基于五轴加工中心的涡轮叶片在机测量准确定 位方法研究

周朝进,陈光胜*

上海理工大学机械工程学院,上海

收稿日期: 2022年1月5日; 录用日期: 2022年2月17日; 发布日期: 2022年2月25日

摘要

以航空发动机涡轮叶片为研究对象,针对五轴在机测量平台在叶片旋转后测量坐标系偏移问题,提出了 一种基于ICP算法的配准定位方法,并基于该算法建立了配准目标函数。为了提高定位精度,针对涡轮 叶片加工精度在区域分布不均问题,依据曲率划分定位区域,选取曲率较小区域用于定位。基于涡轮叶 片的配准结果,给出了叶片定位中各轴向的定位误差和综合定位误差的计算公式,并提出迭代测量、二 次定位的方法提高定位精度,减小定位误差。通过实际加工叶片配准定位,定位精度在15微米左右,证 明该方案的有效性。

关键词

五轴在机测量,涡轮叶片,配准定位,定位误差

Research on Accurate Positioning Method of Turbine Blade in Machine Measurement Based on Five-Axis Machining Center

Chaojin Zhou, Guangsheng Chen*

School of Mechanical Engineering, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Jan. 5th, 2022; accepted: Feb. 17th, 2022; published: Feb. 25th, 2022

Abstract

Taking the aeroengine turbine blade as the research object, aiming at the measurement coordinate system offset of the five-axis on-board measurement platform after the blade rotates, a regis-

*通讯作者。

tration and positioning method based on ICP algorithm is proposed, and the registration objective function is established based on this algorithm. In order to improve the positioning accuracy, aiming at the uneven distribution of turbine blade machining accuracy in the region, the positioning region is divided according to the curvature, and the region with small curvature is selected for positioning. Based on the registration results of turbine blades, the calculation formulas of axial positioning error and comprehensive positioning error in blade positioning are given, and the methods of iterative measurement and secondary positioning are proposed to improve the positioning accuracy and reduce the positioning error. Through the actual processing of blade registration and positioning, the positioning accuracy is about 15 microns, which proves the effectiveness of the scheme.

Keywords

Five-Axis On-Board Measurement, Turbine Blade, Registration and Positioning, Positioning Error

Copyright © 2022 by author(s) and Hans Publishers Inc. This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0). <u>http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/</u> [cc] ① Open Access

1. 引言

随着国内经济实力的提升和军事技术的发展,自由曲面已经在航空航天、汽车行业、船舶制造、精 密设备、高档数控机床等领域有了广泛的使用,其中,涡轮叶片的制造和测量对于航空航天领域是一项 技术难点。当前国内的国产机床对于涡轮叶片的加工精度大约只能在 50 微米左右,因此对涡轮叶片的高 效率、高精度的测量及后续的超精加工提出了前所未有的迫切需求[1]。在机测量是提高叶片加工以及测 量效率的一种非常有用的解决方案,相比于离线测量,在机测量能把加工过程与检测过程高效地结合起 来,在加工复杂空间曲面的产品时有明显的优势,它自由度大,避免了对工件多次装夹造成的误差,缩 短制造周期,降低生产成本,同时能够对加工过程给予精确的指导,所以在气缸、叶片、整体叶轮以及 螺旋桨等这类结构复杂且为空间曲面的零件加工上有重要的研究意义[1]。

