多元相关性, 本文借鉴 Copula 理论来解决多性能参数间的相关性问题。

### 2.2. Copula 函数

Copula 函数通过构造多元随机变量的概率分布函数, 来描述多元变量间的相关结构, 能较好地解决多元随机变量的相关性问题[5]。

根据 Sklar 定理, 由  $n$  个性能参数组成的  $n$  维随机向量  $Y=[Y_1, Y_2, \dots, Y_n]$  表示, 其联合累积概率分布函数可用一个 Copula 函数  $C$  表示, 即:

$$H(y_1, \dots, y_n) = C(F_1(y_1), \dots, F_n(y_n))$$

其联合概率密度函数可表示为:

$$h(y_1, y_2, \dots, y_n) = c(F_1(y_1), \dots, F_n(y_n)) \prod_{i=1}^n f_i(y_i) \tag{3}$$

其中,  $c$  为 Copula 函数  $C$  的密度函数。常用的 Copula 函数主要有: 多元正态 Copula 函数、多元 t-Copula 函数、阿基米德 Copula 函数等。

多元 Copula 函数的仿真:

对于从  $m$  维 Copula 函数  $C(u_1, u_2, \dots, u_m)$  中产生随机数, 第  $j$  维边缘分布可表示如下:

$$C_j(u_1, u_2, \dots, u_m) = C(u_1, u_2, \dots, u_j, 1, 1, \dots, 1) \quad (j=2, 3, \dots, m-1)$$

其中,  $C_1(u_1) = u_1$ ,  $C_m(u_1, u_2, \dots, u_m) = C(u_1, u_2, \dots, u_m)$ 。则, 已知前  $j-1$  个变量的条件分布可以表示如下:

$$C_j(u_j | u_1, u_2, \dots, u_{j-1}) = \frac{\partial^{j-1} C_j(u_1, u_2, \dots, u_{j-1})}{\partial u_1 \partial u_2 \dots \partial u_{j-1}} \bigg/ \frac{\partial^{j-1} C_{j-1}(u_1, u_2, \dots, u_{j-1})}{\partial u_1 \partial u_2 \dots \partial u_{j-1}} \tag{4}$$

Copula 函数产生随机变量的一般过程如下:

- a) 从均匀分布  $U(0,1)$  上随机产生一个  $u_1$ ;
- b) 已知  $u_1$ , 利用式(4), 得到随机变量  $u_2$  的条件分布  $C_2(u_2|u_1)$ , 并在其中随机产生  $u_2$ ;
- .....
- m) 已知  $u_1, u_2, u_{m-1}$ , 利用式(4)得到随机变量  $u_m$  的条件分布  $C_2(u_2 | u_1, u_2, \dots, u_{m-1})$  并在其中随机产生  $u_m$ 。

通过上述随机数产生过程, 就可以得到一组  $m$  维 Copula 函数的随机数  $(u_1, u_1, \dots, u_m)$ 。

### 2.3. 基于 Copula-ARMA 时序模型的多性能退化参数建模

工程实际中产品失效通常是多个错综复杂的性能参数综合退化作用的结果, 多性能参数退化量时序通常为多元方差平稳时序, 即该时序的均值是一组关于时间  $t$  的确定性函数, 当对该时序减去均值后, 就是一个多元平稳时序。显然, 同一产品多个性能参数退化量时序之间会具有一定的相关性。

以  $Y_t$  表示  $t$  时刻多性能参数退化量向量, 将  $Y_t$  分为确定性部分和平稳随机性部分,  $F_t$  表示  $Y_t$  的确定性部分, 即多元方差平稳时序的均值向量, 由于多参数时序的均值向量为时间  $t$  这个单自变量的确定性函数, 因此仍可对其以一元回归方程组模型描述,  $U_t$  表示  $Y_t$  的平稳随机性部分并以多元自回归 (也称向量自回归) 模型描述。将一元回归方程组模型与多元自回归模型结合, 得到多性能参数退化量时序的多元 Copula-ARMA 时序模型表示如下:

$$Y_t = F_t + R_t$$

$$(y_{1,t}, \dots, y_{n,t}) \sim C_a(F_1(y_{1,t}), \dots, F_n(y_{n,t})) \tag{5}$$

