

# Solution and Analysis of Orr-Sommerfeld Equation of Flow Stability on Special Saturated Liquid Film\*

Xiaochao Fan

College of Electrical Engineering, Xinjiang University, Urumqi  
Email: fxc0102@126.com

Received: Mar. 5th, 2012; revised: Mar. 25th, 2012; accepted: Mar. 29th, 2012

**Abstract:** The flow and heat transfer of the special saturated liquid film falling down an inclined heated plate were described by the N-S equation and the reasonable boundary condition. And the corresponding mathematical model was established, the relation between the surface tension and the fluctuation by nonlinear function on temperature was expressed. Then the Orr-Sommerfeld equation describing the flow stability of liquid film was obtained. Finally, the inertia force, heat capillary force, steam pressure and capillary pressure were analyzed about the influence on the flow stability.

**Keywords:** Special Saturated Liquid Film; Flow Stability; Perturbation Method; Orr-Sommerfeld Equation

## 特殊饱和液膜流动稳定性 Orr-Sommerfeld 方程求解及分析\*

樊小朝

新疆大学电气工程学院, 乌鲁木齐  
Email: fxc0102@126.com

收稿日期: 2012 年 3 月 5 日; 修回日期: 2012 年 3 月 25 日; 录用日期: 2012 年 3 月 29 日

**摘要:** 利用 Navier-Stokes 方程和边界条件对沿加热壁面倾斜下降的特殊饱和液膜的流动和传热问题进行了描述, 并建立其数学模型, 再根据温度的非线性函数表达表面张力与波动之间的关系, 利用摄动法导出了描述液膜流动稳定性的 Orr-Sommerfeld 方程。最后对方程进行了求解, 分析得到了惯性力、热毛细力、蒸汽压力以及毛细压力对流动稳定性的影响。

**关键词:** 特殊饱和液膜; 流动稳定性; 摄动法; Orr-Sommerfeld 方程

### 1. 引言

所谓特殊饱和液膜, 是指液态低沸点气体形成的液膜。特殊饱和液膜在斜面上的流动发生在许多实验装置和技术应用上, 比如生物医学工程、材料加工、食品和化工, 在一些传热设备的设计上, 比如电厂中换热器、蒸发器、冷凝器和热管也有重要作用。因此, 研究特殊饱和液膜流动传热稳定性分析将有助于改善热应力的预测和传热效率<sup>[1-3]</sup>。

根据流动的液膜的状态可以分为过冷液膜和饱和液膜分别研究。叶学民等<sup>[4]</sup>对层流和湍流状态的波动液膜进行了数值模拟。对于波动饱和液膜的传热, 由于表面波的存在, 使得对流换热加大, 平均传热系数对于无波动时有所增大。

### 2. 数学物理模型

考虑温度为  $T_s$  的饱和液膜在重力作用下从温度为  $T_w$  的等温倾斜光滑平壁上流下。液膜外面是温度同为  $T_s$  的饱和蒸汽, 壁面与液膜发生热量交换, 热量通过汽液界面的相变而传递。液膜垂直平均厚度为  $d$ ,

\*资助信息: 国家自然科学基金资助项目: 分层液膜沿非均匀受热斜面流动传热特性分析(51106132)。

平板与水平夹角为  $\beta$ 。液膜厚度  $h$  因波动随时间和流动距离而变，液膜的波动流及坐标系如图 1 所示。

为简化分析，所作的假设如下：

1) 液体为牛顿流体，作二维层流流动，除表面张力外，物性恒定不变；

2) 壁面与液膜间的换热属低热流密度的自由表面蒸发或凝结，膜内传热为沿膜厚方向的导热，不发生沸腾；

3) 不计热损失和沿流动方向的对流换热，壁面与液膜间的换热完全用于汽液界面的相变；

4) 相变使液膜质量的损失或增加相对于液膜来流总量很小，液膜平均厚度不发生变化；

5) 蒸汽对于液膜没有沿流动方向的相对运动，对液膜自由表面的剪切力忽略不计；

6) 蒸汽密度相对于液体密度可忽略不计；

7) 扰动波幅很小，忽略产生的非线性影响。

由质量守恒和能量守恒，液膜的波动流动控制方程为连续性方程和 N-S 方程，分别以  $u, v$  代表  $x, y$  方向的速度，则控制方程及边界条件<sup>[5]</sup>为：