目前,国内的在机测量方案主要是传统的基于三轴加工中心的测量方式,五轴加工中心很少应用于 量测。传统的三轴定位方式主要还是利用加工坐标系进行偏置,将建模坐标系和测量坐标系通过对齐来 实现定位。国内外许多专家学者在定位这方面也做了许多科学研究。广西工业大学方瑞、陈岳坪等[2]人 利用量块、激光干涉仪通过对机床的定位精度进行补偿提高对复杂曲面的定位精度,这种方法减小了机 床的静态误差,同时提高机床的量仪精度,但是没有考虑到在对曲面定位过程中,五轴机床在加工复杂 曲面时带来的整体形状误差。于海祥等[3]人采用"基于多层感知器神经网络"的误差补偿方法,通过三 坐标测量仪计算出铣床的误差数据,并利用 MLP 神经网络模型来对这些数据进行训练,最后得到拟合的 误差曲面,实现了对工件的定位。郭前建[4]提出"基于机床空间误差的多模型融合预测"的算法,通过 对机床的三种误差(几何误差、热误差和切削力误差)建立最优化的空间误差模型,对空间误差补偿模型进 行设计,从系统层面出发,实现了对工件的定位。蔺小军[5]采用 CMM 测量机对叶片进行测量,提出了 基于流道线法的测量方式,并利用 L-BFGS-B 算法对叶片配准来实现对曲面加工质量的评估。Zhang 等[6] 提出了基于特征的自由曲面测量路径规划方法。

工件定位的主要目的在于选取测量坐标系,测量坐标系选取的准确与否对于之后叶片数据的采集、 叶片加工误差的分析有着不可忽视的影响。由于涡轮叶片是复杂曲面的一种,其表面上各个点的法向量 都各不相同,这给后续的测量以及测头半径的补偿带来了困难。常见的 CMM 三坐标测量仪是采用 3-2-1 法来实现对工件的定位[7],即三个点确定一个平面,两个点确定坐标系方向,一个点确定原点。这种方 法在三坐标测量仪上用得较多,只是这种方法有一个局限性就是需要工件上有一个确定的平面,而涡轮 叶片的表面一般是自由曲面,这就很难用 3-2-1 法去定位。

对于这种问题国内有许多学者也提出了不同的解决方法, 蔺小军等人[5]采用的一个解决方案是设计 一个特殊的测量夹具,这个测量夹具的楔型面与涡轮叶片安装楔型面配合,利用对测量夹具的定位来间 接得到叶片的定位,但这种方法会引入装夹误差并且需要更改装夹方式,设计专用夹具,过程繁琐,因 此,3-2-1定位法在涡轮叶片的在机测量方案中不适用。针对上述问题,本文提出了一种基于配准算法的 定位方法,该方法将机床上的曲面和理论曲面进行配准,实现了对机床上工件的准确定位,实验结果表 明了本文方法在减小了定位复杂度的同时提高了精度,证明了本文方法的有效性。

2. 涡轮叶片初定位

2.1. 涡轮叶片点云坐标变换

通过 UG 二次开发技术,可以得到涡轮叶片曲面上的任意一点在建模坐标系下的三维坐标及其空间 法向量,因此为了便于测量以及后续的数据分析,测头测量叶片曲面时的测量坐标系应当与建模坐标系 重合,这就需要在机床上利用测头对工件寻找测量原点,叶片在经过机床加工后,其加工坐标系和建模 坐标系之间的位置关系理论上是已知的,通过手动校正测头的测针偏心后,测量坐标系和加工坐标系只 是在 Z 轴上有一个距离偏置,因此只需对测头进行长度补偿即可将加工坐标系中曲面任意点的坐标转换 到到测量坐标系下叶片曲面任意点的坐标。

在实际对叶片进行测量时,叶片曲面上并不是所有点皆可在 XYZ 三轴下进行测量,有些点由于叶片 结构的原因,其法向指向 Z 轴负方向,在这种情况下测头若只是通过三轴移动,是无法测量到这些点的, 因此需要加入 A、C 两轴辅助测头测量。在建立测量坐标系后,叶片曲面上的点经过 A、C 轴旋转可以 得到新的理论点云坐标。但需注意的是,计算旋转矩阵时需注意 A、C 轴旋转顺序,即欧拉角顺序,常 见的 A、C 两轴摇篮式五轴机床其欧拉角顺序是 C、A,即 C 轴先旋转,其次 A 轴旋转,因此,叶片曲 面上旋转后的点坐标和每一点的法向量由公式(1)可得

$$\begin{cases} t = O'_{w} - O_{w} \\ \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P'_{o} = \mathbf{R} (P_{o} - t) + t$$

$$\mathbf{n}' = \mathbf{R} \mathbf{n}$$
(1)

