

基于优化的NURBS曲面 G^1 连续拼接实现

李嘉诚, 吴雅南

上海理工大学, 上海

收稿日期: 2022年12月28日; 录用日期: 2023年1月22日; 发布日期: 2023年1月29日

摘要

航天飞机、汽车数字模型等零件对拼接处要求 C^1/G^1 连续, 因此本文提出面向NURBS曲面进行 G^1 连续性优化算法理论。首先根据NURBS曲面求取连续性方程并作为约束, 通过设置控制点与权值作为优化目标, 利用拉格朗日乘子法进行约束求解得到 G^1 连续后的控制点和权值, 将得到的控制点和权值带回到原曲面实现在拼接处 C^1/G^1 连续。为了保证曲面在优化后变化尽可能的小, 将变化前后的控制点与权值乘积作为优化问题, 控制点前后变化的差值为优化条件, 通过设计算法将数值经过数次迭代得到NURBS曲面 C^1/G^1 拼接时的最优解。结果表明, 该方法能够实现控制点及权值的数值优化, 并对于NURBS曲面高阶连续优化、多片拼接以及NURBS三维模型的连续性优化提供借鉴意义。

关键词

NURBS, G^1 连续, 优化求解, 多片拼接

Research on G^1 Continuity Optimization Theory Based on NURBS Representation Surface

Jiacheng Li, Yanan Wu

University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai

Received: Dec. 28th, 2022; accepted: Jan. 22nd, 2023; published: Jan. 29th, 2023

Abstract

Space shuttle, automobile digital model and other parts require C^1/G^1 continuity at the splice, so

this paper proposes G^1 continuity optimization algorithm theory for NURBS surfaces. First, the continuity equation is obtained according to the NURBS surface and used as the constraint. By setting control points and weights as the optimization objective, the constraint solution is performed using the Lagrange multiplier method to obtain the control points and weights after G^1 continuity. The control points and weights are brought back to the original surface to achieve C^1/G^1 continuity at the splice. In order to ensure that the surface changes as little as possible after optimization, the product of the control points before and after the change and the weight value is taken as the optimization problem, and the difference between the changes of the control points before and after the change is taken as the optimization condition. The optimal solution for NURBS surface C^1/G^1 splicing is obtained through several iterations of the design algorithm. The results show that the method can realize the numerical optimization of control points and weights, and provide reference for the higher-order continuous optimization of NURBS surfaces, multi piece splicing, and continuity optimization of NURBS three-dimensional models.

Keywords

NURBS, G^1 Continuity, Optimization Solution, Multi Piece Splicing

Copyright © 2023 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

样条曲面拼接技术常用于三维模型的构建, 是曲面造型中常用方法。为了利用 NURBS 曲面对机械零件进行表达, 可采用创建式[1]或重建式[2]模型构建。重建式方法应用更为广泛, 对于曲线曲面的拟合范围较大, 容易丢失细小特征存在误差。创建式方法则更加符合建模习惯, 需要手动计算曲线、曲面和体的控制点、节点矢量等参数, 可以表达一些细小特征。

NURBS 曲面拼接在公共边界处多为 C^0 连续, 对于公共边界出现尖点的情况会导致分析结果数值偏大, 不符合机械零件的加工要求。在模型表达过程中, 对于一些精度要求较高的模型, 采用 C^0 连续往往难以达到分析要求, 其得到的结果比较差。因此, 对于模型的构建实现 G^1 连续优化非常有必要。传统 NURBS 曲面实现 G^1 拼接时, 将某一曲面上的参数设定为 0, 修改另一曲面参数, 这种方法会导致曲面出现变形过大导致的曲面形变情况。

针对利用 B 样条连续拼接, 赵岩[3]提出对于单节点和重节点双五次曲面连续性条件, 陆亚文等人[4]提出一种用于 NURBS 曲面 G^2 光滑拼接算法, 对于精确控制双片 NURBS 曲面的 G^1 连续具有重要意义。王崇[5]提出通过反求控制点的位置, 利用 NURBS 曲面的连续性条件进行约束, 实现了 NURBS 曲面近似光滑拼接的办法。在 NURBS 曲面研究上, 车翔玖, 梁学章等人[6][7]提出了实现 NURBS 曲面拼接的 G^1 、 G^2 连续条件。陆亚文等人[8]采用调整参数思想, 通过设定内部控制点将插值点作为参考, 达到实现曲 G^2 光滑拼接的效果, 此方法相较于传统 NURBS 曲面拼接方法有更好的局部修改性质。