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g \sin \beta + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} - \rho g \cos \beta + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (3)$$

$$u = v = 0, \quad y = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial \sigma}{\partial x} \quad y = h \quad (5)$$

$$p = p_0 + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \sigma \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad y = h \quad (6)$$

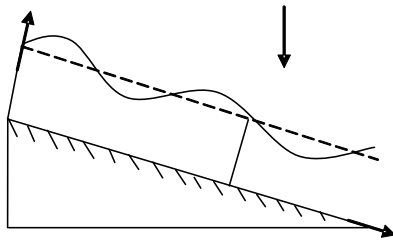


Figure 1. Diagram: liquid film flows along the heating plate  
图 1. 液膜沿加热平板流动图

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} - v = 0 \quad y = h \quad (7)$$

其中  $t, g, p, p_0$  分别为时间、重力加速度、液膜和蒸汽相对于环境的过余压力； $\rho, \nu, \mu, \sigma$  分别为密度、运动粘度、动力粘度和表面张力。方程(5), (6), (7)分别表示液膜自由表面的运动，剪切应力，压应力的边界条件。

### 3. 非线性表面张力、蒸汽压力与波动关系

液膜与壁面间的传热量<sup>[5]</sup>为：

$$q = \frac{k(T_w - T_i)}{h} \quad (8)$$

由能量守恒，等于汽液界面间的相变传热<sup>[6]</sup>，

$$q = \frac{e\rho_v r^2}{T_s} \left[ \frac{M}{2\pi R_g T_s} \right]^{1/2} (T_i - T_s) \quad (9)$$

式中， $k, T_i, M, e, \rho_v, r, R_g$  分别表示液体的导热系数、自由表面温度、液体分子量、蒸发系数、蒸汽密度、汽化潜热和蒸汽的气体常数，令

$$a = \frac{e\rho_v r^2}{kT_s} \left[ \frac{M}{2\pi R_g T_s} \right]^{1/2} \quad (10)$$

联立(8)、(9)，得

$$T_i = \frac{T_w + ahT_s}{1 + ah} \quad (11)$$

$$q = \frac{ak(T_w - T_s)}{1 + ah} \quad (12)$$

设表面张力与温度的关系<sup>[7]</sup>为：

$$\sigma = \sigma_0 (1 - T_i/T_c)^n \quad (13)$$

式中  $\sigma_0$  为某基准温度  $T_0$  时张力，令  $\Delta T = T_w - T_s$ 。

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{na\sigma_0 \Delta T (\Delta T_1 + ah\Delta T_2)^{n-1}}{T_c^n (1 + ah)^{n+1}} \frac{\partial h}{\partial x} \quad (14)$$

蒸汽作用于液膜自由表面的压力<sup>[8]</sup>：

$$p_v = \pm \rho_v v_v^2 = \pm \frac{1}{\rho_v} \left[ \frac{ak\Delta T}{r(1 + ah)} \right]^2 \quad (15)$$

(15)中正负号分别表示蒸发和冷凝； $v_v$  为蒸汽离开或进入自由表面的速度。液膜蒸发时， $v_v$  指向膜外，蒸汽产生的压力指向液膜，膜内压力增大；蒸汽遇冷