式中, t 为转台旋转中心在测量坐标系中的坐标; O'_w 为转台旋转中心在机床坐标系中的坐标; O_w 为测量 坐标系原点在机床坐标系中的坐标; R 为 A、C 两轴的欧拉旋转矩阵; P_o 为旋转前曲面点在测量坐标系 下的坐标; P'_o 为旋转后曲面点在测量坐标系下的坐标; n 为旋转前曲面点在测量坐标系下的法向量; n' 为旋转后曲面点在测量坐标系下的法向量。

2.2. 涡轮叶片定位点的选取

涡轮叶片属于一类典型的自由曲面零件,这种零件的典型特点就是薄,并且由于其加工材料都是不 锈钢、蒙乃尔合金、INCONEL、钛和镍为基础的难加工合金材料,所以其加工精度也很难控制[8]。因此 可以认为涡轮叶片曲面是一个由多个不同精度的特征区域组成,其中叶片的加工精度主要与曲面的曲率 有关,可以认为曲面曲率越大,该区域的加工精度越低,曲率越小的区域,其加工精度越高。曲面的曲率有很多指标,常见的曲面曲率有高斯曲率、主曲率、平均曲率、法曲率等,但对于涡轮叶片测量的常用解决方案中,由于叶片曲面一般可分为U向和V向,因此叶片曲面的曲率可以用线曲率来表示,叶片曲面上每一点的曲率可以用该点在U向曲线上的曲率来表示,并且该曲率可认为直接与加工精度有关,因为刀轴在加工叶片时的走刀路线也是基于U向曲线。

由于涡轮叶片曲面加工精度与其U向曲线的曲率有关,因此将涡轮叶片曲面根据U向线曲率分成4 块区域,其中I区域和IV区域,II区域和III区域的曲率分别近似相同,而I区域和IV区域的U向曲率 要明显小于其他两块区域,因此,用来定位的测量点的选取主要还是考虑从I和IV区域选取,II区域和 III区域不用来选取定位测量点。如图1所示,首先将两块测量区域在U、V方向离散化成点云,为了保 证之后的定位精度足够高,每一块区域离散的点云中包含点的数量应当足够多,足够密,但若点云包含 的点的数量过多,就会增加定位算法所需的时间,因此在兼顾定位效率的情况下,利用 UG 在两块测量 区域中各选取 10 cm×10 cm的正方形区域,离散成 100×100个点,两块区域共计 20,000个点的点云数 据,每两个邻近点之间近似距离为 0.1 mm。之后从这 20,000个点云数据中选取用于涡轮叶片的定位测量 点定位测量点的选取应满足以下两个条件,1)为了实现对涡轮叶片的精准定位,测量点的数量及其分布 要尽可能表现出叶片的曲面特征,否则可能会落入局部解陷阱,出现定位错误,因此这种情况应该是尽 量避免的。2)为了保证测量的效率,减少对涡轮叶片定位所用时间,测量点的数量在满足条件1的情况 下应该足够少。因此在基于以上两方面的考虑,利用随机采样算法从 20,000个点云数据中随机采样 160 个点,并利用这 160个随机采样点进行定位,如图 2 所示。





图 2.160 个随机采样点

3. 涡轮叶片精细定位

叶片能实现精准测量的前提是叶片曲面在机床上能够被准确的定位,其定位的精确性直接会影响到 之后测头测量的精确性。由于叶片型面是曲面,因此在利用测头测量时应当采用测头法向靠近量测的方 式来测量曲面上任意点坐标,注意测量时需要先标定测头各个方向的误差,由于机床测量输出的坐标都 是测头的球心坐标,所以需要对输出坐标补差才能得到叶片曲面上的真实坐标。