基于 B 样条和 NURBS 的不同以及目前的研究, 本文将主要探讨 NURBS 曲面在拼接时, 根据 NURBS 曲面方程性质, 求取其拼接时的连续性条件做约束, 以控制点和权值的变化情况作为优化问题。通过设置优化边界条件, 多次迭代得到最优解, 实现对边界处连续性进行优化, 建模质量的提高, 通过求解模型雅可比数值验证算法的准确性和鲁棒性。

2. NURBS 曲面连续性基础理论

2.1. NURBS 基础理论

B 样条在表达自由曲线曲面时, 具有更好的优势, 但是当曲线曲面是初等曲线曲面时, 利用 B 样条进行造型表达就显得捉襟见肘。因此, 为了弥补 B 样条表达的缺陷, 就有学者提出非均匀有理 B 样条 (NURBS) 的造型方式。其相较于 B 样条, 增加了权因子, 用于控制曲线到控制多边形的距离, 采用该造型方式, 能够更好的表达初等曲线曲面。

由于非均匀有理 B 样条也属于 B 样条范畴, 因此其继承了 B 样条的所有性质。其主要包括以下几个特性: 1) 仿射不变性: 经过变化后的 NURBS 曲线曲面仍保持原来的性质不发生改变; 2) 连续且可微: NURBS 的基函数在节点矢量集合中无限次可微; 3) 局部修改性: 对于表达 NURBS 曲线曲面上的控制点, 可以通过修改局部控制点 P 时, 该过程仅对控制点 P 对应的矢量集合有效; 4) 非零性: 在任意半开区间的矢量集合中, 至多存在 $p + 1$ 个非零的基函数数值。

NURBS 曲线曲面的表达式主要由基函数和权因子组成, 基函数可以通过递推公式求解得到。如下所示为基函数的表达:

$$N_{i,0}(u) = \begin{cases} 1, & \text{若 } u_i \leq u < u_{i+1} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (1)$$

$$N_{i,p}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+p} - u_i} N_{i,p-1}(u) + \frac{u_{i+p+1} - u}{u_{i+p+1} - u_{i+1}} (u) \quad (2)$$

其中: $N_{i,p}(u)$ 表示第 i 个 p 次 B 样条基函数, $i \in [0, n]$, u_i 称为节点, 节点矢量 $U = \{u_0, u_1, \dots, u_m\}$ 是一个单调不减的实数序列。

当曲线曲面次数为 p 时, 可以表示为:

$$C(u) = \frac{\sum_{i=0}^n \omega_i N_{i,p}(u) P_i}{\sum_{i=0}^n \omega_i N_{i,p}(u)} \quad (3)$$

其中, P_i 是曲线上的控制点, ω_i 是控制点对应的权值, $0 \leq \omega_i \leq 1$, 首末控制点权重大于 0。

值得注意的是, 当权值大小为 1 的时候, NURBS 退化成 B 样条曲线, NURBS 也因此继承了 B 样条所有性质, 且可以用于表达圆锥曲线。权值的大小影响曲线靠近控制多边形的距离, 当权值越大, 曲线就越接近控制多边形, 反之亦然。

对于曲面在 U 、 V 方向次数分别为 p^u 、 p^v 的模型, 当给定曲面上控制点 $P_{i,j}$, 以及对应的权值 $\omega_{i,j}$ 。可以用表达式表达为:

$$S(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \omega_{i,j} N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) P_{i,j}}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \omega_{i,j} N_{i,p}(u) N_{j,q}(v)} \quad (4)$$

NURBS 曲面具有和 B 样条曲面同样的性质。

2.2. 连续性基础理论

为了研究曲面的连续性, 需要先理解曲线连续性的相关内容。曲线曲面间光滑度的度量主要包含: 参数连续性和几何连续性。参数连续性是指组合参数曲线拼接处有 n 阶的左右导数相同, 可以实现 n 阶

可微, 一般用 C^n 表示, 几何上 C^0, C^1, C^2 分别表示曲线曲面的形状、切线方向以及曲率连续; 几何连续性是指于切线、切平面、曲率等几何量所定义的曲线和曲面拼接处的连续性。 G^0 连续与 C^0 连续一致; G^1 连续又称为切平面连续, 在其公共连接线处具有处处连续变化的切平面或者相同的法线方向; G^2 连续又称为曲率连续, 要求在公共连接线有处处相同的法曲率, 如下图 1 所示为几何连续的几种情况。