其中:

$$Y_t = \begin{Bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \\ \vdots \\ y_{nt} \end{Bmatrix}, F_t = \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{Bmatrix}, R_t = \begin{Bmatrix} r_{1t} \\ r_{2t} \\ \vdots \\ r_{nt} \end{Bmatrix}$$

将(5)式展开, 可得到:

$$\begin{Bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \\ \vdots \\ y_{nt} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{1t} \\ f_{2t} \\ \vdots \\ f_{nt} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} r_{1t} \\ r_{2t} \\ \vdots \\ r_{nt} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{Bmatrix} + \sum_{i=1}^p \begin{Bmatrix} \varphi_{1i} r_{1(t-i)} \\ \varphi_{2i} r_{2(t-i)} \\ \vdots \\ \varphi_{ni} r_{n(t-i)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ \vdots \\ \varepsilon_{nt} \end{Bmatrix} + \sum_{j=1}^q \begin{Bmatrix} \theta_{1j} \varepsilon_{1(t-i)} \\ \theta_{2j} \varepsilon_{2(t-i)} \\ \vdots \\ \theta_{nj} \varepsilon_{n(t-i)} \end{Bmatrix}$$

$$(y_{1t}, \dots, y_{nt}) \sim C_a(F_1(y_{1t}), \dots, F_n(y_{nt})) \tag{6}$$

根据 Copula 函数的性质可知, 对变量做严格的单调递增变换, 相应的 Copula 函数不变。上述模型, 存在  $\partial y_{it} / \partial \varepsilon_{it} = 1 > 0$ , 因此, 则有:

$$C_{y_t} = C_{\varepsilon_t}$$

即连接  $\varepsilon_{1t}, \dots, \varepsilon_{nt}$  的 Copula 函数  $C_{\varepsilon_t}$  和连接  $y_{1t}, \dots, y_{nt}$  的 Copula 函数相同。这样我们就可以将多性能参数之间的相关性简化为研究残差项之间的相关性。对于一个确定的 ARMA 模型, 高斯白噪声是唯一的“干扰源”, 因此, 我们可以利用高斯白噪声序列的相关程度来描述多性能退化参数时间序列的空间相关性。用一个 Copula 函数  $C_b$  来描述高斯白噪声的相关性, 即:

$$(\varepsilon_{1t}, \dots, \varepsilon_{nt}) \sim C_b\left(\phi\left(\frac{\varepsilon_{1t}}{\sigma_1}\right), \dots, \phi\left(\frac{\varepsilon_{nt}}{\sigma_n}\right)\right)$$

式中,  $(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$  为每个白噪声序列的标准差;  $\phi(\cdot)$  为标准正态分布函数。

因此式(6)的模型可进一步改写为:

$$\begin{Bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \\ \vdots \\ y_{nt} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_{1t} \\ f_{2t} \\ \vdots \\ f_{nt} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \\ \vdots \\ u_{nt} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{Bmatrix} + \sum_{i=1}^p \begin{Bmatrix} \varphi_{1i} r_{1(t-i)} \\ \varphi_{2i} r_{2(t-i)} \\ \vdots \\ \varphi_{ni} r_{n(t-i)} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \varepsilon_{2t} \\ \vdots \\ \varepsilon_{nt} \end{Bmatrix} + \sum_{j=1}^q \begin{Bmatrix} \theta_{1j} \varepsilon_{1(t-i)} \\ \theta_{2j} \varepsilon_{2(t-i)} \\ \vdots \\ \theta_{nj} \varepsilon_{n(t-i)} \end{Bmatrix}$$

$$(\varepsilon_{1t}, \dots, \varepsilon_{nt}) \sim C_b\left(\phi\left(\frac{\varepsilon_{1t}}{\sigma_1}\right), \dots, \phi\left(\frac{\varepsilon_{nt}}{\sigma_n}\right)\right) \tag{7}$$