3.1. 测量点与模型理论点配准理论

由于机床加工误差和旋转误差的影响,实际测量坐标系和理论测量坐标系不会精确的重合,这样就 会使测量得到的坐标和实际曲面上点的坐标存在着系统误差,这样也不利于后期的二次加工。因此,在 对测量数据进行处理时,最重要的就是要将测量得到的点的坐标和叶片曲面模型理论点的坐标进行一次 配准,通过 ICP (Iterative Closest Point)配准算法来将叶片实测点相对于理论模型点的误差达到最小,从而 减小系统误差的影响。由于测头一次测量所得到的点的坐标误差可能较大,因此可以通过迭代测量配准 定位的方式来提高对叶片的定位精度。

3.1.1. 刚性变换矩阵

测量曲面得到的点坐标和模型理论点坐标配准的目的是将两组点云坐标数据通过旋转和平移使其重合,这个过程可用一个映射变换来表示。假设映射变换为*H*,那么*H*可以用公式(2)来表示。

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & t_x \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & t_y \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & t_z \\ v_x & v_y & v_z & S \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} t_x & t_y & t_z \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} v_x & v_y & v_z \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \end{cases}$$

$$(2)$$

其中, *H* 可以在公式(3)中由*A*、*T*、*V*、*S*矩阵或向量等四部分组成。*A*为旋转矩阵, *T*为平移向量, *V*为透视变换向量, *S*为整体的比例因子。由于测量点和理论模型数据点之间的变换属于刚体变换,没有发生形变,所以*V* 可以设为零,并且刚体变换时没有发生放缩,比例因子*S*=1。那么映射变换*H* 可以用公式(4)表示为:

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_{3\times3} & \boldsymbol{T}_{3\times1} \\ \boldsymbol{O}_{1\times3} & \boldsymbol{S} \end{bmatrix}$$
(4)

其中旋转矩阵 R_{3x3} 和平移矩阵 T_{3x1} 可以通过公式(5)和(6)来表示:

$$\boldsymbol{R}_{3\times3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
(5)

$$\boldsymbol{T}_{3\times 1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{t}_x & \boldsymbol{t}_y & \boldsymbol{t}_z \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$
(6)

其中 α 、 β 、 γ 分别表示点沿x、y、z轴的旋转角度, t_x 、 t_y 、 t_z 分别表示点沿x、y、z轴的平移量。

3.1.2. 映射变换矩阵的参数估计

将两个不同坐标系下的点 X 和 X'进行坐标变换时,可以通过公式(7)来实现转换:

$$\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{R}_{3\times 3}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{T}_{3\times 1} \tag{7}$$

式中, $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_i & y_i & z_i \end{bmatrix}^T$, $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x'_i & y'_i & z'_i \end{bmatrix}^T$ 。

由公式(4)可知,映射变换矩阵主要由 R_{3x3} 和 T_{3x1} 组成,其中含有六个未知数 $\alpha \times \beta \times \gamma \times t_x \times t_y \times t_z$ 。 要唯一确定这六个未知参数,需要六个线性方程,即至少需要在待匹配点云重叠区域找到 3 组对应点对, 且 3 组对应点对不能共线,才可以求解这六个参数的值,进而完成映射矩阵的参数估计。因此为了进一 步提高映射变换矩阵的参数估计精度,需要选择尽可能多的对应点对,详情可看 1.3 节。

3.1.3. 配准目标函数

在需要匹配的模型理论点云和测量点云数据中,可以将理论点云表示为源点集,测量点云表示为目标点集,其中令 $P = \{p_i | p_i \in R_3, i = 1, 2, \dots, n\}$ 表示为源点集, $Q = \{q_i | q_j \in R_3, j = 1, 2, \dots, m\}$ 表示为目标点集, m n i = P用于表示点集中点的个数。设旋转矩阵为R,平移矩阵为t,用f(R,t)表示源点集P经过变换矩阵(R,t)后与目标点集Q之间的误差。则求解最优变换矩阵的问题就可以转化为求满足 min f(R,t)的最优解(R,t)。其中f(R,t)用公式(8)定义为:

$$f(\boldsymbol{R},\boldsymbol{t}) = \sum_{i=1}^{n} \|\boldsymbol{R}\boldsymbol{p}_{i} + \boldsymbol{t} - \boldsymbol{q}_{i}\|^{2}$$
(8)