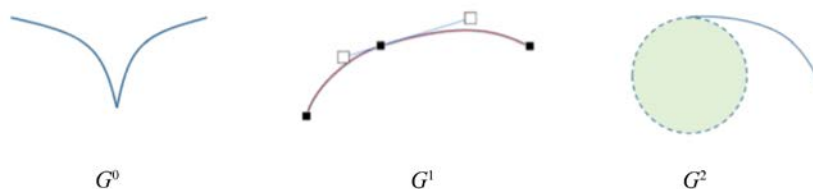


Figure 1. Geometric continuity
图 1. 几何连续

由于参数连续性比较严格, 在几何设计中不够直观, 并且严重依赖于参数的选择, 因此对于同一条曲线, 当其参数发生变化时, 其参数连续性也会发生改变。因此, 在本文中衡量模型连续性则采用几何连续性, 优化后的 NURBS 面片的雅可比值与优化前的雅可比值进行对比验证优化算法的有效性。

3. 双片拼接 G^1 连续性条件

3.1. B 样条曲面 G^1 连续性条件

传统 B 样条曲面在拼接时, 如图 2 所示。 S^1, S^2 分别表示两个曲面参数方程, 其连接处需要严格满足 C^0/G^0 连续, 为了实现其连接处的控制点满足 G^1 连续, 就需要求解 B 样条的 G^1 连续性方程。

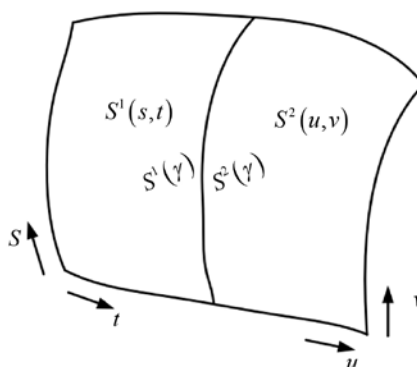


Figure 2. Splicing two NURBS surfaces
图 2. 两 NURBS 曲面拼接

模型拼接如上图 2 所示, 其中 S^1, S^2 具有相同的 v 方向, 在拼接处的两边 t 和 u 方向相反, 根据 B 样条曲线曲面的 G^1 连续性条件方程为:

$$\alpha(v) \frac{\partial S^1}{\partial t}(0, s) + \beta(v) \frac{\partial S^1}{\partial t}(0, s) + \gamma(v) \frac{\partial S^2}{\partial u}(0, v) = 0 \tag{5}$$

其中, $\alpha(v), \beta(v), \gamma(v)$ 是分段多项式函数, $\frac{\partial S^1}{\partial t}(0, s)$ 表示 S^1 对 $(0, v)$ 处, 对 u 方向求偏导, 对其化简可

得:

$$S_u^1(0, v) = \alpha S_u^2(0, v) \tag{6}$$

其中, α 为连续性系数。

3.2. NURBS 样条曲面 G^1 连续性条件

由此, 根据 B 样条连续性方程可以推导 NURBS 曲面的连续性方程。假设两 NURBS 曲面分别为 B^1 、 B^2 在拼接处需要先实现 G^0 连续拼接, 即两者具有公共连接线。想要实现求解 NURBS 曲面连续性条件就需要先对曲面方程进行求导, 根据 NURBS 曲面公式可以令 $X = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \omega_{i,j} N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) P_{i,j}$, $Y = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \omega_{i,j} N_{i,p}(u) N_{j,q}(v)$, 由此曲面表达式可以简写成:

$$N = \frac{X}{Y} \tag{7}$$

对其进行求导可以得到:

$$N_u = \frac{X_u - N * Y_u}{Y} \tag{8}$$

因此通过计算 NURBS 曲面再拼接处 $(0, v)$ 处的偏导矢并带入到上述求导公式可以得到:

$$N_u(0, v) = \sum_{j=0}^m N_{j,q}(v) \frac{P}{u_{p+1} w_{0,v}} (P_{1,v} - P_{0,v}) \tag{9}$$