凝结时,  $v_v$  指向膜内, 蒸汽运动所需的压力由膜内提供, 即膜内压力减小。

#### 4. 稳定性微分方程组

特征速度为  $u_0 = gd^2 \sin \beta / 2\nu$ , 特征时间为  $d/u_0$ , 密度特征尺寸为  $\rho_0$  (为一常数), 压强特征尺寸为  $\rho_0 g d \sin \beta$ 。以“\*”表示无量纲量, 引入无量纲变换, 则雷诺数  $Re = u_0 d / \nu$ , 弗罗德数  $Fr = u_0 / (gd)^{1/2}$ , 韦伯数  $We = \sigma_0 / \rho_0 g d^2 \sin \beta$ , 毕渥数  $Bi = \alpha d / k$ , 普朗特数为  $Pr = \nu / \kappa$ , Marangoni 数  $Ma = \gamma \Delta T d / \mu k$ , 其中  $\gamma$  为表面张力温度系数,  $k$  为导热系数,  $\nu$  为运动粘性系数,  $\mu$  为动力粘性系数,  $\kappa$  为热扩散系数。Ma, Pr, Re 之间的关系为  $M = Ma / 2PrRe$ 。

将控制方程及其边界条件(1)到(7)式进行无量纲化, 将波动看作一个没有扰动的平滑流和一个小扰动流叠加而成, 假定:

$$u^* = \bar{u} + u', v^* = \bar{v} + v', p^* = \bar{p}_v, h^* = 1 + \eta \quad (15)$$

式中“-”“'”分别代表平滑流和扰动流, 则

$$\bar{u} = y - \frac{1}{2}y^2, \bar{p}_v = \pm \frac{1}{\rho_0 \rho_v g d \sin \beta} \left[ \frac{ak\Delta T}{r(1+ad)} \right]^2 \quad (16)$$

由摄动法, 平滑层流在  $y$  方向没有分速度, 只有由扰动流产生的分量;  $\eta$  表示液膜自由表面偏离平滑层流自由表面的无量纲距离, 对扰动初始发生的情况,  $\eta$  是一个远小于 1 的量。将以上各量代入无量纲方程组及边界条件, 略去扰动量二次以上的项, 得到扰动微分方程组:

$$\frac{\partial u'}{\partial x^*} + \frac{\partial v'}{\partial y^*} = 0 \quad (17)$$

$$Re \left( \frac{\partial u'}{\partial t^*} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x^*} + v' \frac{\partial \bar{u}}{\partial y^*} \right) = -2 \frac{\partial p'}{\partial x^*} + 2 + \left( \frac{\partial^2 u'}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u'}{\partial y^{*2}} \right) \quad (18)$$

$$Re \left( \frac{\partial v'}{\partial t^*} + \bar{u} \frac{\partial v'}{\partial x^*} \right) = -2 \frac{\partial p'}{\partial y^*} - 2 \cot \beta + \left( \frac{\partial^2 v'}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v'}{\partial y^{*2}} \right) \quad (19)$$

$$y^* = 0, u' = v' = 0 \quad (20)$$

$$y^* = 1 + \eta, v' = \frac{\partial \eta}{\partial t^*} + \bar{u} \frac{\partial \eta}{\partial x^*} = \eta_t + \bar{u} \eta_x \quad (21)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y^*} + \frac{\partial u'}{\partial y^*} + \frac{\partial v'}{\partial x^*} = \frac{\gamma a \Delta T d}{\mu u_0 [1 + ad(1 + \eta)]^2} \frac{\partial \eta}{\partial x^*} \quad (22)$$

$$\bar{p}_v + p' = \frac{1}{d} \frac{\partial v'}{\partial y^*} - \frac{\sigma}{\rho_0 g d^2 \sin \beta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^{*2}} \pm \frac{1}{\rho_0 \rho_v g d \sin \beta} \left\{ \frac{ak\Delta T}{r[1 + ad(1 + \eta)]} \right\}^2 \quad (23)$$