3.2. ICP 算法原理与步骤

ICP 算法的基本原理是:分别在带匹配的目标点云 P 和源点云 Q 中,按照一定的约束条件,本文中用的是 KNN 搜索[9]算法,找到最邻近点 (p_i,q_i) ,然后计算出最优匹配参数 R 和t,使得误差函数最小。误差函数 E(R,t)为:

$$E(\boldsymbol{R},\boldsymbol{t}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left\| \boldsymbol{q}_{i} - (\boldsymbol{R}\boldsymbol{p}_{i} + \boldsymbol{t}) \right\|^{2}$$
(9)

其中n为最邻近点对的个数, p_i 为目标点云P中的一点, q_i 为源点云Q中与 p_i 对应的最近点, R为旋转矩阵, t为平移向量。

ICP 算法步骤:

步骤 1 计算最近点集:对于目标点集 Q 中点集 $q_i \in Q$,找到与源点集 P 中最邻近的对应点集 $p_i \in P$ 如图 3 所示,使得 $||q_i - p_i||$ 的值即对应点之间的欧氏距离最小。

步骤2 计算变换矩阵:利用 SVD 分解算法计算旋转矩阵 R 和平移矩阵t,使得误差函数 E(R,t) 最小。

步骤 3 应用变换矩阵:对源点集 P 使用上一步求得的旋转矩阵 R 和平移矩阵t 进行旋转和平移变换,得到新的源点集 P'。



Figure 3. Schematic diagram of adjacent point selection 图 3. 邻近点选取示意图

步骤4 目标函数计算与阈值判断:在新的源点集 P'找到与步骤一中的点集 q_i 最邻近的点集 $p'_i \in P'$, 计算 p'_i 与对应点集 q_i 的平均距离:

$$d = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left\| p_i' - q_i \right\|^2 \tag{10}$$

如果*d*小于某一给定的阈值或者迭代次数大于预设的最大迭代次数,则停止迭代计算,否则返回步骤2。 步骤5 配准结束。

上述解法的关键是步骤 3 中旋转矩阵 *R* 和平移矩阵*t* 的求法,这是一个非线性规划问题。因为测量 坐标系和理论模型坐标系近似重合,测量数据的姿态比较接近全局最优解,所以可以通过 ICP 算法来进 行精确配准。

3.3. 叶片定位误差计算

如何评价叶片的定位精度是叶片定位过程中的关键,其定位精度与后续的测量精度有着密切关系。 定义 *p* 点为测量得到的点的坐标,*q* 点为 CAD 模型上与 *p* 点最接近的理论点坐标,那么可以得到以下的 定位误差:

 $e_{y} = y_{p} - y_{a}$

1) 叶片在 X 轴方向上的定位误差:

$$e_x = x_p - x_q \tag{11}$$

式中 x_p 为p点在x轴的坐标, x_a 为q点在x轴的坐标。

同理可得:

叶片在Y轴方向上的定位误差:

叶片在Z轴方向上的定位误差:

$$e_{z} = z_{z} - z_{z} \tag{13}$$

2) 叶片的综合定位误差:

$$e_{\text{total}} = \sqrt{e_x^2 + e_y^2 + e_z^2}$$
 (14)

4. 实验验证

为了验证该测量方案的可行性和有效性,需要建立涡轮叶片模型实际加工测量。可以利用三次贝赛尔 曲线[10]来对涡轮叶片的外形轮廓建模,如图 4,并使用 UG 的后处理生成 RTCP 加工程序,用于五轴机床 加工,加工后的涡轮叶片如图 5。通过对曲率较小、精度较高区域的 20,000 个离散点中随机采样 160 个点 用于测量定位,测量点的分布应该尽可能地包含曲面信息,图中 160 个采样点基本能满足定位点分布的要 求。将测量后的 160 个点导入理论配准模型中进行第一次配准,配准后的叶片综合误差在 0.1452~0.0084, 很显然第一次配准定位误差较大,其主要原因在于配准前实测点法向和理论点法向有较大偏差,因此测量 误差较大,为了解决这一问题,可以利用第一次配准后的点进行迭代测量定位,即二次定位。