### 3. 可靠性预测

基于上述假设和理论分析，基于多元混合时序分析的多性能参数加速退化试验产品寿命预测方法主要包括以下五个步骤：

第 1 步：开展加速性能退化试验并监测多性能退化参数退化数据及数据的预处理，由试验设备采集到的性能参数的原始退化量时序通常难以直接对其进行时序分析，为了避免过大的退化量值对时序分析造成的影响，提高性能参数退化量时序模型的拟合精度，并且统一原始退化量时序的初值以及退化失效的判据，应对每个性能参数的原始退化量时序分别作初值化的预处理。

第 2 步：对试验数据进行多元时间序列建模，主要分为确定性部分，即趋势项，和平稳随机项部分，趋势项和随机项部分的确定方法如下：

① 趋势项的确定：

由于产品的各性能退化参数的总体变化趋势具有单调性，均为关于时间的确定性函数，因此趋势项  $F_t$  采用一元单调回归方程组模型来描述，主要包括线性或单调非线性一元回归方程组，即：

$$F_t = F(t) = \begin{Bmatrix} f_{1t} \\ f_{2t} \\ \vdots \\ f_{nt} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{Bmatrix}$$

其中， $F(t)$ 为以时间  $t$  为自变量的  $n$  维一元单调回归方程组。 $f_k(t)$ 为第  $k$  个性能参数的一元单调回归方程， $k = 1, 2, \dots, n$ 。

对于性能参数单调性较好，且信号特征相对简单的退化数据，可直接对每个性能特征参数的原始数据序列进行回归拟合，获得其趋势项拟合参数。但是对于复杂信号特征，这种拟合方法偏差较大，因此可选择 EMD 算法进行提取，EMD 算法能够直接从原始数据序列中提取趋势项，可大大降低对原始数据进行数据拟合的误差，关于 EMD 算法的原理详见参考文献[6]。

② 随机项确定：

随机项部分主要是利用 ARMA 时间序列进行拟合，从原始数据  $Y_t$  减去趋势项部分  $F_t$  后，得到随机项部分的数据序列，然后对随机项部分进行 ARMA 时间序列的拟合，得到 ARMA 模型的参数，最后对多性能参数的相关 Copula 函数进行参数估计。

第 3 步：退化失效预测

确定好多性能参数退化量时间序列的结构，如式(7)所示，再利用 Copula 函数模拟产生相关性的白噪声序列，然后再结合拟合得到 ARMA 模型产生多维随机项序列，再结合趋势项部分，这样就可对多元时间序列对多性能参数进行预测。根据性能退化参数历史数据获得多元 Copula-ARMA 时序模型的参数后，就可以对其预测，预测过程可分为两个阶段：

阶段一：产生  $L$  个服从  $n$  维 Copula 函数  $C$  的高斯白噪声序列  $\{\varepsilon_{k,s}, k = 1, 2, \dots, n; s = 1, 2, \dots, L\}$ 。

① 由上述方法产生  $n$  元 Copula 函数的随机数向量  $(u_1, u_1, \dots, u_n)$ ；

② 令  $\varepsilon_k = \sigma_k \times \Phi^{-1}(u_k)$ ，得到服从  $n$  元 Copula 函数的高斯白噪声序列  $(\varepsilon_1, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ 。

重复阶段一  $L$  次，产生长度为  $L$  的  $n$  元高斯白噪声序列  $\{\varepsilon_{k,s}, k = 1, 2, \dots, n; s = 1, 2, \dots, L\}$ 。

阶段二：基于 ARMA 时序模型对多性能参数数据进行预测。

① 根据拟合得到趋势项回归方程，将时间变量代入回归方程，预测多性能退化参数的趋势项数据  $f_k(t)$ ；

② 根据随机项  $r_{k,t-i} (i = 2, \dots, p)$ ， $\varepsilon_{k,t-j} (j = 1, 2, \dots, q)$  及  $\varepsilon_{k,t}$  利用 ARMA 递推公式产生第  $k$  个性能特征参数在  $t$  时刻的随机项的值  $u_{k,t}$ ；其中，当  $t < 0$  时， $\varepsilon_{k,t}$  和  $r_{k,t}$  的取值设为 0；