把  $y^* = 1 + \eta$  上的边界条件用  $y^* = 1$  处的量表达, 按线性假定, 只保留扰动量的线性项, 式(20)形式不变, 式(22), (23)可由下述方式简化, 为简单起见, 下列方程中略去“\*”, 各量仍表示无量纲量。

$$m = \frac{na\sigma_0 d \Delta T (\Delta T_1 + ad \Delta T_2)^{n-1}}{\mu u_0 T_C^n (1 + ad)^{n+1}},$$

$$n = \pm \frac{1}{\rho_0 \rho_v g d \sin \beta} \left[ \frac{ak\Delta T}{r(1 + ad)} \right]^2 \frac{2ad}{1 + ad}, \quad (24)$$

$$w = \frac{\sigma}{\rho_0 g d^2 \sin \beta}$$

$m, n, w$  分别为热毛细力, 蒸汽压力, 表面张力准数。将这三个准数代入(22), (23), 则得

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \eta + \frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x} = m \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad y = 1 \quad (25)$$

$$p' = \frac{1}{d} \frac{\partial v'}{\partial y} - w \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} + n \eta \quad (26)$$

引入无量纲流函数  $\Psi(x, y, t)$ , 令

$$u' = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, v' = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (27)$$

代入扰动方程组得:

$$Re(\psi_{yt} + \bar{u}\psi_{xy} - \bar{u}_y\psi_x) = -2p'_x + 2 + (\psi_{xxy} + \psi_{yyx}) \quad (28)$$

$$Re(\psi_{xt} + \bar{u}\psi_{xx}) = 2p'_y + 2 \cot \beta + (\psi_{xxx} + \psi_{xyy}) \quad (29)$$

$$y = 0, \psi_x = \psi_y = 0 \quad (30)$$

$$y = 1, -\psi_x = \eta_t + \bar{u}\eta_x \quad (31)$$

$$\bar{u}_{yy}\eta + \psi_{yy} - \psi_{xx} = m\eta_x \quad (32)$$

$$p' = -\frac{1}{d}\psi_{xy} - w\eta_{xx} + n\eta \quad (33)$$

又设

$$\psi(x, y, t) = \varphi(y) e^{ia(x-ct)}, \eta(x, t) = \xi e^{ia(x-ct)} \quad (34)$$

$$p'(x, y, t) = f(y) e^{ia(x-ct)}$$

其中  $\varphi, f, \xi$  分别为流函数、压力、表面波动沿

$y$  向的无量纲幅值;  $\alpha = 2\pi d/\lambda$  为无量纲波数,  $\lambda$  为波长,  $c = c_r + ic_i$  为扰动的无量纲复速度,  $c_r$  表示波动传播的速度,  $c_i$  代表激励量。  $\xi$  扰动的初始值, 在本文中为一很小的量。将  $\psi$ ,  $p'$ ,  $\eta$  代入上述扰动方程组, 最后化简、整理, 得到如下的 Orr-Sommerfeld 方程的边值问题。

当  $\beta \neq 90^\circ$  时,

$$\begin{aligned} \varphi_{yyyy} - 2\alpha^2 \varphi_{yy} + \alpha^4 \varphi &= i\alpha Re \left[ (\bar{u} - c)(\varphi_{yy} - \alpha^2 \varphi) - \bar{u}_{yy} \varphi \right] \\ \varphi(0) &= \varphi_y(0) = 0 \\ -\varphi(1) &= -c\xi + \bar{u}(1)\xi \\ \varphi_{yy}(1) + \left( \alpha^2 - \frac{1}{c-1/2} - \frac{i\alpha m}{c-1/2} \right) \varphi(1) &= 0 \\ \cot \beta \varphi_{yyy}(1) + i\alpha \left( \frac{2}{d} - 1 \right) \varphi_{yy}(1) &+ \left[ i\alpha Re \cot \beta \left( c - \frac{1}{2} \right) - \alpha^2 \cot \beta \left( \frac{2}{d} + 1 \right) \right] \\ &+ \left[ Re\alpha^2 \left( c - \frac{1}{2} \right) + \frac{2i\alpha \cot \beta}{c - \frac{1}{2}} (-\alpha^2 w - n) + i\alpha^3 \right] \varphi(1) = 0 \end{aligned} \quad (35)$$