将第二次测量得到的点导入到配准理论模型中,可以发现第二次配准后的叶片综合误差在 0.0004~0.028,大部分点的综合误差在 0.015 左右,与第一次定位综合误差相比,第二次定位综合误差有 了很明显的优化,如图 6、图 7 所示,图 6 是第二次定位误差的分布图,由图可知,定位误差较大的区 域主要分布在叶片曲面的两侧,误差在 0.02 左右,但区域较小,其余大部分区域的误差控制在 0.01 左右, 图 7 是所有采样点的定位误差,可以看到大部分点的定位误差在 0.015 及以下,只有少部分点误差达到 0.02,因此综合来看定位精度更高了。

(12)







Figure 5. Turbine blade 图 5. 涡轮叶片实图



Figure 6. Distribution of sample points position error 图 6. 采样点定位误差分布平面图



Figure 7. Error of sample points position 图 7. 采样点定位误差

Table 1. Three order registration positioning error table

 表 1. 三次序配准定位误差表

配准定位次序	最小定位误差	最大定位误差
第一次定位	0.0084	0.1452
第二次定位	0.0004	0.0280
第三次定位	0.0008	0.0282

在成功实现二次定位后,为了提高定位精度尝试再次迭代测量定位,即三次定位,根据测量结果可 以发现,第三次配准后的叶片综合误差在 0.0008~0.0282,大部分点的综合误差依然在 0.014 左右,这与 第二次定位的综合误差相差不大,如表 1,显然叶片综合定位误差在第二次定位后已达到收敛值,因此 在机测量的定位最多定位两次即可提高定位精度。

参考文献

- [1] 吴雁, 吕博鑫, 吕仕强, 郑刚. 整体叶轮系零件制造精度关键技术研究综述[J]. 现代制造工程, 2017(1): 151-156.
- [2] 方瑞,陈岳坪,谢梦敏,等. 数控机床在线检测系统的定位误差补偿实验研究[J]. 机床与液压, 2020(3): 70-73.
- [3] 于海祥. 基于 MLP 神经网络的数控铣床几何误差补偿方法[J]. 机械设计与制造, 2017(8): 140-143.
- [4] 郭前建,赵国勇,程祥,等.双转台五轴机床空间误差补偿技术研究[J].机械工程学报,2016,52(13):6.
- [5] 蔺小军, 单晨伟, 王增强, 史耀耀. 航空发动机叶片型面三坐标测量机测量技术[J]. 计算机集成制造系统, 2012, 18(1): 125-131.
- [6] Zhang, S.G., Ajma, A., Woottona, L.J. and Chisholma, A. (2000) A Feature-Based Inspection Process Planning System for Co-Ordinate Measuring Machine (CMM). *Journal of Materials Processing Technology*, **107**, 111-118. <u>https://doi.org/10.1016/S0924-0136(00)00726-3</u>
- [7] 王晓飞. 复杂曲面测量规划及定位技术研究[D]: [博士学位论文]. 天津: 天津大学, 2014.
- [8] 李涤尘, 鲁中良, 田小永, 张航, 杨春成, 曹毅, 苗恺. 增材制造——面向航空航天制造的变革性技术[J/OL]. 航空学报. <u>http://kns.cnki.net/kcms/detail/11.1929.V.20210429.1424.042.html</u>, 2021-04-29.

- [9] 金元浩, 房勇, 卢焱. 基于 K-NN 最邻近点算法的因子提取方法及量化策略研究[J]. 数学的实践与认识, 2021, 51(19): 106-119.
- [10] 彭茂林,杨自春,曹跃云,初珠立.基于贝赛尔曲线和粒子群算法的涡轮叶片型线参数化建模[J].中国电机工程 学报,2012,32(32):101-108,前插16.