③ 令  $y_{k,t} = f_k(t) + r_{k,t}$ ，这样即可得到产品第  $k$  个性能参数在  $t$  时刻的预测值。

对于单调退化型产品，其失效定义为首次穿越失效阈值的时间，如果产品具有多个性能参数，工程实际中，一般是由最先穿越失效阈值的性能参数所决定，根据竞争失效的判别原理，在给定各性能参数的失效阈值后，再由多性能退化参数的多元 Copula-ARMA 时间序列模型预测得到的各性能参数的预测值，外推得到各性能参数穿越失效阈值的时间，得到伪失效寿命数据。

第 4 步：利用拟合优度检验法对各应力水平下得到的伪失效寿命数据进行寿命分布的假设检验，选择伪失效寿命数据可能服从的分布，而后将外推得到的伪失效寿命数据视为完全寿命数据。

#### 4. 实例分析

为了验证方法的有效性，按照文献[7]给出的方法仿真产品多性能参数退化轨迹，利用 Monte Carlo 仿真方法进行验证。假设产品在温度应力下进行加速退化试验，应力水平为： $T_1 = 333 \text{ K}$ ,  $T_2 = 363 \text{ K}$ ,  $T_3 = 393 \text{ K}$ ,  $T_4 = 423 \text{ K}$ ，共 4 个加速应力水平，产品工作的正常温度应力  $T_0 = 293 \text{ K}$ 。各应力下的样本量为 10，测试时间为： $t_1 = 100$ ,  $t_2 = 200 \text{ h}$ ,  $\dots$ ,  $t_{24} = 2400 \text{ h}$  共设置 24 个监测时间点。假设产品有三个性能参数，且服从三元联合正态分布，失效阈值分别设置为： $D_1 = 50$ ,  $D_2 = 60$ ,  $D_3 = 40$ 。

利用 Monte Carlo 仿真三个性能参数的退化数据，具体步骤如下：

第 1 步：从标准正态分布中产生三个独立同分布的随机数， $z_{1t}, z_{2t}, z_{3t}$ 。

第 2 步：令  $\mu^{(i)}(T, t) = \mu_0^{(i)} + \exp\left(p_{b^{(i)}} + \frac{q_{b^{(i)}}}{T}\right) \times t$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $\Sigma(T, t) = [\Sigma_{ij}(T, t)]_{3 \times 3}$

其中  $\Sigma_{ij}(T, t) = c_0^{(ij)} + \exp\left(p_{d^{(ij)}} + \frac{q_{d^{(ij)}}}{T}\right) \times t$ ,  $i = 1, 2, 3$ 。

第 3 步：令  $x^{(1)}(T, t) = \mu^{(1)}(T, t) + \beta_{11}(T, t)z_{1t}$ ,

$$x^{(2)}(T, t) = \mu^{(2)}(T, t) + \beta_{21}(T, t)z_{1t} + \beta_{22}(T, t)z_{2t},$$

$$x^{(3)}(T, t) = \mu^{(3)}(T, t) + \sum_{j=1}^3 \beta_{3j}z_{jt} = \mu^{(3)}(T, t) + \beta_{31}(T, t)z_{1t} + \beta_{32}(T, t)z_{2t} + \beta_{33}(T, t)z_{3t}$$

式中， $\beta_{ij}(T, t)$  可由下式得出：

$$\begin{bmatrix} \beta_{11}(T, t) & 0 & 0 \\ \beta_{21}(T, t) & \beta_{22}(T, t) & 0 \\ \beta_{31}(T, t) & \beta_{32}(T, t) & \beta_{33}(T, t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_{11}(T, t) & \beta_{12}(T, t) & \beta_{13}(T, t) \\ 0 & \beta_{22}(T, t) & \beta_{23}(T, t) \\ 0 & 0 & \beta_{33}(T, t) \end{bmatrix} = \Sigma(T, t)$$