根据公式分析, NURBS 曲面连续性取决于曲面上控制点、权值以及节点矢量有关, 将上述公式带入到了 G^1 连续公式可以得到其 G^1 连续性方程, 当两个曲面次数 p 、节点矢量 u 都相同时:

$$\frac{w_{1,i}}{w_{0,i}} (P_{1,i} - P_{0,i}) = \alpha \frac{w'_{1,i}}{w'_{0,i}} (P'_{1,i} - P_{0,i}) \tag{10}$$

其中, w 和 w' 分别表示两个表面上的权值, $P_{1,i}$ 、 $P_{0,i}$ 和 $P'_{1,i}$ 分别表示 B^1 和 B^1 、 B^2 公共边界以及 B^2 内部控制点, α 为连续性系数。

求解得到 NURBS 曲面拼接 G^1 连续条件之后, 将其作为约束用于实现 G^1 连续优化算法的设计。

3.3. 构建优化问题

根据两个 NURBS 曲面拼接 G^1 连续性条件设计其拼接处连续性优化算法, 由于 NURBS 曲面的连续性与其控制点、权值和节点矢量相关, 为了使优化算法更加简洁。采用两个曲面次数和节点矢量都相同, 因此可以确定 G^1 连续性优化变量: 控制点和权值。

根据控制点和权值的变化, 为了实现 G^1 连续拼接, 并且能够最小化控制点与权值的变化保证 NURBS 曲面网格质量, 可以采用最小二乘法将控制点和权值的乘积设置优化约束目标。通过将 G^1 连续性条件作为约束, 连续性系数设为 1, 可以得到其优化项:

$$\min \sum_{j=1}^{n-1} \left(\|P_{1j} \omega_{1j} - \bar{P}_{1j} \bar{\omega}_{1j}\|^2 + \|P'_{1j} \omega'_{1j} - \bar{P}'_{1j} \bar{\omega}'_{1j}\|^2 \right) \tag{11}$$

其中, $\bar{P}_{1j} \bar{\omega}_{1j}$ 、 $\bar{P}'_{1j} \bar{\omega}'_{1j}$ 表示优化前控制点和权值的乘积, $P_{1j} \omega_{1j}$ 、 $P'_{1j} \omega'_{1j}$ 表示优化后控制点与权值的乘积。

根据公共拼接处的曲面控制点与权值的关系可以得到上述优化项满足的约束条件为:

$$2P_{0j} = P_{1j} + P'_{1j} \tag{12}$$

综合其优化项以及约束条件可以采用拉格朗日乘子法进行求解, 其中 λ 是拉格朗日乘子:

$$L = \sum_{j=1}^{n-1} \left(\|P_{1j}\omega_{1j} - \bar{P}_{1j}\bar{\omega}_{1j}\|^2 + \|P'_{1j}\omega'_{1j} - \bar{P}'_{1j}\bar{\omega}'_{1j}\|^2 \right) + \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j (2P_{0j} - P_{1j} - P'_{1j}) \quad (13)$$

4. 实现 G^1 连续的优化问题求解

4.1. 算法设计

NURBS 面片在拼接时, 需要确定每一片上需要优化的控制点, 以方便进行迭代优化, 选择迭代停止条件为: $O(n) \leq 1.0 \times 10^{-3}$ 。

根据公式设计 NURBS 曲面 G^1 拼接优化算法:

Step 1. 输入两片 NURBS 曲面, 搜索两曲面重合的部分, 即: 实现 C^0 连续的公共控制点记为, 并存储到容器中记为 P_{0j} , 然后遍历两片的边界控制点分别记为 P_1 、 P_2 ;

Step 2. 根据 P_1 、 P_2 之间的关系确定, 两片 NURBS 曲面拼接的边是: u 边、 v 边、 u 的对边还是 v 的对边;

Step 3. 确定两曲面分别再 u 、 v 方向上控制点的个数, 分别记作 a 、 b , 计算 P_1 、 P_2 与控制点个数之间的关系, 找到其内部控制点存入到容器中, 分别记作 I_1 、 I_2 , 并将其相邻控制点作为边界条件;

Step 4. 根据目标函数, 以及等式约束条件, 采用拉格朗日乘子法计算优化后的两片 NURBS 上的控制点和权值, 并将其存入到容器中;

Step 5. 将优化后的控制点和权值大小带回到原曲面实现 G^1 连续拼接。

4.2. 求解结果

利用 C++ 和 QT 实现上述算法, 如下图 3 所示是双片 NURBS 曲面拼接时, 利用优化思想得到的模型图。利用 paraview 进行雅可比数值的显示可以得到实现 C^1/G^1 连续前后的对比图, 根据图片可以得到其再利用算法优化后, 连续性得到明显的提升。