当  $\beta = 90^\circ$  时, 与文献<sup>[8]</sup>是一致的,

$$\begin{aligned} \varphi_{yyyy} - 2\alpha^2 \varphi_{yy} + \alpha^4 \varphi &= i\alpha Re \left[ (\bar{u} - c)(\varphi_{yy} - \alpha^2 \varphi) - \bar{u}_{yy} \varphi \right] \\ \varphi(0) &= \varphi_y(0) = 0 \\ -\varphi(1) &= -c\xi + \bar{u}(1)\xi \\ \varphi_{yy}(1) + \left( \alpha^2 - \frac{1}{c-1/2} - \frac{i\alpha m}{c-1/2} \right) \varphi(1) &= 0 \\ \varphi_{yyy}(1) + \left[ i\alpha Re \left( c - \frac{1}{2} \right) - 3\alpha^2 \right] \varphi_y(1) &+ \frac{i\alpha Re}{c-1/2} (n - \alpha^2 w) \varphi(1) = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

至此, (36), (37) 方程组分别为斜面和竖壁两种情况下的特殊饱和液膜流动稳定性的 O-S 方程。

## 5. 方程求解及分析

当  $\beta \neq 90^\circ$  时, 由摄动法, 波长越长, 扰动越不易衰减, 流动越易趋向不稳定, 因此, 分析液膜流动稳定性时, 只需了解长波扰动的增减趋势。设

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 \alpha + O(\alpha^2), c = c_0 + c_1 \alpha + O(\alpha^2) \quad (37)$$

代入 O-S 方程, 求解得无量纲复速度:

$$c = 1 + i\alpha \left( \frac{1-2/d}{3 \cot \beta} + \frac{2}{15} \text{Re} \right) + \frac{1}{2} i\alpha m - \frac{2}{3} i\alpha n - \frac{2}{3} i\alpha^3 w \quad (38)$$

分析可以看出上式虚部四项, 惯性力是不稳定因素, 它促使扰动增长, 毛细压力抑制扰动增长起稳定作用, 表面张力和蒸汽压力在液膜受热蒸发时起增进扰动的作用。

## 6. 结论

本文采用温度的非线性函数表达液膜表面张力, 研究了等壁温边界条件下特殊饱和液膜流动稳定性的数学物理模型, 探讨了非线性表面张力、蒸汽压力与液膜波动的关系, 利用摄动法及线性理论, 引入流函数, 得到了表征斜面和竖壁两种情况下特殊饱和液膜流动稳定性的 O-S 方程。最后, 当  $\beta \neq 90^\circ$  时, 对 O-S 方程进行求解, 得到无量纲复速度, 分析研究了惯性力促使流动不稳定, 毛细压力起稳定作用, 而表面张力和蒸汽压力在液膜受热蒸发时对流动稳定性起扰动作用。

## 7. 致谢

感谢国家自然科学基金资助项目: 分层液膜沿非均匀受热斜面流动传热特性分析(51106132)!

## 参考文献 (References)

- [1] 李欣. 波动液膜流动传热特性及稳定性研究[D]. 华北电力大学, 2006.
- [2] 田英. 分层液膜流动传热特性及影响因素分析[D]. 华北电力大学, 2008.
- [3] Y. L. Cheng, X. C. Fan. Effect of Stratification on stability of flow and heat transfer in the liquid film flowing down an inclined heated plate. *Modern Physics Letters B*, 2010, 24(13): 1461-1465.
- [4] 叶学民, 阎维平, 蒋章焰, 王军. 自由降膜表面波流动和传热特性的研究[J]. 华北电力大学学报, 1999, 26(1): 7-12.
- [5] 杨世铭, 陶文铨编著. 传热学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2006: 211.
- [6] S. G. Bankoff. Dynamics and stability of thin heated liquid films. *Journal of Heat Transfer*, 1990, 112(3): 538-546.
- [7] 程友良, 叶学民. 非线性表面张力对饱和液膜传热稳定性的影响[J]. 华北电力大学学报, 2002, 29(2): 50-54.
- [8] 师晋生, 施明恒. 饱和下降液膜的稳定性研究[J]. 应用力学学报, 1999, 16(4): 27-34.