其中， $\beta_{ij}(T, t) = \beta_{ji}(T, t)$ 。

根据上述第 1 步至第 3 步步骤就可以产生各应力水平下 24 次监测的三个性能参数的退化数据  $[x^{(1)}(t) \ x^{(2)}(t) \ x^{(3)}(t)]$ 。

第 4 步：重复第 1 步至第 3 步 10 次，就可以产生各应力水平下，10 个样本在各测试时刻的三个性能参数的退化数据，仿真试验完毕。

按照上述步骤，就可得到 4 组应力水平下的仿真多性能退化数据， $T_1 = 333 \text{ K}$  时仿真的一个样本的多性能退化参数的试验数据如图 1 所示。

下面就对仿真试验数据进行多元 Copula-ARMA 时间序列建模：

第 1 步：分别对各应力水平下，各样本的三个性能退化参数的退化数据进行趋势项提取，由于退化



数据为线性退化，我们采用一元线性回归方程( $y = p_1x + p_2$ )拟合的方法提取趋势项，以图 1 中的其中一个样本为例，对其退化数据进行趋势项提取。

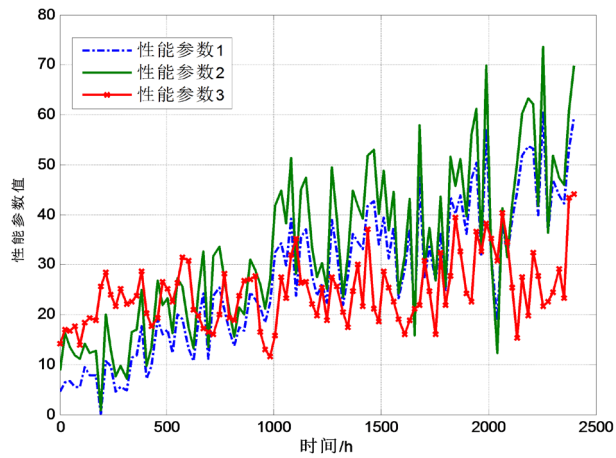


Figure 1. Simulation of degradation data of multi-performance parameters

图 1. 仿真多性能参数退化数据

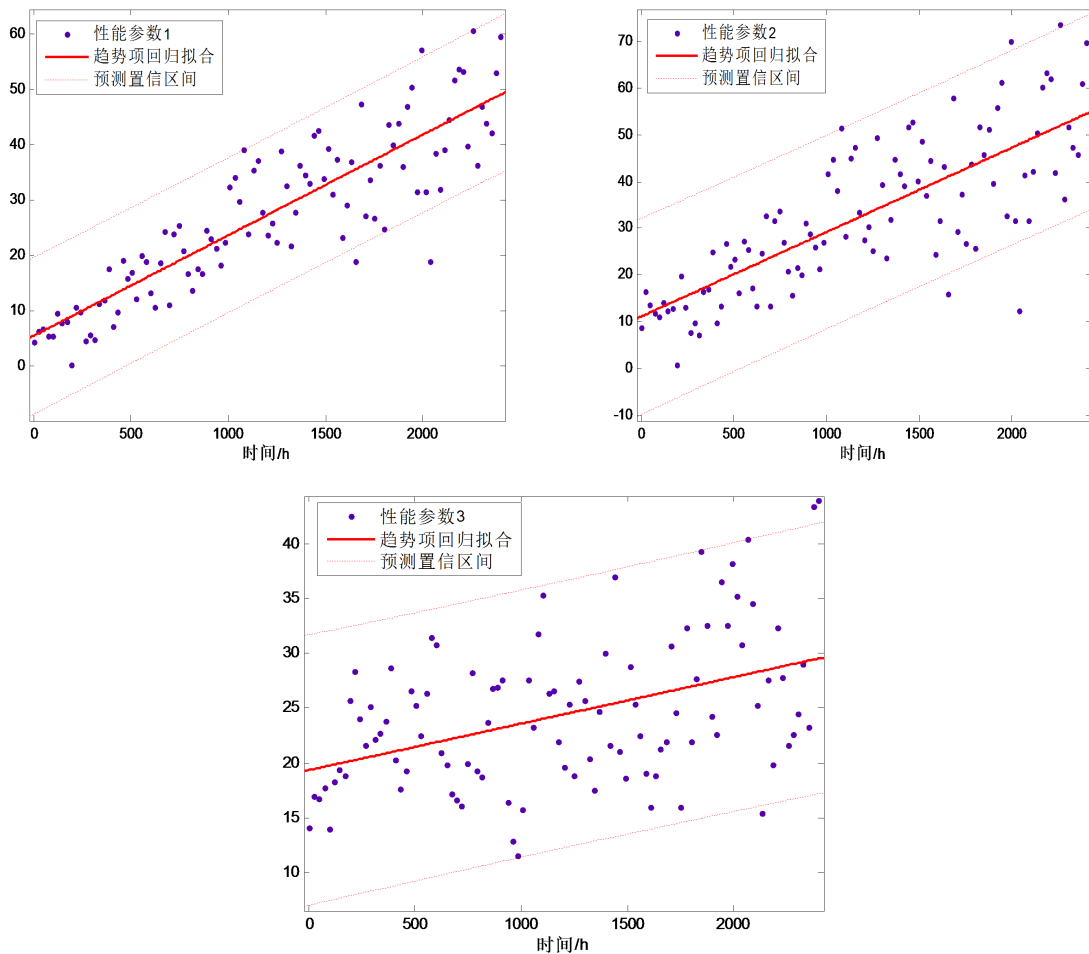


Figure 2. Linear regression fitting of trend term

图 2. 趋势项线性回归拟合

趋势项提取结果如表 1 所示，性能参数 3 的拟合精度较差，这主要由于一元线性回归拟合是最为简单的趋势项提取方法，因此对于信号特征相对复杂的退化数据，可利用 EMD 分解的趋势项提取方法，提高趋势预测精度。

**Table 1.** Trend item extraction of performance degradation data

**表 1.** 性能退化数据趋势项提取

参数	系数	系数估计值	95%置信区间	R-square