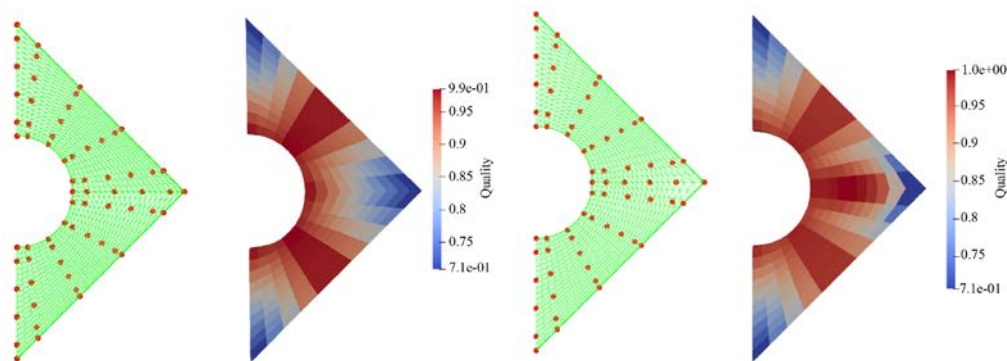


Figure 3. G^1 Comparison before and after continuous optimization

图 3. G^1 连续优化前后对比

根据图中可以看出优化前模型在拼接处的雅可比值偏低, 该模型在进行等几何分析时会出现分析效果不理想的情况。经过优化后的模型在拼接处的雅可比值明显得到提升, 更加符合等几何分析要求, 在拼接处也更加连续。

5. 结论

目前 B 样条表达的模型在连续性上的研究比较成熟, 但对于 NURBS 曲面上连续性拼接研究却比较

少。本文设计一个对双片 NURBS 曲面在拼接处, 实现 G^1 连续拼接优化的算法, 该方法再保证曲面拼接 C^0 连续的基础上, 进一步优化控制点和权值使其变化量尽可能小, 从而保证曲面形状不会发生改变; 既能保证曲面拼接更加光滑, 还能防止曲面出现因优化出现变形错位的情况; 采用优化方式的 NURBS 曲面, 其模型质量也更好, 更适用于分析。目前, 文章只针对二维 NURBS 曲面拼接, 对于三维情况没有涉及。因此, 本文的工作对于未来不同次数、不同节点矢量的 NURBS 曲面拼接以及 NURBS 体拼接具有一定的启发意义。

参考文献

- [1] Akhras, H.A., Elguedj, T., Gravouil, A., *et al.* (2016) Isogeometric Analysis-Suitable Trivariate NURBS Models from Standard B-Rep Models. *Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering*, **307**, 256-274. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2016.04.028>
- [2] Liu, L., Zhang, Y., Hughes, T.J.R., *et al.* (2014) Volumetric T-Spline Construction Using Boolean Operations. *Engineering with Computers*, **30**, 425-439. <https://doi.org/10.1007/s00366-013-0346-6>
- [3] 赵岩, 施锡泉. 双五次 B-样条曲面的 G^2 连续条件[J]. 数值计算与计算机应用, 2004, 25(1): 20-35.
- [4] 陆亚文, 李际军. 一种参数化可调的 NURBS 曲面 G^2 光滑拼接算法[J]. 计算机工程与应用, 2011, 47(15): 168-170.
- [5] 王崇. 基于近似光滑的样条曲面拼接方法研究[D]: [硕士学位论文]. 吉林: 吉林大学, 2022. <https://doi.org/10.27162/d.cnki.gjlin.2022.002690>
- [6] 车翔玖. 双三次张量积非均匀 B 样条曲面 G^2 光滑条件[J]. 新疆大学学报(自然科学版), 2002, 19(1): 38-41.
- [7] 车翔玖, 梁学章. 两邻接 NURBS 曲面间的 G^2 连续条件[J]. 吉林大学学报(理学版), 2002, 40(1): 19-23. <https://doi.org/10.13413/j.cnki.jdxblxb.2002.01.004>
- [8] 陆亚文, 李际军. 一种参数化可调的 NURBS 曲面 G^2 光滑拼接算法[J]. 计算机工程与应用, 2011, 47(15): 168-170.