性能参数 1	$p_1$	0.01818	[0.0162, 0.02016]	0.7698
	$p_2$	5.473	[2.719, 8.227]	
性能参数 2	$p_1$	0.01811	[0.01518, 0.02104]	0.603
	$p_2$	11.06	[6.987, 15.13]	
性能参数 3	$p_1$	0.004243	[0.00252, 0.005967]	0.1942
	$p_2$	19.35	[16.95, 21.74]	

第 2 步：将时间变量  $t$  代入第 1 步拟合得到的趋势项回归方程，然后利用原始数据减去趋势项，得到性能退化数据的随机项原始数据序列。然后利用 ARMA 随机项时间序列模型建模，确定 ARMA 时间序列结构如下：

性能特征参数 1: ARMA(4, 3):

$$r_{1(t)} = 0.9567r_{1(t-1)} + 0.4507r_{1(t-2)} - 0.5564r_{1(t-3)} + 0.1510r_{1(t-4)} + \varepsilon_{1t} - 0.2134\varepsilon_{1(t-1)} - 0.4538\varepsilon_{1(t-2)} + 0.2102\varepsilon_{1(t-3)}$$

性能特征参数 2: ARMA(4, 3):

$$r_{2(t)} = 0.8653r_{2(t-1)} + 0.4802r_{2(t-2)} - 0.6452r_{2(t-3)} + 0.1311r_{2(t-4)} + \varepsilon_{2t} - 0.3058\varepsilon_{2(t-1)} - 0.7264\varepsilon_{2(t-2)} + 0.3072\varepsilon_{2(t-3)}$$

性能特征参数 3: ARMA(2, 2):

$$r_{3(t)} = 0.9023r_{3(t-1)} + 0.2802r_{3(t-2)} + \varepsilon_{3t} - 0.8017\varepsilon_{3(t-1)} - 0.5962\varepsilon_{3(t-2)}$$

第 3 步：利用 Copula 函数构建三个性能特征参数之间的相关性，首先，根据随机项原始数据序列检验三个性能特征参数之间的相关性，而后对其联合 Copula 函数的参数进行估计，参数估计值如表 2 所示，得到三个性能特征参数 Copula 函数结构，通过最小经验距离比较，Gumble Copula 函数与理论值之间的距离最小，因此采用 Gumble Copula 函数描述相关性，结构如下式：

$$\begin{aligned} (\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t}, \varepsilon_{3t}) &\sim C_b \left( \phi \left( \frac{\varepsilon_{1t}}{\sigma_1} \right), \phi \left( \frac{\varepsilon_{2t}}{\sigma_2} \right), \dots, \phi \left( \frac{\varepsilon_{3t}}{\sigma_3} \right) \right) \\ &= \exp \left\{ - \left[ \left( -\ln \phi \left( \frac{\varepsilon_{1t}}{\sigma_1} \right) \right)^\theta + \left( -\ln \phi \left( \frac{\varepsilon_{2t}}{\sigma_2} \right) \right)^\theta + \left( -\ln \phi \left( \frac{\varepsilon_{3t}}{\sigma_3} \right) \right)^\theta \right]^{1/\theta} \right\} \end{aligned}$$

第 4 步：通过上述第 1 步至第 3 步，就确定了式(7)的多性能特征参数 Copula-ARMA 多元混合时间序列模型，然后可对多性能特征参数的退化趋势进行预测。

第 5 步：根据预先给定的退化失效阈值，外推性能退化轨迹首次穿越失效阈值的时间，即失效时间，然后按照拟合优度检验法对各应力水平下得到的伪失效寿命数据进行分布的假设检验，选择伪失效寿命



数据可能服从的分布形式。将外推得到的伪失效寿命数据视为完全寿命数据，通过模型对伪寿命数据进行假设检验，发现寿命服从威布尔分布。限于篇幅，在此不再给出第 5 步至第 6 步的详细过程，寿命统计原理详见参数文献[8]。

**Table 2.** Estimated values of Copula parameters  
**表 2.** Copula 参数估计值

Copula	$\theta$
Normal	0.5021
Frank	0.5803
Clayton	3.1894
Gumbel	1.4286

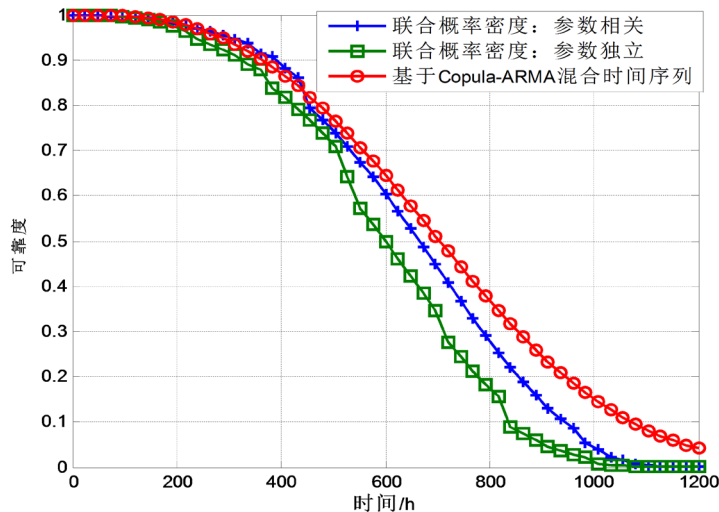
第 6 步：根据加速模型外推得到产品在正常工作应力水平 293 K 下的寿命特征信息，可靠度预测的函数如式(8)。

$$R(t) = \exp \left[ - \left( \frac{t}{\hat{\eta}_{293\text{K}}} \right)^{\hat{m}_{293\text{K}}} \right] = \exp \left[ - \left( \frac{t}{799.81} \right)^{2.86} \right] \quad (8)$$

基于联合概率密度求解多性能参数退化数据的可靠度公式如下：

$$R(t) = \int_0^{40} \int_0^{60} \int_0^{50} \left\{ (2\pi)^{-\frac{3}{2}} |\Sigma_{293\text{K}}(t)|^{-\frac{1}{2}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \hat{\boldsymbol{\mu}}_{293\text{K}}(t))^T \Sigma_{293\text{K}}^{-1}(t) (\mathbf{x}_t - \hat{\boldsymbol{\mu}}_{293\text{K}}(t))^T \right] \right\} dx_1 dx_2 dx_3 \quad (9)$$

一般很难用解析积分的方法求解式(9)的可靠度，需借助数值积分的方法进行近似，求解过程非常复杂，对计算机硬件要求高。如图 3 所示，两种方法可靠性预测对比：



**Figure 3.** Reliability prediction results  
**图 3.** 可靠性预测结果

从可靠性预测曲线可以看出，基于 Copula-ARMA 混合时间序列的方法预测的可靠度结果非常接近于仿真理论曲线，然而，通过多元正态联合概率密度的积分求解非常复杂，且本文是通过仿真方法在已知联合概率分布的均值向量和协方差矩阵基础上得到可靠度的，在工程实际中利用多元联合概率密度求

解时还需要对方差矩阵进行参数估计,这样就更增加了求解过程的复杂性。而 Copula-ARMA 能够更好地保持原始数据的所有统计特性,时间序列模型建立的退化模型将退化数据分为趋势项和随机项,在一定程度上提高了退化模型假设带来的误差,且通过 Copula 函数描述相关性,大大降低了联合概率密度函数求解的复杂性。

## 5. 小结

在工程实际中,大多数电子产品具有多个性能特征参数,基于多个性能参数退化数据的可靠性预测问题更加复杂,解决问题的方法主要有两种,一是假设多个性能参数之间相互独立,然后按照串联系统的方法进行处理,这种方法具有简单快速的优点,缺点是分析不够全面,预测结果误差较大,二是充分考虑性能参数之间的相关性,如联合密度法和状态空间法,缺点是当性能参数较多时,计算量较大,且建模复杂。本文从多元预测的角度分析,提出了基于 Copula-ARMA 混合时间序列的多性能退化特征量建模方法,有效解决了多元性能退化数据相关条件下建模复杂、计算量大的问题,相对于一元时间序列,可靠性预测的精确度更高,结果更加客观。即考虑多性能参数随时间的退化又可将互相之间的相关性进行描述,弥补了多元线性回归方法的不足。多元时间序列能够很好地解决多性能参数退化是非平稳随机过程的问题,将多性能退化参数的退化过程分解为非平稳部分和平稳部分,而后对其分别采用对应的模型进行建模描述。

## 参考文献

- [1] 孙绍辉,王华伟,陈福立.多元退化信息的航空发动机可靠性预测[J].火力与指挥控制,2013,38(11):32-35.
- [2] 王浩,周月阁,刘守文,陈金明.基于多元性能加速退化的航天器 DC/DC 电源寿命评估方法研究[J].航天器环境工程,2017,34(4):439-445.
- [3] 袁莉芬,朋张胜,何怡刚.基于 Copula 函数的光纤陀螺贮存可靠性评估[J].电子测量与仪器学报,2020,34(8):58-65.
- [4] Pan, Z. and Balakrishnan, N. (2011) Reliability Modeling of Degradation of Products with Multiple Performance Characteristics Based on Gamma Processes. *Reliability Engineering & System Safety*, **96**, 949-957. <https://doi.org/10.1016/j.ress.2011.03.014>
- [5] 王孟.基于 Copula 函数的多元加速退化试验方法研究[D]:[硕士学位论文].杭州:浙江理工大学,2013.
- [6] 杨志远,赵建民,李俐莹,程中华,郭驰名.二元相关退化系统可靠性分析及剩余寿命预测[J].系统工程与电子技术,2020,42(11):2661-2668.
- [7] 胡启国,高展.多元参数退化的系统相关竞争失效可靠性评估方法[J].西北工业大学学报,2019,37(6):1191-1199.
- [8] 崑诗松,汤银才,王玲玲.可靠性统计[M].北京:高等教育出版社,2008.